Den binære kugleramme

Blandt de mange genstande fra Dansk Skolemuseum var der en speciel "kugleramme", som museumsinspektør Hans Buhl siden hjemtagelsen har præsenteret ved et par NatCafeer på Steno Museet. Det har inspireret en af museets hyppige gæster, Merete Sørensen, til at skrive om kuglerammen.

Den binære kugleramme er opbygget på en 55 × 47 cm stor, fritstående træramme, hvori der er monteret tre metalstænger med hver sin række af 10 vendbare plasticbrikker ("kugler") med "0" på den ene side og "1" på den anden. Herover er der en hvid label, hvorpå potenser af 2 angives med sorte totaller og røde potensangivelser fra 0 til 9. Over disse vises de tilsvarende tal i titalssystemet med hvide tal på rød baggrund.

Kuglerammen er på bagsiden mærket "THE TIPPLAX BINARY Notation & Calculating Frame", men det fremgår ikke, hvem der har fremstillet den, endsige hvornår. Den antages dog at være fra omkring 1970'erne. Motivationen for den har formodentlig været at give skoleelever forståelse af det talsystem, som den fremvoksende computerteknologi bygger på, og inspirere dem til at arbejde med EDB og programmering.

Hvis nogle af *Stenomusens* læsere har erfaringer med lignende kuglerammer, er museet meget interesseret i supplerende oplysninger.

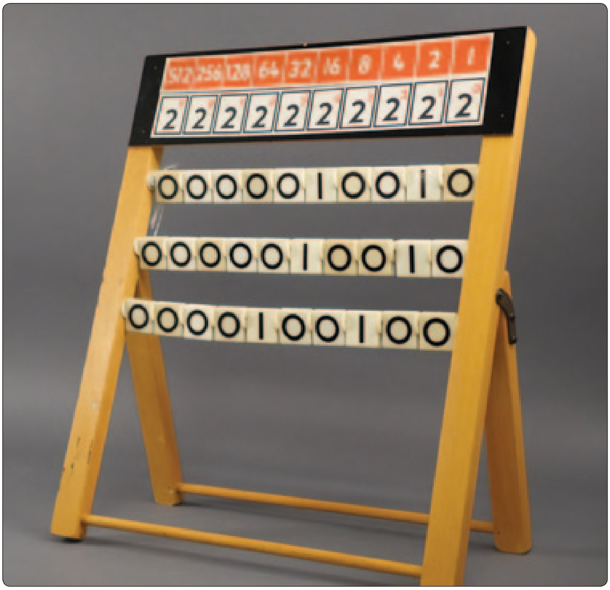
Regning i totalssystemet

Kuglerammens særlige kvaliteter er at

- illustrere addition og subtraktion af to binære tal med op til ti cifre
- lette konverteringen af et tal på op til 1023 i titalssystemet til et binært tal
- lette konverteringen af et binært tal med op til 10 cifre til et tal i titalssystemet
- vise forenkling af multiplikation med potenser af to.

Addition og subtraktion

Addition af to binære tal bygger på tre simple regne-



Den binære kugleramme viser her addition af 18 + 18 = 36. Da det svarer til 2 × 18, illustrerer det endvidere, at multiplikation med et talsystems grundtal svarer til at sætte et nul efter udgangstallet. Foto: Hans Buhl.

regler, nemlig 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 1 og 1 + 1 = 10.

Additionen lettes, når man gør sig enkle afledte regneregler klart, først og fremmest det forhold, at 11 + 1 = 100 og 111 + 1 = 1000 kan generaliseres til, at for alle rækker af n ettaller gælder, at hvis der til rækken adderes "1", bliver resultatet et ettal efterfulgt af n nuller, f.eks. for n = 5: 11111 + 1 = 100000. Dette kan meget enkelt efterprøves på kuglerammen.

Tilsvarende bygger subtraktion på tre simple regneregler, nemlig 1 - 1 = 0, 1 - 0 = 1 og 10 - 1 = 1. Også her gælder, at klargøring af en simpel regneregel letter processen, nemlig at et ettal efterfulgt af n nuller minus en er lig n ettaller, eksempelvis for n = 5: 100000 - 1 = 11111.

Konvertering

Når et tal fra titalssystemet skal konverteres til et binært tal, nulstilles kuglerammen. Herefter kan man nemt udpege placeringen af det binære tals første ettal, nemlig ved at se, om tallet er større eller mindre end 512, i sidste tilfælde større eller mindre end 256, 128 etc. Derefter trækker man det tal, som det fremkomne ettal repræsenterer, fra udgangstallet, og ser, om det resulterende tal er større eller mindre end næste tal i rækken mod højre. Denne proces gentages, indtil udgangstallets værdi er omsat til ettaller. Den fremkomne række af ettaller og nuller repræsenterer det binære tal.

Tilsvarende kan det på kuglerammen enkelt ses, hvilket tal i titalssystemet et binært tal repræsenterer, fordi man blot behøver at addere de talværdier, som figurerer over det binære tals ettaller.

> **»Der findes 10 slags mennesker: dem, der forstår binære tal, og dem, der ikke gør.«**

Multiplikation

Multiplikation med potenser af 2 kan ligeledes anskueliggøres på kuglerammen. For multiplikation med 2 svarer til at addere et tal svarende til udgangstallet, dvs. svarer til det tilfælde af addition, hvor de to addender er ens. I sin enkleste form svarer det til, at det er additionens elementære regel, der gælder, nemlig 1 + 1 = 10.

Dette betyder i praksis, at hvis man kopierer øverste rækkes tal på anden række og adderer de to tal, har man multipliceret udgangstallet med to, og det fremkomne tal på tredje række er udgangstallet efterfulgt af et nul, ganske enkelt fordi 0 + 0 = 0, og fordi det for det første ettal, man når fra højre, gælder, at 1 + 1 = 10, dvs. udgangstallet efterfulgt af et nul.

Hvis man vil efterprøve, om det tilsvarende gælder, at multiplikation med 2^2 svarer til at tilføje to nuller, kan man fastholde resultattallet på tredje række fra multiplikation med 2, og kopiere dette på den midterste række og så lade øverste række blive resultatrækken. Også her gælder, at det første ettal, der nås, adderet med sig selv giver 10, dvs. det nye udgangstal efterfulgt af et nul, og dermed det oprindelige udgangstal efterfulgt af to nuller.

Dette resultat kunne ligeledes være opnået ved at associere til titalssystemet. Her vil næppe nogen sætte spørgsmålstegn ved, om resultatet af en multiplikation med 10^m er udgangstallet efterfulgt af *m* nuller, f.eks. tre nuller for 10^3. Også i det binære talsystem gælder – som i ethvert talsystem – at grundtallet udtrykkes "10".

Mere generelt gælder, at udgangstallets mønster (fra første til sidste ettal) ikke ændres under multiplikation med potenser af to. Eksempelvis påvirkes "111" (7) ikke af, at der ganges med 4: "11100" (28) eller 8: "111000" (56), ligesom sekvensen "1001" (9) forbliver den samme i 36 og 72, hhv. "100100" og "1001000".

Additionen af tallene 511 + 1 = 512 i binær form har en særlig æstetisk kvalitet, som er omtalt i teksten. Foto: Hans Buhl.

Smukke binære årstal

Additionen af tallene 511 + 1 = 512 i binær form, se foto, rummer en særlig æstetisk kvalitet, da alle kuglerammens tre rækker er reciprokt ("yin-yang-agtigt") forbundne, idet "1" og "512" er spejlvendte rækker af ni nuller med et hhv. efter- og foranstillet nul, og 511 er en række af ni ettaller med et foranstillet nul: 0111111111 + 1 = 1000000000.

Såfremt kuglerammens rækker havde indeholdt endnu en "kugle", dvs. en kugle repræsenterende $2^{10} = 1024$, ville den kunne have illustreret, at vi årstalsmæssigt passerede en overgang med ændring af mange cifre ved overgangen fra 2015 til 2016, nemlig fra det palindrome årstal 11111011111 til 11111100000.

Man kunne i dette perspektiv fristes til at beklage, at kuglerammen ikke er konstrueret med en sådan ekstra kugle, så aktuelle årstal kunne illustreres. På den anden side har kuglerammen formodentligt fuldført sin mission som vejviser i det binære talsystem, når mulighederne med de 10 kugler er udtømte. For når en elev først har lært at beherske binære tal op til 1023, som den aktuelle kugleramme muliggør, vil vedkommende sikkert kunne fortsætte på sin egen mentale "kugleramme", frigjort fra den taktile kugleramme, evt. hjulpet af papir og blyant og måske af mere komprimerende og elegante, matematiske symbolværktøjer, og således forestille sig binære tal med talværdier svarende til årstal langt ud i fremtiden.

Merete Sørensen