En matematikkyndig bonde.

(Jørgen Hansen i Slyngsten 1757—1849.)

Af Nikolaj Andersen.

Blandt videnskaberne indtager matematikken en kendelig særstilling over for den menneskelige almeninteresse.

Dette har i første række sin grund i arbejdsmaterialets forskellighed.

Alle andre videnskaber arbejder med et udenfra givet stof: deres grundforestillinger er ting, begivenheder og forhold, hvis kendemærker, egenskaber og vilkår de søger at bestemme. Alt dette egner sig fra begyndelsen af til at göre indtryk på sanserne, sætte hjærtet i bevægelse og vække den almindelige videbegærlighed.

Matematikken derimod har til arbejdsemme det indholdsløse rum, den begivenhedsløse tid og det nøgne, abstrakte begreb: en störrelse. Disse grundforestillinger forekommer den jævne forstand så tomme, kedsommelige og kolde, at de snarere virker frastødende end tiltrækkende på de fleste.

Men den nævnte særstilling grunder sig også på arbejdsmetodens forskellighed.

De øvrige videnskaber er i hovedsagen erfaringsvidenskaber; deres arbejdsmetoder går fortrinsvis ud pa at søge, samle og sigte det givne stof, og de stiller da særlig deres krav til så nogenlunde almenmenneskelige åndskræfter som en naturlig iagttagelsesevne, en udviklingsdygtig hukommelse og en skönsom psykologisk taktfølelse.

Matematikken derimod er en ren fornuftvidenskab; ikke en eneste af dens sandheder hviler på erfaringen, men alle dens slutninger fremgår af rene forstandsbegreber. Den har slet ingen brug for selv de omhyggeligste iagttagelser, de troværdigste vidnesbyrd eller de fortrinligste personlige anskuelser; men til gengæld lægger den fuldstændig beslag på en vidtrækkende abstraktionsevne, en udholdende åndelig energi og en absolut, til uindskrænket almindelighed og ubetinget vished førende nöjagtighed. Et sa intensivt rent forstandsmæssigt arbejde virker imidlertid hurtig trættende på jævne, almindelige åndsevner; og for tidlig træthed sløver selvfølgelig interessen.

Som følge af den således omtalte, i den menneskelige natur og i vedkommende videnskabs væsen begrundede mangel på almindelig interesse for den rene matematik er denne disciplin langt mere end de øvrige henvist til fagmændenes snævre, isolerede kres, og det hører til de rent ejendommelige, ligefrem påfaldende undtagelser, at den også finder vej til de bredere lag af befolkningen.

Almindelig betragtet finder dette sin bekræftelse fra to forskellige sider.

Det stadfæstes nemlig for det förste ved videnskabsmændenes forhold til udbredelsen af folkelig dannelse.

I vor folkelige tidsalder er man unægtelig ivrig bestræbt for at fremme almenhedens oplysning. I de forskellige civiliserede lande sörger både foreninger og enkelte mænd med al priselig omtanke for, at der udgives talrige folkebelærende skrifter: vi har nu populære historiske, medicinske og naturvidenskabelige værker, og vi har almenforståelige fremstillinger af teologiske, juridiske og sprogvidenskabelige spörgsmål.

Kun på det matematiske område savner vi nogenlunde tilsvarende bestræbelser. Hverken blandt de af „Udvalget for folkeoplysningens fremme“ eller „Studentersamfundet“ udgivne skrifter eller blandt „Frem“s populærvidenskabelige værker vil man finde om end blot den mindste matematiske bog eller afhandling. For Danmarks vedkommende står Poul la Cour's „Historiske matematik“ vel endnu som et förste og eneste forsøg på et indledende skridt i den her omhandlede retning. Og i andre lande har vi fuldtud lignende forhold. I det norske „Bibliothek for de tusen hjem“ vil det være forgæves at søge matematiske fremstillinger, og i Reclams tyske „Universal-Bibliothek“, der i fjor nåede op til sit 5000de nummer, er der simpelthen kun en eneste matematisk bog, nemlig Eulers fortrinlige algebra, der omfatter fire numre.

For det andet bekræftes matematikkens naturlige mangel på folkelighed også direkte ved den store almenheds forskellige stilling til den og de øvrige videnskaber.

I vor fremskredne, skrive- og talelystne tid er der navnlig blandt ungdommen mange, hvis selvkritik vejer for lidt imod trangen til offentlig fremtræden. Folk uden fagkundskab, tit uden anden end almindelig almueskole-uddannelse, fremkommer ofte med indlæg om mere eller mindre videnskabelige ting, de slet ikke er domføre til at tale med om.

Men aldrig har jeg set eller hørt noget tilsvarende lægmands-indlæg i rent matematiske spörgsmål. Og jeg undrer mig ikke derover. Det blotte begreb matematik er jo ligefrem tabu for mange; og over for den store almenhed står selve den matematiske videnskab ret som en Pallas intacta, hvis ophöjede væsen i sig er et sikrende værn imod mængdens brutale forveksling af fusken og forsken.

Hvad der imidlertid således gælder om matematikkens stilling til de bredere lag i almindelighed, gælder da også, og fortrinsvis, om dens forhold til almuen på landet i særdeleshed; thi på landet er der navnlig som følge af den delvis lavere skoleundervisning og den altid dårligere adgang for voksne til videregående oplysning mindre endog end i byerne anledning til at få vakt og vedligeholdt nogen interesse for sagen.

Den langt overvejende del af den landlige befolkning når derfor da aldrig længere end op på det förste matematiske abstraktionstrin: begreb om ubenævnte *talstörrelser*.

I landsbyskolerne gives der ganske vist tit en fortrinlig undervisning i regning; mangen gang bedre end i byerne. På de rent aritmetiske enemærker omfatter faget teoretisk behandling af de fire regningsarter med hele og brudne tal samt decimalbrøker og desforuden deres praktiske anvendelse i regula de tri og procentregning samt delings- og blandingsregning. Endvidere gives der lejlighed til på det mere geometriske område at lære beregning af flade- og rumfang samt uddragning af kvadrat- og kubikrod.

Men disse beregninger foretages gærne fuldstændig mekanisk uden dybere indsigt i tallenes natur eller reglernes rigtighed. Det vil nemlig sikkert være yderst sjældent, at skolebörn på landet får en nogenlunde tydelig forestilling om vort sædvanlige talbegrebs udvidelse både til det negative og det irrationale, end sige til det imaginære og komplekse område, eller at de sættes i stand til at føre bevis for de ved deres geometriske beregninger anvendte forskrifters virkelige gyldighed.

Kun rent undtagelsesvis vil een og anden ved hjælp af landbyskole-undervisningens skammel formå at stige op paa det andet abstraktionstrin: begreb om konstante *almindelige störrelser*.

Sadanne undtagelser findes, i det mindste i Nordslesvig, nærmest blandt folk af den gamle skole, idet ganske enkelte af disse i sin tid under dygtige og særlig interesserede skolemestres vejledning f. eks. har lært at behandle algebraiske ligninger både af förste og anden grad; ja jeg kender en ældre håndværker, der endogså kan opløse visse numeriske ligninger af tredie grad efter en ham som dreng af en landsbydegn bibragt metode.

Men længere når den agreste matematiske videnskab næppe nogensteds her i landet for tiden. Den kunde måske i et særligt undtagelsestilfælde tænkes at strække sig til den mekaniske brug af de såkaldte Briggs'ske logaritmer, hvorimod det er höjst usandsynligt, at nogen almindelig bonde, d. v. s. en mand uden anden end bondeskole-dannelse, ejer om end kun et indskrænket kendskab f. eks. til trigonometriske beregninger, determinanter, algebraiske ligninger af höjere grad, transcendente ligninger osv.

I betragtning af alle de anførte kendsgerninger vil det vel synes så godt som utroligt, at nogen på grundlag af almueskole-uddannelse alene endog skulde evne at svinge sig op på det tredie matematiske abstraktionstrin: begreb om *funktioner*, d. v. s. fuldstændig almindelige, foranderlige störrelsers natur og gensidige afhængighed.

At endydermere en ellers i de udvortes livsforhold jævn og almindelig bonde skulde være i stand til ved selvundervisning at sætte sig ind i den egentlig grundlæggende del af den höjere matematik, den sublime, for det langt overvejende flertal af menneskslægten utilgængelige *differential- og integralregning*, turde vel forekomme alle matematikere af faget om ikke fuldstændig umuligt, så dog i det mindste aldeles urimeligt.

En virkelig, i höjere forstand matematikkyndig bonde er således ikke noget hverdagsmenneske; han er snarere faktisk et rent fænomen, en så fremragende personlighed, at han med föje har krav på at kendes i videre krese.

Men et sådant fænomen var gamle Jørgen Hansen i Slyngsten.

I de udvortes livsforhold var Jørgen Hansen ikke nogen videre påfaldende fremtoning: fra sin samtid og sine omgivelser udskilte han sig hverken ved særlige bedrifter eller synderlige oplevelser. Hans levnedsløb er derfor snart fortalt.

Han blev født den 31. december 1757 i landsbyen Tumbøl i Felsted sogn. Faderen, Hans Jørgensen, var en den gang endnu hoveripligtig bonde, og Jørgen måtte derfor som dreng ikke sjælden køre plov for sin fader „til hove“ på den syd for Tumbøl beliggende „Ladegaard“. Men for øvrigt fik han en god undervisning i Tumbøl skole, hvor den gang en kyndig og duelig mand, Niels Jepsen, var lærer.

Jørgen Hansen var en opvakt dreng, og især var han dygtig i regning. Han blev derfor i 13års-alderen udset til at være sin lærer behjælpelig ved et stort og betydningsfuldt arbejde, denne havde påtaget sig: opmålingen og udskiftningen af jorderne i Tumbøl kommune. Niels Jepsen var nemlig i henhold til sine erfaringer overbevist om, at han trygt kunde stole på rigtigheden af sine beregninger, dersom de stemte nöjagtig overens med drengens. Det omtalte arbejde udførtes i årene 1770–72 på en ligefrem mesterlig måde.

Efter konfirmationen gik Jørgen sin fader til hånde ved landbruget. Under udskiftningen af jorderne havde

Hans Jørgensen ved lodtrækning fået sit bol pa Tumbøl nörmark, det såkaldte Slyngsten, og her fik da sönnen, især da den gamle var svagelig, fuldt op at göre med at hjælpe ham både ved genopførelsen af de udflyttede bygninger, omordningen af driften og de sædvanlige landarbejder.

I foråret 1780 afgik Hans Jørgensen ved døden i sit næppe fuldendte 52de levcår, og Jørgen, der var eneste sön, fik da gården. Han var altså, da han blev bolsmand, kun rigelig 22 år gammel, og dertil var forholdene langt fra glimrende. Men han blev en dygtig og vindskibelig landmand: han inddelte sin jord i passende skifter, plantede træer omkring gården, anlagde levende hegn i den åbne mark osv., og ved ihærdigt arbejde og stræng sparsommelighed lykkedes det ham efterhånden at erhverve sig en sikret og sorgfri stilling.

Jørgen Hansen levede længe som ungkarl; han var allerede i sit 42de år, da han giftede sig. Hans hustru, Merret Festersen, var fra den nærmeste nabogård i Slyngsten. De fik tre börn: en sön, Hans Hansen, og to dötre, Marie og Kristine, af hvilke den sidstnævnte imidlertid døde som barn.

Da sönnen var nået op imod myndighedsalderen, overlod faderen gården og dens drift til ham; og gamle Jørgen Hansen levede derpå et roligt og stille liv i endnu næsten en menneskealder. Han afgik ved døden den 22. januar 1849, altsa rigelig 91 år gammel.

Udvortes betragtet var altså Jørgen Hansen i livets færd og den daglige dont en almindelig bonde. Men til gengæld stod han på det åndelige område som en absolut isoleret og i forhold til sine omgivelser kæmpemæssig fremragende skikkelse. Han var i besiddelse af alsidige videnskabelige interesser og havde i flere retninger tilegnet sig grundige indsigter; men især stod hans adhu til *matematikken*, og inden for denne så vanskelige videnskabs udstrakte grænser besad han da også en hartad forbavsende viden.

Mest forbavsende var dog den måde, hvorpå han erhvervede sin store matematiske kyndighed.

Vi har set, at han som dreng var dygtig i *regning* og derfor måtte være sin skolelærer Niels Jepsen behjælpelig ved opmålingen og udskiftningen af jorderne i Tumbøl kommune og navnlig ved de dermed forbundne beregninger. Deraf fremgår det, at han allerede i sit 13de år må have været i besiddelse af en del geometriske kundskaber, og øvelserne ved landmålingsarbejderne har da selvfølgelig tjent til at fæstne og udvide disse. Så meget står fast, at han 14 år gammel var fuldkommen hjemme i *plangeometriens* elementer.

Endvidere blev Jørgen som dreng af sin skolelærer indviet i *bogstavregningens* begyndelsesgrunde og fik således altsa en förste anelse om de tillærte talregningsreglers beviselige rigtighed og langt universellere gyldighed. Det vides med vished, at han inden sin konfirmation var bekendt med den almindelige aritmetiks elementære læresætninger og både med forståelse og færdighed behandlede algebraiske ligninger af förste og anden grad.

Nu var altså interessen vakt, og han tragtede efter at gå videre. Det kan ikke konstateres, om Niels Jepsen har haft matematiske kundskaber nok til at give ham yderligere vejledning; imidlertid er det vel ikke umuligt, at han også har været i stand til at sætte ham ind i de grundlæggende *stereometriske* læresætninger samt i *logaritmernes* og *plan-trigonometriens* teori og anvendelse.

Men ud over dette var den unge Jørgen Hansen henvist til bøger og sin egen skarpsindighed. Een af de bøger, han anskaffede og flittig studerede, havde til titel: „Veiviser i den høiere Regnekonst"; men hvor langt netop denne har bragt ham, kan nu ikke påvises, thi bogen er forsvunden, og jeg kender den ikke. Så meget er imidlertid sikkert, at han forholdsvis tidlig beherskede algebraiske *ligninger af tredie og fjerde grad.*

Ved siden af den rent teoretiske matematik interesserede han sig navnlig for astronomiske problemer. Han lagde sig derfor — igen uden anden end boglig hjælp — efter *sfærisk trigonometri* og anstillede flere astronomiske beregninger. Han anså det ikke for så overmåde vanskeligt at udregne solens og månens formørkelser, hvis man blot havde de nødvendige instrumenter. Desuden har han ladet sig forlyde med, at han ikke var bange for at underkaste sig en styrmandseksamen, selvfølgelig med undtagelse af den navtiske del.

Således var altså Jørgen Hansen allerede i en yngre alder nået frem til at være i besiddelse både af indsigt og øvelse i hele den lavere matematik. Men dette var ham langt fra nok: hans hu stod til höjere viden, og hans opvakte ånd stræbte rastløst videre.

På det geometriske område havde han hidtil kun lært at betragte figurer, der kan konstrueres ved hjælp af lineal og passer. Hvad under, at han snart følte trang til også at blive bekendt med en del af de øvrige kurvers natur og matematiske behandling. Atter uden anden vejledning end bøger begyndte han da at studere den höjere, eller, som den kaldes, *analytiske geometri;* og han lærte nu snart, hvorledes man klæder geometriske störrelser i såkaldte formler og gör dem til genstand for rent aritmetisk beregning.

Ved granskningen af denne metodes ejendommelige beskaffenhed mødte han imidlertid snart en del nye generelle problemer, såsom: at drage tangenter til enhver analytisk defineret kurve, at finde de af sådanne kurver omgrænsede figurers fladefang osv. Han erfarede, at den slags opgaver i deres principielle almindelighed kun kan løses ved hjælp af den videnskab, der kaldes infinitesimalregning eller det uendeliges analyse og deler sig i to discipliner: *differential- og integral-regning.* Han erfarede tillige, at denne var en yderst subtil og i höj grad vanskelig videnskab. Men alligevel gav han sig modig i færd med — udelukkende ved læsning — at sætte sig ind i dens fine principper og mesterlige metoder. Dette studium skal, som naturligt er, i begyndelsen have voldt ham betydelig möje og kostet ham mangen en sövnløs nattetime. Men endelig klaredes begreberne for ham; hans skarpe forstand og energiske vilje bestod deres prøve.

Og på anstrængelsen fulgte så lönnen. Efter möjsommelig at have arbejdet sig op på den stejle, for så mange helt utilgængelige bjærgtinde nød han da nu fra sit ophöjede stade for resten af livet en vid og vidunderlig udsigt. Talrige problemer, han hidtil forgæves havde stirret sig træt på, blev nu som på een gang klart overskuelige, så at han enten med lethed kunde løse dem, eller de viste sig for ham i en anden belysning; og nye opgaver af hidindtil uanet dybde og almindelighed dukkede nu op allevegne og afslørede nye vidunderlige egenskaber både ved tallenes natur og ved störrelserne i rummet.

Jørgen Hansens matematiske udvikling foregik således ikke ad de allermest banede veje. Men så meget des mere beundringsværdigt er derfor da også hans arbejde.

Når man tager i betragtning, at hans tid og tanker fra begyndelsen af kunde synes tilstrækkelig optagne både af de daglige landvæsensarbejder i forbindelse med de nødvendige omordninger og af en del, ved de vanskelige forhold forårsagede bekymringer, må det unægtelig vække forundring, at han allerede i en forholdsvis yngre alder, og dertil ved selvundervisning, var nået til en dybere indsigt i hele den lavere matematik, end der bibringes flertallet af vore latinskolers ældste elever.

Men hans senere avtodidaktiske udvikling i höjere matematisk retning er ligefrem fænomenal. Hvilke uhyre vanskeligheder og hvilket overvældende arbejde i særdeleshed selvstudiet af differential- og integralregning må have forvoldt ham, vil ikke-matematikere bedst få en anelse om ved at læse en udtalelse af den tyske matematiker H. B. Lübsen; han skriver nemlig som indgangsord til sin „Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung“ følgende:

„Ingen af de matematiske videnskaber har voldt begynderne så mange vanskeligheder eller foranlediget så mangfoldige lærde stridigheder om deres evidens som den af de store tænkere Newton og Leibnitz opfundne differential- og integralregning, ... den höjeste og skönneste af samtlige matematiske videnskaber, men i virkeligheden ogsaa den vanskeligste både at meddele og at tilegne sig, hvad der allerede fremgår af den omstændighed, at der iblandt ti, som studerer den, næppe er een, som lærer at forstå den, og endnu langt færre, som lærer at anvende den selvstændig.“

Iøvrigt er det selvfølgelig kun matematikere af faget, der virkelig vil kunne vurdere Jørgen Hansens gigantiske arbejde efter fortjeneste.

I matematisk henseende var Jørgen Hansen med sin omfattende abstraktionsevne ikke des mindre en væsentlig konkret natur. Hvor meget de almindelige teoremer og metoder end fængslede ham, var disse dog ikke hans eneste mål. Mindst lige så meget interesserede han sig for sin videnskabs praktiske anvendelse, og som oftest koncentrerede han hele sin åndskraft netop på løsningen af specielle problemer fra det daglige liv.

På differentialregningens område syslede han meget med de såkaldte maxima- og minimaopgaver, d. v. s. opgaver, der går ud på at finde, under hvilke betingelser en foranderlig störrelse opnår sin störste eller mindste værdi.

Af hensyn til dem iblandt årbøgernes læsere, der ikke har kendskab til den slags opgaver, turde det måske være formålstjenligt at hidsætte enkelte eksempler for at vise, hvor interessante og hvor praktisk vigtige de kan være.

Et par simple *aritmetiske* opgaver er følgende:

1. Tallet 36 skal deles i 2 faktorer, hvis kvadratsum er så lille som muligt. — Beregningen giver til resultat, at de to faktorer begge er $= 6$, og den mindst mulige kvadratsum er altså $6^2 + 6^2$ eller $36 + 36 = 72$.

2. Tallet 12 skal deles således i 3 summander, at produktet af den ene i 1., den anden i 2. og den tredie i 3. potens bliver så stort som muligt. — Det viser sig, at de 3 summander er 2, 4 og 6, og at altså det forlangte störste produkt er $2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$ eller $2 \cdot 16 \cdot 216 = 6912$.

Af specielle *geometriske* opgaver vil jeg nævne et par flere:

1. Blandt alle trekanter, der har samme höjde $h = 4$ og samme omfang $2s = 16$ meter at finde den, der har det störste fladefang. — Resultatet bliver en ligebenet triangel, hvis grundlinie er 6, medens hvert af benene er 5 meter; eller i almindelighed: grundlinien er $= \frac{s^2 - h^2}{s}$ og hvert af benene $= \frac{s^2 + h^2}{2s}$.

2. Ind i et firkantet tårn, hvis dybde er 6,4 meter, vil man bringe en bjælke, der er 12,5 meter lang. Hvilken höjde må tårnets dör i det mindste have, for at dette kan ske, når der forudsættes, at sidebevægelser af bjælken er udelukkede? — Facit: Dören ma være mindst 2,7 meter höj

3. En gård ligger ved en sø, hvis bred i nærheden danner en lige linie. Stuehuset og staldbygningen ligger ikke lige langt fra søen, idet den korteste afstand fra stuehusdören til søen er 80, men fra stald-

dören til søen kun 30 skridt. Da ejeren af gården tit må fra stuehuset hen til søen for dèr fra at bringe vand til stalden, har han interesse af at vide, på hvilket punkt af søbredden han skal hente vandet for at göre sig vejen så kort som muligt. Han måler afstanden mellem de to punkter, hvor de lodrette linier fra stuehusdören og stalddören til søbredden skærer denne, og finder, at den netop er 100 skridt. Hvor er det gunstigste sted at tage vandet? — Ved hjælp af differentialregningen finder man, at det søgte punkt ligger 60 skridt fra det sted, hvor den lodrette linie fra stuehusdören til søbredden træffer denne (eller altså 40 skridt fra det sted, hvor den fra stalddøren fældte lodrette linie træffer søen). I almindelighed findes den regel, at tilgangsvinkelen må være lig fragangsvinkelen. — Tænker vi os i stuehusdören en lyskilde og i stalddören et öje samt langs med søbredden en lodret på jorden oprejst spejlende flade, vil lyset for at nå over spejlet til öjet slå ind på nöjagtig den selvsamme vej, som ved regningen viser sig at være den gunstigste for manden. Lyset går nemlig ved spejlingen altid, og lige så hurtigt som sikkert, den korteste vej.

4. En fisker befinder sig i sin båd $^3/_4$ mil fra det nærmeste punkt af kysten, der på en længere strækning danner en lige linie. På et andet sted ved kysten, $^5/_4$ mil fra det förstnævnte punkt af denne, er hans hus beliggende. Han ønsker nu at nå til sit hjem i den kortest mulige tid. Spörgsmålet er derfor: Hvor skal han lande for at opnå dette, når han véd, at han kan trave $^5/_4$, men kun ro 1 mil i timen. — Svaret lyder: Han skal lande $^1/_4$ mil fra sit hjem.

Endelig skal der også anføres et par eksempler på *fysisk-geometriske* opgaver af den omhandlede art:

1. Af en rund træstamme, hvis tværmål er $^3/_4$ meter, skal der udsaves en bjælke af störst mulig bærekraft. Hvor bred og hvor höj bliver bjælken? — Efter mekanikkens love er den relative styrke afhængig af bredden multipliceret med höjdens kvadrat. Under hensyn hertil bliver den omhandlede bjælke 43,3 centimeter bred og 61,2 centimeter höj eller nöjagtigt: $^3/_4 \sqrt{^1/_3}$ meter bred og $^3/_4 \sqrt{^2/_3}$ meter höj. — Den geometriske konstruktion kan derefter udføres med lethed: Man markerer

nemlig på stammens grundflade en diameter, deler denne i 3 lige store dele og oprejser i de to delingspunkter lodrette linier, til de træffer stammens periferi; derved får man 2 punkter, der sammen med diameterens endepunkter bestemmer grundfladen af den bjælke, som har den största relative kohæsionskraft.

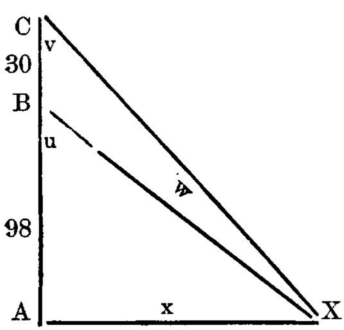
2. Midt over et stort rundt bord med en radius af 2 meter er der anbragt en vertikalt bevægelig lampe. I hvilken höjde over bordet må dennes flamme befinde sig, for at netop den yderste kant af bordpladen kan få den stærkest mulige belysning? — Under hensyn til den optiske lov, at lysets relative intensitet er direkte proportional med indfaldsvinkelens *sinus* og omvendt proportional med afstandens kvadrat, må lyskilden anbringes $2\sqrt{1/2}$ eller $\sqrt{2} = 1{,}4142$ meter over bordpladens centrum.

Det var altså den slags praktiske opgaver, gamle Jørgen Hansen i særdeleshed yndede at give sig i lag og få bugt med. Og på grund af sådanne opgavers og deres resultaters almindelige forståelighed var det desuden fornemmelig dem, han i ny og næ kunde omtale overfor videlystne pårørende og naboer; men selve beregningerne havde selvfølgelig ingen af disse så meget som et gran af forståelse for.

Blandt de således af den gamle ved lejlighed fremdragne maxima- og minima-opgaver var der imidlertid atter hovedsagelig tre, der åbenbart hørte til hans særlige yndlingsproblemer; og disse må det være mig tilladt at göre til genstand for nærmere betragtning: dels for at vise de ikke matematikkyndige blandt læserne, hvor overordentlig vidtløftig løsningen af sådan en opgave ofte kan være, og dels for at henlede fagmænds opmærksomhed på, at det selv på differentialregningens område langt fra så lige var de letteste spörgsmal alene, vor sønderjyske bonde var mand for at magte.

Disse tre opgaver og deres løsninger lyder da således:

I. På en horisontal slette står der et rundt tårn, der er 32 fod i diameter og fra jorden til spidsen af spiret har en höjde af 103 fod. Fra dets øverste punkt rager der en 30 fod lang stang i vejret. Spörgsmålet er nu: I hvilken afstand fra tårnets mur må en mand stille sig ude på sletten, for at den omtalte stang fremtræder for hans blik i sin störst mulige længde? Der forudsættes, at mandens öje befinder sig 5 fod over jorden.



Kalder vi tårnets midtpunkt i jævnhöjde med mandens öje (altså 5 fod over jorden) A, spidsen af spiret B og den øverste ende af stangen C samt det punkt, hvor öjet befinder sig, når stangen synes störst mulig, X, så er

$$AB = 103 - 5 = 98 \text{ fod},$$
$$AC = 98 + 30 = 128 \text{ fod};$$

og sætter vi

$$AX = x,$$
$$\text{vinkel } ABX = u,$$
$$\text{vinkel } ACX = v,$$

får vi umiddelbart

$$\frac{x}{98} = \text{tang } u$$

$$\frac{x}{128} = \text{tang } v$$

Sætter vi endvidere

$$\text{vinkel } BXC = w,$$

er det indlysende, at

$$w = u - v$$

og altså

$$\text{tang } w = \text{tang } (u - v)$$

eller

$$\text{tang } w = \frac{\text{tang } u - \text{tang } v}{1 + \text{tang } u \cdot \text{tang } v}.$$

Substituerer vi heri de ovenstående værdier for tang u og tang v, får vi

$$\text{tang } w = \frac{\frac{x}{98} - \frac{x}{128}}{1 + \frac{x}{98} \cdot \frac{x}{128}}$$

eller

$$\text{tang } w = \frac{30\,x}{12544 + x^2}.$$

Da nu w er synsvinkelen, der skal være maximum, og da den trigonometriske tangent jo vokser samtidig med vinkelen, kan vi uden videre søge maximum for

$$f = \text{tang } w$$

Vi danner altså de to förste differentialkvotienter af

$$f = \frac{30\,x}{12544 + x^2}$$

med hensyn til x og får

$$\frac{df}{dx} = \frac{(12544 + x^2) \cdot 30 - 30\,x \cdot 2\,x}{(12544 + x^2)^2}$$

eller

$$\frac{df}{dx} = \frac{30\,(12544 - x^2)}{(12544 + x^2)^2}$$

og altså

$$\frac{d^2 f}{d\,x^2} = \frac{(12544 + x^2) \cdot (-\,60\,x) - 30\,(12544 - x^2) \cdot 4\,x}{(12544 + x^2)^3}$$

Sætter vi nu förste differentialkvotient

$$\frac{df}{dx} = 0,$$

får vi altså, idet vi multiplicerer med $(12544 + x^2)^2$ og dividerer med 30 på begge sider:

$$12544 - x^2 = 0,$$
$$x^2 = 12544,$$
$$x = 112\,.$$

Sætter vi denne værdi ind i anden differentialkvotient, får vi

$$\frac{d^2 f}{d x^2} = \frac{(12544 + 12544)\;(-60 \cdot 112)}{(12544 + 12544)^3},$$
$$\frac{d^2 f}{d x^2} = -\frac{15}{112^3}, \text{ altså negativ,}$$

så at $x = 112$ giver et maximum.

Da tårnets diameter er 32 og altsaa dets radius 16 fod, må manden stå 112 — 16 eller

96 fod fra tarnets mur,

for at stangen kan synes ham så stor som muligt

For at finde den pågældende maksimale synsvinkels störrelse substituerer vi værdien $x = 112$ i ligningen

$$\text{tang } w = \frac{30\,x}{12544 + x^2}$$

og får derved uden videre

$$\text{tang } w = \frac{30 \cdot 112}{2 \cdot 112^2}$$

eller altså

$$\text{tang } w = \frac{15}{112}.$$

Deraf følger endvidere

$$\log \text{tang } w = \log 15 - \log 112,$$
$$\log \text{tang } w = 1{,}1760913 - 2{,}0492180,$$
$$\log \text{tang } w = 9{,}1268733 - 10$$

og altså

$$w = 7^{\circ}\; 37'\; 41'',_{8}$$

Vi kan let kontrolere, om den fundne værdi af w i virkeligheden er den maksimale synsvinkel, ved at gå en fod til hver side af X. Sætter vi f. eks.

$$x = 111$$

ind i ligningen for tang w, får vi

$$\text{tang } w = \frac{30 \cdot 111}{12544 + 12321},$$

$$\text{tang } w = \frac{666}{4973},$$

$$\log \text{tang } w = \log 666 - \log 4973,$$

$$\log \text{tang } w = 2{,}8234742 - 3{,}6966185,$$

$$\log \text{tang } w = 9{,}1268557 - 10 \text{ og altså}$$

$$w = 7^\circ\ 37'\ 40'',_2.$$

Sætter vi derimod på den anden side

$$x = 113$$

ind i samme ligning, får vi

$$\text{tang } w = \frac{30 \cdot 113}{12544 + 12769} \text{ eller}$$

$$\text{tang } w = \frac{3390}{25313},$$

$$\log \text{tang } w = \log 3390 - \log 25313,$$

$$\log \text{tang } w = 3{,}5301997 - 4{,}4033436,$$

$$\log \text{tang } w = 9{,}1268561 - 10 \text{ og altså}$$

$$w = 7^\circ\ 37'\ 40'',_3.$$

Vi har saaledes, nár vi stiller resultaterne sammen:

$$\begin{cases} \text{for } x = 111 : \text{tang } w = \dfrac{666}{4973} = 0{,}13392\,319, \\ \quad\text{„}\ \ x = 112 : \text{tang } w = \dfrac{15}{112} = 0{,}13392\,858, \\ \quad\text{„}\ \ x = 113 : \text{tang } w = \dfrac{3390}{25313} = 0{,}13392\,328, \end{cases}$$

eller udtrykt i grader:

$$\begin{cases} \text{for } x = 111 : w = 7^\circ\ 37'\ 40'',_2, \\ \quad\text{„}\ \ x = 112 : w = 7^\circ\ 37'\ 41'',_3, \\ \quad\text{„}\ \ x = 113 : w = 7_0\ 37'\ 40'',_8 \end{cases}$$

Deraf ses det altså, at synsvinkelen ved $x = 112$ er på det nærmeste 1 sekund större end både ved $x = 111$ og $x = 113$.

II. En mand bestiller hos en guldsmed et bæger, der skal indeholde nöjagtig ½ pot, men hvis indre flade skal være så lille som muligt, da det er hensigten at lade den forgylde. Hvilken form og hvilke dimensioner må bægeret have for at opfylde disse betingelser?

1. Tænker vi os bægeret i form af en cylinder og kalder dets radius r og dets höjde h, er dets indre flade

$$1)\ f = 2\,r\,\pi\,h + r^2\,\pi,$$

medens vi for dets indhold får ligningen

$$2)\ r^2\,\pi\,h = 27,$$

da 1 pot = 54, altså ½ pot = 27 kubiktommer. Af 2) fremgår:

$$3)\ h = \frac{27}{r^2\,\pi},$$

og når vi substituerer denne værdi i 1), får vi

$$4)\ f = \frac{54}{r} + r^2\,\pi.$$

For nu at göre f til et minimum differentierer vi denne funktion af r med hensyn til r og sætter differentialkvotienten = 0. Vi får:

$$5)\ \frac{df}{dr} = -\frac{54}{r^2} + 2\,r\,\pi$$

og altså

$$-\frac{54}{r^2} + 2\,r\,\pi = 0$$

eller

$$2\,r^3\,\pi = 54,$$

hvoraf det fremgaar, at

$$6)\ r = 3\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\,.$$

Ved at substituere denne værdi i 3 får vi

$$h = \frac{27}{9\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}\cdot\pi} = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}},$$

$$h = 3\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}},$$

så at vi alsà har

$$7)\ h = r.$$

Indsætter vi endelig værdierne 6) og 7) i 1), får vi for minimum af f:

$$f = 2\,r^2\,\pi + r^2\,\pi,$$

$$f = 3\,r^2\,\pi,$$

$$f = 3\left\{3\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right\}^2\pi$$

$$f = 27\sqrt[3]{\pi}\ .$$

Da nu $\pi = 3,14159265$ og altså

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0,6827841,$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1,46459189,$$

får vi for de søgte störrelser følgende værdier:

$$9)\ r = h = 2,0483523 \text{ tommer}$$

$$10)\ f = 39,54398103 \text{ kvadrattommer}$$

At den sidstnævnte værdi er et minimum og ikke et maximum, er egentlig umiddelbart indlysende, men det fremgår også let ved beregning. Danner vi nemlig i henhold til ligning 5) anden differentialkvotient af f med hensyn til r, får vi

$$\frac{d^2f}{dr^2} = -\frac{-54\cdot 2\,r}{r^4} + 2\,\pi$$

eller

$$\frac{d^2f}{dr^2} = 2\left\{\frac{54}{r^3} + \pi\right\}.$$

Vi har altsa uden videre, da bade r og π er positive,

$$\frac{d^2f}{dr^2} = +$$

og altsa

$$f = \text{minimum}.$$

2. Antager vi, at bægeret har form af en omvendt lige kegle, og sætter, som ved cylinderen, grundfladens radius — r og höjden — h samt desuden længden af sidelinien — s, får vi for kvadratindholdet af den indre flade

$$1)\ f = r\,\pi\,s,$$

medens vi for bægerets kubikindhold har ligningen

$$2)\ \tfrac{1}{3}\,r^2\,\pi\,h - 27$$

og mellem h, r og s relationen

$$3)\ s^2 = h^2 + r^2.$$

Da en positiv störrelse jo vokser og aftager med sit kvadrat, kan vi uden videre søge minimum for

$$F = f^2$$

eller altså for

$$4)\ F - r^2\,\pi^2\,s^2.$$

Ifølge 2) er

$$5)\ r^2 = \frac{81}{\pi\,h}.$$

Indsætter vi denne værdi i 3), får vi

$$6)\ s^2 = h^2 + \frac{81}{\pi\,h},$$

og substituerer vi derpå værdierne for r^2 og s^2 i 4), har vi

$$F - \frac{81}{\pi\,h}\cdot\pi^2\left\{h^2 + \frac{81}{\pi\,h}\right\}$$

eller

$$7)\ F - 81\left\{\pi\,h + \frac{81}{h^2}\right\}.$$

Det er altsa denne funktion af h, der skal göres til et minimum. Vi differentierer derfor F med hensyn til h og far

$$\frac{dF}{dh} = 81\left\{\pi - \frac{81 \cdot 2h}{h^4}\right\},$$

$$8)\quad \frac{dF}{dh} = 81\left\{\pi - \frac{2 \cdot 81}{h^3}\right\}.$$

Sætter vi denne differentialkvotient $= 0$, altså

$$81\left\{\pi - \frac{2 \cdot 81}{h^3}\right\} = 0,$$

bliver

$$\pi h^3 = 2 \cdot 81$$

eller

$$h^3 = \frac{2 \cdot 81}{\pi}$$

og altså

$$9)\quad h = 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

For at finde r sætter vi denne værdi af h ind i ligning 5), der lød:

$$r^2 = \frac{81}{\pi h}.$$

Derved får vi altså

$$r^2 = \frac{81}{3\pi\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}} = \frac{27}{\pi\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}}$$

$$r^2 = 9\sqrt[3]{\frac{27}{6\pi^2}} = 9\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}},$$

$$10)\quad r = 3\sqrt[3]{\frac{\;}{\pi\sqrt[3]{2}}}$$

For endvidere at finde s substituerer vi værdierne af r og h i ligning 3), der lød:

$$s^2 = r^2 + h^2,$$

og får derved

$$s^2 = 9\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}} + 9\sqrt[3]{\frac{36}{\pi^2}},$$

$$s^2 \quad 9\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}} + 18\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}}$$

$$s^2 = 27\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}}$$

og altså

$$11)\ s = 3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3}{\pi\sqrt{2}}}\ .$$

Kvadraterne af de fundne værdier for r, h og s står, som det ses, i et simpelt forhold til hverandre, idet nemlig

$$r^2 : h^2 : s^2 = 9\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}} : 18\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}} : 27\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi^2}}$$

eller altså

$$r^2 : h^2 : s^2 = 1 : 2 : 3.$$

Når derfor vinkelen mellem h og s kaldes v, faes umiddelbart bl. a.:

$$12)\ \text{tang}\ v = \frac{r}{h} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Udförer vi beregningerne af rodstörrelserne etc., finder vi först i henhold til ligning 9):

$$\log h = \log 3 + \frac{1}{3}(\log 6 - \log \pi),$$

$$\log h = 0{,}4771213 + \frac{1}{3}(0{,}7781513 - 0{,}4971499),$$

$$\log h = 0{,}5707884,$$

$$13)\ h = 3{,}7221034 \text{ tommer.}$$

Endvidere har vi ifølge 10):

$$\log r = \log 3 + \frac{1}{3}(\log 3 - \log \pi - \frac{1}{2}\log 2),$$

$$\log r = 0{,}4771213 + \frac{1}{3}(0{,}4771213 - 0{,}4971499$$
$$- \frac{1}{2}\cdot 0{,}3010300),$$

$$\log r = 0{,}4202734,$$

$$14)\quad r = 2{,}631924 \text{ tommer}.$$

På tilsvarende måde haves i henhold til 11):

$$\log s = \log 3 + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{3}(\log 3 - \log \pi - \frac{1}{2}\log 2),$$

$$\log s = 0{,}4771213 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}4771213$$

$$+ \frac{1}{3}\,(0{,}4771213 - 0{,}4971499 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}3010300),$$

$$\log s = 0{,}6588340,$$

$$15)\quad s = 4{,}5586263 \text{ tommer}.$$

Endelig er ifølge 12 :

$$\log \operatorname{tang} v = \frac{1}{2}\log 0{,}5,$$

$$\log \operatorname{tang} v = \frac{1}{2}(0{,}6989700 - 1),$$

$$\log \operatorname{tang} v = 9{,}8494850 - 10,$$

$$16)\quad v = 35^\circ\ 15'\ 51'',_8.$$

Vinkelen ved bægerets bund er altså

$$2v = 70^\circ\ 31'\ 43'',_6.$$

Der er jo imidlertid endnu tilbage at finde værdien af f. Vi havde efter ligning 1):

$$f = r\,\pi\, s.$$

Deraf følger umiddelbart

$$\log f = \log r + \log \pi + \log s,$$

eller, når vi substituerer de ovenfor fundne værdier af de pågældende logaritmer:

$$\log f = 0{,}4202734 + 0{,}4971499 + 0{,}6588340,$$

$$\log f = 1{,}5762573$$

og altså

$$17)\quad f = 37{,}692704 \text{ kvadrattommer}.$$

At denne værdi er et minimum og ikke et maximum, turde være umiddelbart indlysende; men det viser sig også straks, når man differentierer 8), d. v. s:

$$\frac{dF}{dh} = 81\left\{\pi - \frac{2\cdot 81}{h^3}\right\}$$

nok engang med hensyn til h. Vi får da

$$\frac{d^2 F}{d h^2} = 81 \cdot \frac{2 \cdot 81 \cdot 3 h^2}{h^6},$$

$$\frac{d^2 F}{d h^2} = \frac{6 \cdot 81^2}{h^4},$$

og deraf fremgår selvfølgeliglig

$$\frac{d^2 F}{d h^2} = +,$$

$$F \text{ resp. } f = \text{m i n i m u m}.$$

3. Tænker vi os bægeret som en keglestub med den mindre cirkelflade som bund og sætter dennes radius $= \varrho$, radien af bægerets rand $= r$, dets indre flade $= f$, dets höjde $= h$, dets sidelinie $= s$ og vinkelen mellem h og $s = v$, får vi som grundlag 4 ligninger: vi har for den indre overflade

$$(1)\ f = \pi s (r + \varrho) + \pi \varrho^2$$

og for kubikindholdet

$$(2)\ \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r \varrho + \varrho^2) = 27$$

samt desuden de to relationer

$$(3)\ r - \varrho = s \sin v \text{ og}$$

$$(4)\ h = s \cos v,$$

eller når vi substituerer (4) i (2):

$$1)\ f = \pi s (r + \varrho) + \pi \varrho^2,$$

$$2)\ f_1 \equiv \pi s \cos v (r^2 + r \varrho + \varrho^2) - 81 = 0,$$

$$3)\ f_2 \equiv r - \varrho - s \sin v = 0.$$

I dette tilfælde vil det være lettest at anvende den af den tyske matematiker Gauss i året 1829 meddelte og derfor af gamle Jørgen Hansen sandsynligvis kendte metode, der går ud på følgende:

Når en funktion f indeholder n viriable x_1, x_2, x_3, ... x_n, mellem hvilke der består m betingelsesligninger $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, ... $f_m = 0$ (hvor $m < n$), danner man funktionen

$$F = f + k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + \cdots + k_m f_m$$

og søger at bestemme dennes maxima og minima. Betingelserne herfor er angivne ved følgende system af $m + n$ ligninger:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \cdots f_m = 0,$$

hvoraf de $m + n$ ubekendte $x_1, x_2 \cdots x_n, k_1, k_2 \cdots k_m$ lader sig beregne.

I vort specielle tilfælde er funktionen F, når vi i stedet for k_1 og k_2 indfører p og q:

$$F = \pi s (r + \varrho) + \pi \varrho^2 + p \pi s (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v - 81 p + q (r - \varrho - s \sin v)$$

Differentierer vi F partielt med hensyn til r, ϱ, s og v, får vi

$$4) \quad \frac{\partial F}{\partial r} = \pi s + p \pi s (2 r + \varrho) \cos v + q,$$

$$5) \quad \frac{\partial F}{\partial \varrho} - \pi s + 2 \pi \varrho + p \pi s (r + 2 \varrho) \cos v - q,$$

$$6) \quad \frac{\partial F}{\partial s} = \pi (r + \varrho) + p \pi (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v - q \sin v,$$

$$7) \quad \frac{\partial F}{\partial v} = - p \pi s (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \sin v - q s \cos v,$$

så at vi altså har følgende 6 ligninger:

$$\text{I}, \ \pi s + p \pi s (2 r + \varrho) \cos v + q = 0,$$

$$\text{II}, \ \pi s + 2 \pi \varrho + p \pi s (r + 2 \varrho) \cos v - q = 0,$$

$$\text{III}, \ \pi (r + \varrho) + p \pi (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v - q \sin v = 0,$$

$$\text{IV}, \ - p \pi (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \sin v - q \cos v = 0,$$

$$\text{V}, \ \pi s (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v - 81 = 0,$$

$$\text{VI}, \ r - \varrho - s \sin v = 0.$$

Heraf eliminerer vi q ved at danne I + II, I sin v + III og I cos v + IV. Vi får på denne måde:

$$8) \ 2 s + 2 \varrho + 3 p s (r + \varrho) \cos v = 0,$$

$$9)\ (r + \varrho) + s \sin v + p\, s\, (2 r + \varrho) \sin v \cos v$$
$$+ p\, (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v = 0,$$

$$10)\ s \cos v + p\, s\, (2 r + \varrho) \cos^2 v$$
$$- p\, (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \sin v = 0,$$

$$11)\ \pi\, s\, (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v - 81 = 0,$$

$$12)\ s = \frac{r - \varrho}{\sin v}.$$

Substituerer vi 12) i 8), 9), 10) og 11) og multiplicerer samtidig 8), 10) og 11) med sin v, får vi:

$$13)\ 2 (r - \varrho) + 2 \varrho \sin v + 3 p\, (r - \varrho)\, (r + \varrho) \cos v = 0,$$

$$14)\ (r + \varrho) + (r - \varrho) + p\, (r - \varrho)\, (2 r + \varrho) \cos v$$
$$+ p\, (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v = 0,$$

$$15)\ (r - \varrho) \cos v + p\, (r - \varrho)\, (2 r + \varrho) \cos^2 v$$
$$- p\, (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \sin^2 v = 0,$$

$$16)\ \pi\, (r - \varrho)\, (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v - 81 \sin v = 0$$

Af 14) følger:

$$2 r + 3 p\, r^2 \cos v = 0,$$
$$2 + 3 p\, r \cos v = 0,$$
$$p = - \frac{2}{3 r \cos v}.$$

Denne værdi substituerer vi i 13) og 15) og multiplicerer samtidig 13) med $\frac{1}{2}$ r og 15) med 3 r cos v; vi får da under tilföjelse af 16):

$$17)\ r (r - \varrho) + r \varrho \sin v - (r - \varrho)\, (r + \varrho) = 0$$

$$18)\ 3 r (r - \varrho) \cos^2 v - 2 (r - \varrho)\, (2 r + \varrho) \cos^2 v$$
$$+ 2 (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \sin^2 v = 0,$$

$$19)\ \pi\, (r - \varrho)\, (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \cos v - 81 \sin v = 0,$$

eller når vi udfører multiplikationerne:

$$20)\ r - r \sin v - \varrho = 0,$$

$$21)\ 2 (r^2 + r \varrho + \varrho^2) \sin^2 v - (r^2 + r \varrho - 2 \varrho^2) \cos^2 v = 0,$$

$$22)\ \pi\, (r^3 - \varrho^3) \cos v - 81 \sin v = 0.$$

Af ligning 20) følger:

$$20a)\ \varrho = r\, (1 - \sin v).$$

Substituerer vi denne værdi af ϱ i 21) og 22), får vi

23) $2\,[r^2 + r^2\,(1 - \sin v) + r^2\,(1 - \sin v)^2]\,\sin^2 v$
$- (r^2 + r^2\,(1 - \sin v) - 2r^2\,(1 - \sin v)^2]\,\cos^2 v = 0,$

24) $\pi\,[r^3 - r^3\,(1 - \sin v)^3]\,\cos v - 81\,\sin v = 0.$

Af 23) følger

$$2\,(3 - 3\,\sin v + \sin^2 v)\,\sin^2 v$$
$$- (3\,\sin v - 2\,\sin^2 v)\,\cos^2 v = 0,$$

eller, da $\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$:

$$(6 - 6\,\sin v + 2\,\sin^2 v)\,\sin^2 v$$
$$- (3\,\sin v - 2\,\sin^2 v - 3\,\sin^3 v + 2\,\sin^4 v) = 0,$$

eller altsaa

$$3\,\sin^3 v - 8\,\sin^2 v + 3\,\sin v = 0$$

eller endelig

$$(3\,\sin^2 v - 8\,\sin v + 3)\,\sin v = 0.$$

Denne ligning er tilfredsstillet, når een af de to faktorer er $= 0$. Er

$$\sin v = 0 \text{ og altså}$$
$$v = 0,$$

får vi en lige cylinder, hvilket tilfælde vi jo har undersøgt under 1. Vi undersøger derfor nu

$$3\,\sin^2 v - 8\,\sin v + 3 = 0$$

eller, idet vi dividerer med 3:

$$\sin^2 v - \frac{8}{3}\,\sin v = -1,$$

$$\left\{\sin v - \frac{4}{3}\right\}^2 = \left\{\frac{4}{3}\right\}^2 - 1 = \frac{7}{9},$$

$$\sin v = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{7}{9}},$$

eller da sinus ikke kan være >1:

$$\sin v = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

eller altså endelig

25) $\sin v = \frac{1}{3}\,(4 - \sqrt{7})$

Da nu $\sqrt{7} = 2{,}6457513$, får vi

$$\sin v = 0{,}4514162,$$
$$\log \sin v = 0{,}65457715 - 1,$$
$$25a)\quad v = 26^\circ\ 50'\ 4'',_5.$$

Vi vender nu tilbage til ligning 24):

$$\pi\ r^3\ [1 - (1 - \sin v)^3] \cos v - 81 \sin v = 0$$

eller, idet vi dividerer med cos v:

$$26)\quad \pi\ r^3\ [1 - (1 - \sin v)^3] - 81 \operatorname{tang} v = 0.$$

Da nu $1 - \sin v = 0{,}5485838$ og altsaa

$$\log (1 - \sin v)^3 = 3 \log 0{,}5485838,$$
$$\log (1 - \sin v)^3 = 0{,}2177290 - 1,$$

bliver

$$(1 - \sin v)^3 = 0{,}165093,$$

og når vi sætter denne værdi ind i 26), får vi

$$\pi\ r^3 \cdot 0{,}834907 - 81 \operatorname{tang} v = 0$$

eller altså:

$$r^3 = \frac{81 \operatorname{tang} v}{0{,}834907\ \pi},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{81 \operatorname{tang} v}{0{,}834907\ \pi}},$$

$$\log r = \frac{1}{3} [\log 81 + \log \operatorname{tang} v - \log 0{,}834907 - \log \pi],$$

$$\log r = \frac{1}{3} [1{,}9084850 + (0{,}70405969 - 1)$$
$$- (0{,}92163814 - 1) - 0{,}4971499],$$

$$\log r = \frac{1}{3} \cdot 1{,}19375665,$$

$$\log r = 0{,}397918883,$$

$$27)\quad r = 2{,}4998785 \text{ tommer.}$$

For endvidere at finde ϱ benytter vi ligningen 20a):

$$\varrho = r\ (1 - \sin v),$$
$$\varrho = 0{,}5485838\ r,$$
$$\log \varrho = \log 0{,}5485838 + \log r,$$
$$\log \varrho = (0{,}7392430 - 1) + 0{,}397918883,$$

$$\log \varrho = 0{,}137161883,$$

$$28)\ \varrho = 1{,}371393 \text{ tommer.}$$

Længden af sidelinien s fremgår uden videre af ligning 12):

$$s = \frac{r - \varrho}{\sin v}$$

eller, da $\varrho = r\,(1 - \sin v)$:

$$s = \frac{r - r\,(1 - \sin v)}{\sin v}$$

og altså

$$29)\ s = r.$$

Endelig får vi h af ligning (4):

$$h = s \cos v$$

eller, da jo $s = r$:

$$h = r \cos v,$$

$$\log h = \log r + \log \cos v,$$

$$\log h = 0{,}397918883 + 0{,}950517485 - 1,$$

$$\log h = 0{,}348436368,$$

$$30)\ h = 2{,}230675 \text{ tommer.}$$

For så endnu at finde den flade, der i nærværende tilfælde er minimum, går vi tilbage til ligning 1):

$$f = \pi\, s\,(r + \varrho) + \pi\, \varrho^2,$$

eller, da $s = r$:

$$f = \pi\,(r^2 + r\,\varrho + \varrho^2).$$

I henhold til ligning (2) er imidlertid

$$\pi\,(r^2 + r\,\varrho + \varrho^2) = \frac{81}{h}$$

og altså

$$f = \frac{81}{h},$$

$$f = \frac{81}{2{,}230675},$$

$$31)\ f = 36{,}3118787 \text{ kvadrattommer.}$$

Det ses altså, at beregningen i dette tilfælde er temmelig omstændelig.

4. Endelig vil vi antage, at bægeret har form af en kuglekalot. Sætter vi da den pågældende kugles radius $= r$, kalottens höjde $= h$ og den indre flade atter $= f$, får vi følgende grundligninger: for fladen, der skal være minimum, får vi

$$1)\ f = 2\,r\,\pi\,h$$

og for kubikindholdet

$$\frac{1}{3}\pi\,h^2\,(3\,r - h) = 27$$

eller

$$2)\ \pi\,h^2\,(3\,r - h) = 81.$$

Sætter vi nu

$$\varphi \equiv \pi\,h^2\,(3\,r - h) - 81 = 0$$

og danner funktionen

$$F = f + p\,\varphi,$$

får vi altså

$$3)\ F = 2\,r\,\pi\,h + p\,\pi\,h^2\,(3\,r - h) - 81\,p.$$

Denne funktion differentierer vi partielt med hensyn til r og h og får da de 2 ligninger

$$4)\ \frac{\partial F}{\partial r} = 2\,\pi\,h + 3\,p\,\pi\,h^2,$$

$$5)\ \frac{\partial F}{\partial h} = 2\,\pi\,r + 3\,p\,\pi\,h\,(2\,r - h).$$

Sætter vi disse $= 0$, har vi

$$2\,\pi\,h + 3\,p\,\pi\,h^2 = 0,$$

$$2\,\pi\,r + 3\,p\,\pi\,h\,(2\,r - h) = 0,$$

eller altså

$$6)\ 2 + 3\,p\,h = 0$$

$$7)\ 2\,r + 3\,p\,h\,(2\,r - h) = 0.$$

Af ligning 6) følger

$$3\,p\,h = -2,$$

og når vi substituerer denne værdi i 7), får vi

$$2\,r - 2\,(2\,r - h) = 0,$$

$$r - 2\,r + h = 0,$$

$$8)\ h = r,$$

det vil sige, at bægeret må være en halvkugle.

For at finde, hvor stor radien af denne halvkugle er, substituerer vi $h = r$ i 2), d. v. s. i

$$\pi\, h^2\,(3\,r - h) = 81,$$

og får derved

$$2\,\pi\, r^3 = 81,$$

$$r^3 = \frac{81}{2\,\pi},$$

$$9)\ r = 3\sqrt[3]{\frac{3}{2\,\pi}}.$$

Da som følge deraf altså

$$\log r = \log 3 + \frac{1}{3}(\log 3 - \log 2 - \log \pi),$$

$$\log r = 0{,}4771213 + \frac{1}{3}(0{,}4771213 - 0{,}3010300 - 0{,}4971499),$$

$$\log r = 0{,}3701018,$$

$$10)\ r — 2{,}3447784 \text{ tommer.}$$

Endelig er i henhold til 1):

$$f — 2\,r\,\pi\,h,$$

eller, da $h = r$:

$$f = 2\,r^2\,\pi,$$

$$\log f = \log 2 + 2 \log r + \log \pi,$$

$$\log f = 0{,}3010300 + 2 \cdot 0{,}3701018 + 0{,}4971499,$$

$$\log f = 1{,}5383835,$$

$$11)\ f = 34{,}544865 \text{ kvadrattommer.}$$

Rekapitulerer vi de vundne resultater, har vi altså følgende mindste overflader: Når bægeret er

1) en cylinder, er $f = 39{,}543981$ kvadrattommer,
2) en kegle, „ $f = 37{,}692704$ „ ,
3) en keglestub, „ $f = 36{,}311879$ „ ,
4) en halvkugle, „ $f = 34{,}544865$ „ .

Deraf ses det umiddelbart, at det halvkugleformede bæger med radius

$$r = 2{,}3447784 \text{ tommer}$$

er det, der opfylder de stillede betingelser absolut.

III. En mand har 4 brædder, hvert på 12 fods længde og 1 fods bredde, hvoraf han vil lave sig en firesidet vandbeholder uden låg. Hvorledes skal dennes form og dimensioner være, for at dens rumfang bliver så stort som muligt?

1. Antager vi först, at vandbeholderen har form af en kasse med lodrette ender og sider, og sætter vi dens længde $= x$, dens bredde $= y$ og dens höjde $= z$, har vi for dens indhold i, som skal göres til et maximum, den ligefremme ligning:

$$1) \quad i = x\,y\,z,$$

medens vi for dens overflade får

$$2) \quad x\,y + 2\,(y\,z + z\,x) = 48,$$

da jo bræddernes samlede flade er $4 \cdot 12 = 48$ kvadratfod. Ligning 2) kan vi også skrive:

$$x\,y + 2\,z\,(x + y) = 48,$$

hvoraf fremgår, at

$$3) \quad z = \frac{48 - x\,y}{2\,(x + y)}.$$

Substituerer vi denne værdi af z i 1), får vi

$$i = x\,y\,\frac{48 - x\,y}{2\,(x + y)}$$

eller altså

$$4) \quad i = \frac{48\,x\,y - x^2\,y^2}{2\,(x + y)}.$$

Differentierer vi nu 4) partielt med hensyn til x og y, får vi

$$5) \quad \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{2\,(x + y)\,(48\,y - 2\,x\,y^2) - (48\,x\,y - x^2\,y^2) \cdot 2}{4\,(x + y)^2},$$

$$6)\ \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{2(x+y)(48x - 2x^2y) - (48xy - x^2y^2)\cdot 2}{4(x+y)^2},$$

og når vi sætter begge disse partielle differentialkvotienter $= 0$ og samtidig multiplicerer på begge sider med $2(x+y)^2$, har vi

$$7)\ (x+y)(48y - 2xy^2) - (48xy - x^2y^2) = 0,$$

$$8)\ (x+y)(48x - 2x^2y) - (48xy - x^2y^2) = 0.$$

Da disse to ligninger er fuldstændig symmetriske med hensyn til x og y, følger nødvendig, at

$$9)\ y = x.$$

Substituerer vi denne værdi i den ene af ligningerne 7) og 8), får vi

$$2x(48x - 2x^3) - (48x^2 - x^4) = 0,$$

$$96x^2 - 4x^4 - 48x^2 + x^4 = 0,$$

$$48x^2 - 3x^4 = 0,$$

$$x^2 = 16,$$

$$10)\ x = 4 \text{ fod}.$$

I henhold til 9) er altså også

$$11)\ y = 4 \text{ fod}.$$

Indsætter vi værdierne 10) og 11) i ligning 3), har vi

$$z = \frac{48 - 16}{2\cdot 8},$$

$$12)\ z = 2 \text{ fod}$$

Da kassens indhold er

$$i = x\,y\,z,$$

får vi altså for dens maksimale rumfang

$$13)\ i = 32 \text{ kubikfod}.$$

At der foreligger et virkeligt maximum, fremgår af følgende beregning.

Udfører vi i 5) og 6) multiplikationerne, får vi

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{48y^2 - x^2y^2 - 2xy^3}{2(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial i}{\partial y} = \frac{48x^2 - x^2y^2 - 2x^3y}{2(x+y)^2},$$

og differentierer vi derpå atter partielt med hensyn til x og y, har vi

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} =$$

$$\frac{2(x+y)^2(-2xy^2-2y^3)-(48y^2-x^2y^2-2xy^3)\cdot 4(x+y)}{4(x+y)^4},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial y^2} =$$

$$\frac{2(x+y)^2(-2x^2y-2x^3)-(48x^2-x^2y^2-2x^3y)\cdot 4(x+y)}{4(x+y)^4},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial y} =$$

$$\frac{2(x+y)^2(96x-2xy^2-6x^2y)-(48x^2-x^2y^2-2x^3y)\cdot 4(x+y)}{4(x+y)^4}$$

Indsættes heri x = y = 4, bliver

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial y} = -1,$$

og vi har derfor

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} - \left\{\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial y}\right\}^2 = 4 - 1 = 3.$$

Betingelsen for et virkeligt maximum eller minimum:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} - \left\{\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial y}\right\}^2 > 0,$$

er altså virkelig opfyldt, og da

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} < 0,$$

har vi et maximum.

2. Tænker vi os dernæst vandbeholderen som et trug med lodrette ender og skrå sider, og sætter vi dens nederste bredde = x, længden = y og höjden = z samt en siduflades bredde = s og differencen mellem beholderens øverste og nederste bredde = 2 t, får vi som grundlag 3 ligninger, nemlig: for beholderens indhold i, der skal göres til et maximum,

$$1)\ i = x\,y\,z + t\,y\,z,$$

for den givne overflade

$$2)\ x\,y + 2\,x\,z + 2\,t\,z + 2\,s\,y = 48$$

og desuden følgende relation mellem s, t og z:

$$3)\ s^2 = t^2 + z^2.$$

Anvender vi Gauss'es metode, idet vi sætter

$$f \equiv i = x\,y\,z + t\,y\,z,$$
$$\varphi \equiv x\,y + 2\,x\,z + 2\,t\,z + 2\,s\,y - 48 = 0,$$
$$\psi \equiv s^2 - t^2 - z^2 = 0$$

og danner funktionen

$$F = f + p\,\varphi + q\,\psi,$$

får vi følgende hovedligning:

$$4)\ F = x\,y\,z + t\,y\,z + p\,(x\,y + 2\,x\,z + 2\,t\,z + 2\,s\,y - 48) + q\,(s^2 - t^2 - z^2).$$

Differentierer vi derpå denne funktion partielt med hensyn til de 5 uafhængige variable x, y, z, s, t, har vi

$$5)\ \frac{\partial F}{\partial x} = y\,z + p\,(y + 2\,z),$$

$$6)\ \frac{\partial F}{\partial y} = x\,z + t\,z + p\,(x + 2\,s),$$

$$7)\ \frac{\partial F}{\partial z} = x\,y + t\,y + p\,(2\,x + 2\,t) - 2\,q\,z,$$

$$8)\ \frac{\partial F}{\partial s} = 2\,p\,y + 2\,q\,s,$$

$$9)\ \frac{\partial F}{\partial t} = y\,z + 2\,p\,z - 2\,q\,t,$$

og ved at sætte disse partielle differentialkvotienter $= 0$ får vi

$$10)\ y\,z + p\,(y + 2\,z) = 0,$$

$$11)\ x\,z + t\,z + p\,(x + 2\,s) = 0,$$

$$12)\ x\,y + t\,y + 2\,p\,(x + t) - 2\,q\,z = 0,$$

$$13)\ p\,y + q\,s = 0,$$

$$14)\ y\,z + 2\,p\,z - 2\,q\,t = 0.$$

For af disse 5 ligninger samt de 2 betingelsesligninger 2) og 3) at finde de 7 ubekendte x, y, z, s, t, p, q kan vi gå frem på følgende måde. Vi subtraherer först 14) fra 10) og har da

$$15)\ p\,y + 2\,q\,t = 0.$$

Af 13) og 15) følger da uden videre, at

$$q\,s = 2\,q\,t$$

og altså, at

$$16)\ s = 2\,t.$$

Substituerer vi denne værdi i 3), får vi

$$4\,t^2 = t^2 + z^2,$$

$$3\,t^2 = z^2,$$

$$17)\ z = \sqrt{3}\,t.$$

Indsætter vi denne værdi af z i 14), finder vi

$$y\sqrt{3}\,t + 2\,p\sqrt{3}\,t - 2\,q\,t = 0$$

eller, når vi dividerer med t:

$$\sqrt{3}\,y + 2\sqrt{3}\,p - 2\,q = 0$$

og altså

$$18)\ q = \sqrt{3}\,(\tfrac{1}{2}\,y + p).$$

Substituerer vi endvidere denne værdi af q samt værdien af z i ligning 12), får vi

$$x\,y + t\,y + 2\,p\,(x + t) - 2\sqrt{3}\,(\tfrac{1}{2}\,y + p)\sqrt{3}\,t = 0,$$

$$x\,y + t\,y + 2\,p\,x + 2\,p\,t - 3\,t\,y - 6\,p\,t = 0,$$

$$x\,y - 2\,t\,y + 2\,p\,x - 4\,p\,t = 0,$$

$$y\,(x - 2\,t) + 2\,p\,(x - 2\,t) = 0,$$

$$19)\ x = 2\,t.$$

Indsætter vi så værdierne af x, z og s i 11), får vi

$$2\sqrt{3}\,t^2 + \sqrt{3}\,t^2 + 6\,p\,t = 0,$$

$$3\sqrt{3}\,t^2 + 6\,p\,t = 0$$

eller, når vi dividerer med 3 t:

$$\sqrt{3}\,t + 2\,p = 0$$

$$20)\ p = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t.$$

Dernæst indsætter vi værdierne af p og z i 10) og får

$$y\sqrt{3}\,t - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t\,(y + 2\sqrt{3}\,t) = 0$$

eller, divideret med $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t$:

$$2\,y - (y + 2\sqrt{3}\,t) = 0,$$

$$21)\quad y = 2\sqrt{3}\,t.$$

Vi substituerer så endnu værdierne af x, y, z og s i 2) og får derved

$$2\,t\cdot 2\sqrt{3}\,t + 2\cdot 2\,t\sqrt{3}\,t + 2\,t\sqrt{3}\,t + 2\cdot 2\,t\cdot 2\sqrt{3}\,t = 48$$

$$18\sqrt{3}\,t^2 = 48,$$

$$t^2 = \frac{8}{3\sqrt{3}},$$

$$t^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9},$$

$$22)\quad t = \frac{2}{3}\sqrt{2\sqrt{3}}.$$

Endelig indsætter vi værdierne af x, y og z i 1) og får

$$i = 2\,t\cdot 2\sqrt{3}\,t\sqrt{3}\,t + t\cdot 2\sqrt{3}\,t\sqrt{3}\,t,$$

$$23)\quad i = 18\,t^3.$$

Vi har altså hidindtil fundet:

$$x = s = 2\,t,$$

$$y = 2\,z = 2\sqrt{3}\,t,$$

$$i = 18\,t^3,$$

hvor overalt

$$t = \frac{2}{3}\sqrt{2\sqrt{3}}.$$

For at få lidt mere overskuelige talværdier logaritmerer vi den sidste ligning, altså

$$\log t = \log 2 - \log 3 + \tfrac{1}{2}(\log 2 + \tfrac{1}{2}\log 3),$$

$$\log t = 0{,}3010300 - 0{,}4771213 + \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}3010300 + \tfrac{1}{4}\cdot 0{,}4771213,$$

$$\log t = 0{,}0937040,$$

$$24)\quad t = 1{,}240806 \text{ fod.}$$

Vi får altså umiddelbart

$$25)\quad x = s = 2{,}481612 \text{ fod.}$$

Endvidere har vi, da $z = \sqrt{3}\,t$:

$$\log z = \tfrac{1}{3} \log 3 + \log t,$$
$$\log z = \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}4771213 + 0{,}0937040,$$
$$\log z = 0{,}3322646,$$
$$26)\ z = 2{,}14914 \text{ fod},$$

hvoraf umiddelbart følger

$$27)\ y = 4{,}29828 \text{ fod}.$$

Det kan forøvrigt også være interessant at se, hvor stor sidernes hældning imod bunden er. Når vinkelen mellem s og z kaldes v, har vi

$$\sin v = \frac{t}{s}$$

eller altså, da $s = 2\,t$:

$$\sin v = \frac{1}{2},$$
$$28)\ v = 30^{0}.$$

Sidernes hældning mod bunden er således $90^{0} + 30^{0}$ eller 120^{0}.

Endelig må vi endnu finde den overskuelige talværdi for selve det maksimale indhold. Vi har

$$i = 18\ t^{3},$$
$$\log i = \log 18 + 3 \log t,$$
$$\log i = 1{,}2552725 + 3 \cdot 0{,}093704,$$
$$\log i = 1{,}5363845,$$
$$29)\ i = 34{,}38622 \text{ kubikfod}.$$

3. Vi kan endvidere forestille os, at vandbeholderen har form af en omvendt firesidet pyramide, altså med skrå ender og sider og spidst lilløbende bund. I dette tilfælde er der absolut ingen grund til, at længden skulde være forskellig fra bredden; vi forudsætter derfor, at pyramidens grundflade er et kvadrat, og sætter dettes side $= x$, pyramidens höjde $= z$ og hver af de trekantede sidefladers höjde $= s$, hvorefter vi får følgende 3 grundligninger: for indholdet i haves

$$1)\ i = \frac{1}{3} x^2 z$$

og for overfladen

$$2)\ 2\,s\,x = 48,$$

medens der mellem s, x og z består den simple relation

$$3)\ s^2 = \left\{\frac{x}{2}\right\}^2 + z^2.$$

Sætter vi nu

$$f = i = \frac{1}{3} x^2 z,$$

$$\varphi \equiv 2\,s\,x - 48 = 0,$$

$$\psi \equiv x^2 + 4\,z^2 - 4\,s^2 = 0$$

og danner funktionen

$$F = f + p\,\varphi + q\,\psi,$$

får vi som hovedligning

$$4)\ F = \frac{1}{3} x^2 z + p\,(2\,s\,x - 48) + q\,(x^2 + 4\,z^2 - 4\,s^2).$$

Denne funktion differentierer vi med hensyn til de 3 variable x, z og s, hvad der giver

$$5)\ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{3} x\,z + 2\,p\,s + 2\,q\,x,$$

$$6)\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{3} x^2 + 8\,q\,z,$$

$$7)\ \frac{\partial F}{\partial s} = 2\,p\,x - 8\,q\,s.$$

Disse differentialkvotienter sætter vi = 0 og får da således under tilföjelse af 2) og 3) de følgende 5 ligninger til at bestemme de 5 ubekendte x, z, s, p, q af:

$$8)\ x\,z + 3\,p\,s + 3\,q\,x = 0,$$

$$9)\ x^2 + 24\,q\,z = 0,$$

$$10)\ p\,x - 4\,q\,s = 0,$$

$$11)\ s\,x - 24 = 0,$$

$$12)\ x^2 + 4\,z^2 - 4\,s^2 = 0.$$

Af ligning 11) følger umiddelbart, at

$$13)\ s = \frac{24}{x}.$$

Substituerer vi denne værdi af s i 10), får vi

$$p\,x - \frac{96\,q}{x} = 0,$$

$$14)\ q = \frac{p\,x^2}{96}.$$

Denne værdi indsat i 9) giver

$$x^2 + \frac{p\,x^2\,z}{4} = 0,$$

$$4 + p\,z = 0,$$

$$15)\ p = -\frac{4}{z},$$

og altså går 14) over til

$$16)\ q = -\frac{x^2}{24\,z}.$$

Ved substitution af 15), 16) og 13) i 8) fås

$$x\,z - 3 \cdot \frac{4}{z} \cdot \frac{24}{x} - 3\,\frac{x^2}{24\,z}\,x = 0,$$

$$x\,z - \frac{12 \cdot 24}{x\,z} - \frac{x^3}{8\,z} = 0,$$

$$17)\ 8\,x^2\,z^2 - 48^2 - x^4 = 0.$$

Substituerer vi endelig 13) i 12), får vi

$$x^2 + 4\,z^2 - 4\,\frac{24^2}{x^2} = 0,$$

$$x^4 + 4\,x^2\,z^2 - 4 \cdot 24^2 = 0,$$

$$18)\ x^4 + 4\,x^2\,z^2 - 48^2 = 0.$$

Subtraherer vi nu 17) fra 18), får vi

$$2\,x^4 - 4\,x^2\,z^2 = 0,$$

$$2\,x^2\,(x^2 - 2\,z^2) = 0,$$

$$x^2 = 2\,z^2,$$

$$19)\ z = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,x.$$

Indsætter vi endelig denne værdi af z i 18), får vi

$$x^4 + 4\,x^2 \cdot \tfrac{1}{2}\,x^2 - 48^2 = 0,$$

$$3\,x^4 = 48^2,$$

$$x^2 = 48\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 16\sqrt{3},$$

$$20)\ x = 4\sqrt[4]{3}.$$

Da $z = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x$, har vi altså

$$z = 2\sqrt{2}\sqrt[4]{3},$$

$$21)\ z = 2\sqrt[4]{12},$$

og da $s = \dfrac{24}{x}$, har vi

$$s = \frac{6}{\sqrt[4]{3}},$$

$$s = 2\sqrt{3}\sqrt[4]{3},$$

$$22)\ s = 2\sqrt[4]{27}$$

Når vinkelen mellem s og z kaldes v, har vi

$$\operatorname{tang} v = \frac{\tfrac{1}{2}x}{z} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{2\sqrt[4]{12}},$$

$$\operatorname{tang} v = \sqrt[4]{\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$23)\ \operatorname{tang} v = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

For at få overskueligere talværdier beregner vi

$$\log x = \log 4 + \tfrac{1}{4}\log 3,$$

$$\log x = 0{,}6020600 + \tfrac{1}{4}\cdot 0{,}4771213,$$

$$\log x = 0{,}7213403,$$

$$24)\ x = 5{,}264296 \text{ fod.}$$

Endvidere har vi

$$\log z = \log 2 + \tfrac{1}{4}\log 12,$$

$$\log z = 0{,}3010300 + \tfrac{1}{4}\cdot 1{,}0791812,$$

$$\log z = 0{,}5708253,$$

$$25)\ z = 3{,}72242 \text{ fod.}$$

Desuden haves

$$\log s = \log 2 + \tfrac{1}{4}\log 27,$$

$$\log s = 0{,}3010300 + \tfrac{1}{4}\cdot 1{,}4313638,$$

$$\log s = 0{,}6588710,$$

$$26)\ s = 4{,}55902 \text{ fod.}$$

For tang v fik vi: $\operatorname{tang} v = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, altså

$$\log \operatorname{tang} v = \log 0{,}5 + \tfrac{1}{2} \log 2,$$
$$\log \operatorname{tang} v = 0{,}6989700 - 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}3010300,$$
$$\log \operatorname{tang} v = 9{,}8494850 - 10,$$
$$27)\quad v = 35^\circ\ 15'\ 51{,}''_8.$$

Vinkelen i bunden er altså

$$2\,v = 70^\circ\ 31'\ 43{,}''_6,$$

d. v. s. nöjagtig den samme som i bunden af det kegleformede bæger i opgave II.

Vi har så til slutning endnu at beregne det maksimale kubikindhold i, der efter ligning 1) er

$$i = \frac{1}{3} x^2 z,$$

hvorfor vi har

$$\log i = 2 \log x + \log z - \log 3,$$
$$\log i = 2 \cdot 0{,}7213403 + 0{,}5708253 - 0{,}4771213,$$
$$\log i = 1{,}5363846,$$
$$28)\quad i = 34{,}38623.$$

4. Tænker vi os endelig beholderen som en omvendt afstumpet firesidet pyramide, altså som et trug med **skrå ender og sider**, er der ligesom forhen absolut ingen grund til, at længden skulde være forskellig fra bredden, men vi kan uden videre forudsætte, at både bunden og den af randen indesluttede flade er kvadrater. Sætter vi da siden af det nederste kvadrat $= x$, siden af det øverste kvadrat $= y$, beholderens höjde $= z$, bredden af en sideflade $= s$, den af s og z dannede vinkel $= v$, får vi i dette lilfælde følgende grundligninger: kubikindholdet af den afstumpede pyramide er

$$1)\quad i = \frac{1}{3} (x^2 + x\,y + y^2)\, z,$$

og for overfladen gælder

$$2)\quad x^2 + 2\,(x + y)\, s = 48,$$

medens vi desuden har de to relationer

$$3)\ y - x = 2\,s \sin v$$
$$4)\ z = s \cos v.$$

Ved at substituere værdien af z i 1) får vi

$$i = \frac{1}{3}(x^2 + x\,y + y^2)\,s \cos v,$$

der altså er den funktion, der skal göres til et maximum. Men da den selvfølgelig vokser med sit tredobbelte produkt, går vi bekvemmere ud fra

$$5)\ J = 3\,i = (x^2 + x\,y + y^2)\,s \cos v.$$

Sætter vi derpå i lighed med för:

$$f \equiv J = (x^2 + x\,y + y^2)\,s \cos v,$$
$$\varphi \equiv x^2 + 2\,(x + y)\,s - 48 = 0,$$
$$\psi \equiv y - x - 2\,s \sin v = 0$$

og danner funktionen

$$F = f + p\,\varphi + q\,\psi,$$

får vi som hovedligning:

$$6)\ F = (x^2 + x\,y + y^2)\,s \cos v + p\,(x^2 + 2\,s\,x + 2\,s\,y - 48) + q\,(y - x - 2\,s \sin v).$$

Ved at differentiere denne funktion partielt med hensyn til de 4 uafhængige variable x, y, z, v får vi

$$7)\ \frac{\partial F}{\partial x} = (2\,x + y)\,s \cos v + 2\,p\,(x + s) - q,$$

$$8)\ \frac{\partial F}{\partial y} = (x + 2\,y)\,s \cos v + 2\,p\,s + q,$$

$$9)\ \frac{\partial F}{\partial s} = (x^2 + x\,y + y^2) \cos v + 2p\,(x + y) - 2q \sin v,$$

$$10)\ \frac{\partial F}{\partial v} = -(x^2 + x\,y + y^2)\,s \sin v - 2\,q\,s \cos v,$$

og når vi sætter disse 4 diffentialkvotienter = 0, har vi under tilföjelse af 2) og 3) ialt 6 ligninger til at bestemme de 6 ubekendte x, y, s, v, p, q af, nemlig:

$$\text{I)}\ (2\,x + y)\,s \cos v + 2\,p\,(x + s) - q = 0,$$
$$\text{II)}\ (x + 2\,y)\,s \cos v + 2\,p\,s + q = 0,$$
$$\text{III)}\ (x^2 + x\,y + y^2) \cos v + 2\,p\,(x + y) - 2\,q \sin v = 0,$$

IV) $-(x^2 + xy + y^2) \sin v - 2q \cos v = 0$,

V) $x^2 + 2(x + y)s - 48 = 0$,

VI) $y - x - 2s \sin v = 0$.

Vi eliminerer nu först q ved at danne I + II, II 2 sin v + III og II 2 cos v + IV, hvorved vi får de 5 ligninger:

11) $3(x + y)s \cos v + 2p(x + 2s) = 0$,

12) $2(x + 2y)s \sin v \cos v + (x^2 + xy + y^2) \cos v$
$+ 4ps \sin v + 2p(x + y) = 0$,

13) $2(x + 2y)s \cos^2 v - (x^2 + xy + y^2) \sin v + 4ps \cos v = 0$,

14) $x^2 + 2(x + y)s - 48 = 0$,

15) $s = \dfrac{y - x}{2 \sin v}$.

Substituerer vi 15) i 11), 12), 13) og 14) og multiplicerer samtidig 11) med 2 sin v og 13) og 14) med sin v, får vi

16) $3(x +)y(y - x) \cos v + 4px \sin v + 4p(y - x) = 0$,

17) $(x + 2y)(y - x) \cos v + (x^2 + xy + y^2) \cos v$
$+ 2p(y - x) + 2p(x + y) = 0$,

18) $(x + 2y)(y - x) \cos^2 v - (x^2 + xy + y^2) \sin^2 v$
$+ 2p(y - x) \cos v = 0$

19) $x^2 \sin v + (x + y)(y - x) - 48 \sin v = 0$.

Af ligning 17) følger

$$3y^2 \cos v + 4py = 0,$$

$$p = -\tfrac{3}{4} y \cos v.$$

Indsætter vi denne værdi af p i 16) og 18) og dividerer samtidig 16) med 3 cos v og multiplicerer 18) med 2, får vi under tilföjelse af 19):

20) $(x + y)(y - x) - xy \sin v - y(y - x) = 0$,

21) $2(x + 2y)(y - x) \cos^2 v - 2(x^2 + xy + y^2) \sin^2 v$
$- 3y(y - x) \cos^2 v = 0$,

22) $x^2 \sin v + (x + y)(y - x) - 48 \sin v = 0$.

Af 20) fremgår ved udførelse af multiplikationerne:

$$x(y - y \sin v - x) = 0.$$

For $x = 0$ har vi en pyramide, det vil altså sige det foran behandlede tilfælde. Er derimod $x \gtrless 0$, har vi

$$y - y \sin v - x = 0$$

$$23)\ x = y\,(1 - \sin v).$$

Udfører vi nu multiplikationerne i 21) og sammendrager leddene, får vi

$$(-2x^2 + xy + y^2)\cos^2 v - 2\,(x^2 + xy + y^2)\sin^2 v = 0$$

eller, da $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$:

$$(xy + y^2)(\cos^2 v - 2 \sin^2 v) - 2x^2 = 0,$$

$$24)\ (xy + y^2)(1 - 3 \sin^2 v) - 2x^2 = 0.$$

Substituerer vi derpå 23) i 24) og dividerer samtidig med y^2, får vi

$$(2 - \sin v)(1 - 3\sin^2 v) - 2\,(1 - \sin v) = 0,$$

hvad der ved udførelsen af multiplikationerne giver

$$3 \sin^3 v - 8 \sin^2 v + 3 \sin v = 0,$$

$$25)\ \sin v\,(3 \sin^2 v - 8 \sin v + 3) = 0.$$

For $\sin v = 0$ har vi også $v = 0$, og vi får i dette tilfælde altså den forhen behandlede kasse med lodrette ender og sider. Er derimod $\sin v \gtrless 0$, har vi

$$3 \sin^2 v - 8 \sin v + 3 = 0,$$

$$\sin^2 v - \frac{8}{3} \sin v = -1,$$

$$26)\ \sin v = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7}).$$

Dette er nöjagtig den samme værdi, som vi havde i opgave II, 3, ligning 25, og vi får da ligesom der under 25a):

$$27)\ v = 26^\circ\ 50'\ 4,''5.$$

Vi vender nu tilbage til ligning 22), d. v. s.

$$x^2 \sin v + (x + y)(y - x) - 48 \sin v = 0,$$

der ved udmultiplicering og sammendragning giver

$$y^2\,[1 - (1 - \sin v)^2] - 48 \sin v = 0.$$

Da nu i henhold til opgave II, 3:

$$(1 - \sin v)^2 = 0{,}1650932$$

og desuden

$$\sin v = 0{,}4514162,$$

får vi umiddelbart

$$y^2 \cdot 0{,}8349068 - 48 \cdot 0{,}4514162 = 0,$$

$$y = \sqrt{\frac{48 \cdot 0{,}4514162}{0{,}8349068}},$$

$$\log y = \tfrac{1}{2}(\log 48 + \log 0{,}4514162 - \log 0{,}8349068),$$

$$\log y = 0{,}7070901,$$

$$y = 5{,}094366 \text{ fod.}$$

Endvidere er efter 23):

$$x = y\,(1 - \sin v),$$

$$x = y \cdot 0{,}5485838,$$

$$\log x = \log y + \log 0{,}5485838,$$

$$\log x = 0{,}4463331,$$

$$x = 2{,}79468 \text{ fod.}$$

Desuden har vi

$$s = \frac{y - x}{2 \sin v},$$

$$s = \frac{2{,}29969}{2 \sin v} = \frac{1{,}14985}{\sin v},$$

$$\log s = \log 1{,}14985 - \log \sin v,$$

$$\log s = 0{,}406063,$$

$$s = 2{,}54720 \text{ fod}$$

For at finde höjden z benytter vi ligning 4):

$$z = s \cos v,$$

$$\log z = \log s + \log \cos v,$$

$$\log z = 0{,}3565805,$$

$$z = 2{,}27290 \text{ fod.}$$

Vi har altså endnu kun tilbage at finde kubikindholdet i; dertil benytter vi ligning 1):

$$i = \frac{1}{3}(x^2 + x\,y + y^2)\,z.$$

Nu er jo:

$$\log (x^2) = 2 \log x = 0{,}8926662; \quad x^2 = 7{,}8103$$

$$\log (xy) = \log x + \log y = 1{,}1534232; \quad xy = 14{,}2371$$

$$\log (y^2) = 2 \log y = 1{,}4141802; \quad y^2 = 25{,}9526$$

$$x^2 + xy + y^2 = 48{,}0000$$

Derefter er altså

$$i = 16\ z$$
$$i = 36{,}36640 \text{ kubikfod.}$$

Sammenstiller vi de vundne resultater, har vi de følgende maksimale kubikindhold: når vandbeholderen har

1. lodrette ender og sider, er i = 32,0000 kubikfod,
2. lodrette ender og skrå sider er i = 34,3862 „ ,
3. skrå ender og sider samt
   form af
   a, en pyramide er i = 34,3862 „ ,
   b, en afstumpet pyramide er i = 36,3664 „ .

Deraf fremgår det altså, at en vandbeholder af form som en omvendt afstumpet kvadratisk pyramide, hvis nederste og øverste kanter er henholdsvis 2,79468 og 5,094366 fod, og hvis sider er 2,54720 fod brede og med bunden danner en vinkel på $R + 26^\circ\ 50'\ 4{,}''_5 = 116^\circ\ 50'\ 4{,}''_5$, har det absolut störste rumfang af alle firesidede beholdere, der kan laves af 48 kvadratfod brædder.

De således nærmere betragtede eksempler er selvfølgelig kun en aldeles forsvindende del af en særegen slags blandt de mangeartede opgaver, gamle Jørgen Hansen har regnet; thi at regne var hans lyst, og det blev så at sige hans livsmål: han regnede *altid,* når tiden tillod det, og han regnede *overalt,* hvor de ydre omstændigheder ikke trådte hindrende i vejen.

Så længe han selv havde gården og således jævnlig var optagen af landbruget, måtte hans kæreste syssel selvfølgelig indskrænkes meget.

I det væsentlige så han sig dengang med sine matematiske studier henvist til fritiden; men til gengæld undlod han aldrig at udnytte denne i fuldeste omfang. I stedet for at søge almindelige adspredelser sad han hver fritime böjet over et eller andet problem; og når dagen og aftenen ikke slog til, tog han mangen gang natten, eller dog en betydelig del af den, med til hjælp, hvad enten han blev siddende oppe eller lå i sin seng og spekulerede videre.

Dog også under udførelsen af de mere mekaniske landvæsensarbejder hengav han sig ofte til sine beregninger. En dag, da han kørte et læs gødning til en toft, han ejede i Tumbøl, og gik ved siden af læsset, idet han støttede sig til een af de lange vognkæppe, man dengang brugte, var han så fordybet i sine matematiske betragtninger, at han först kom til at give agt på sine omgivelser igen, da han mødte en bekendt, som med nogen forbavselse spurgte: „Skal do ad Felsted med mog edaw?“ Jørgen Hansen havde ikke lagt mærke til, at han allerede for noget siden var kommen forbi det sted, hvor vejen, der førte fra hans gård til Felsted, böjede af til Tumbøl. At han også undertiden lod det legemlige arbejde helt i stikken, fremgår tydeligt nok af den kendsgerning, at lervæggene i tærskeloen på hans gård var aldeles bedækkede med indridsede geometriske figurer og algebraiske ligninger.

Men efter at han senere havde overladt gården til sönnen og derved fået uindskrænket rådighed over sin tid, gik han ligefrem fuldstændig op i sin gransken. Han regnede tidlig og silde, og han regnede intensivt. Når han sad i sit værelse, optagen af sine matematiske undersøgelser, ænsede han i reglen slet ikke, hvad der foregik omkring ham: hans husfæller kunde gå ud og ind og forbi ham så ofte de vilde og udrette småsysler, uden at han mærkede det mindste. Var det en meget vanskelig opgave, han havde under behandling, regnede han som oftest til langt ud på natten, ja til hen imod morgenstunden, for så efter få timers sövn at tage fat igen og utrættelig blive ved, indtil løsningen var funden.

Og han regnede ikke blot hjemme i sin stue, men næsten overalt, hvor han færdedes. Det forekom således ikke så sjælden, at han om sommeren, når han f. eks. var gået ud i marken for at se til køerne, glemte at komme hjem til spisetiderne, så at hans pårörende måtte ud for at lede om ham; og de fandt ham da gærne liggende i læ bag et hegn, fuldstændig hensunken i sine beregninger. Ja, der berettes, at han undertiden endogså kunde sidde og regne om söndagen i kirken under præstens prædiken.

Under sådanne omstændigheder er det jo ikke til at undres over, at der også har dannet sig en hel række mere sagnagtige fortællinger om gamle Jørgen Hansens bestandige fordybelse i regneproblemer og hans deraf følgende jævnlige uagtsomhed over for sine omgivelser. Således fortælles der, at han engang, da han var ude i marken med heste og vogn, blev staaende og regnede, hvorimod hestene rolig gik hjem til gården med vognen; ved synet af det tomme køretöj blev folkene imidlertid ængstelige for, at der kunde være sket en ulykke, og de ilede derfor afsted ud i marken, hvor Jørgen Hansen ved deres ankomst blev vækket af sin åndsfraværenhed og derpå udbrød: „I kund gjæ'n' haj ladt mæ i ro, no var æ lig' stras færre!" En anden fortælling går ud på, at han en dag, da han var sysselsat oppe på rygningen af huset, fik nogle af sine matematiske optegnelser frem og begyndte at regne, idet han benyttede skorstenen som skrivebord; men varmen fra ilden i køkkenet neden under var så stærk, at den snart sved alle hans papirer i stykker.

Men disse og enkelte andre fortællinger, der ligesom de ovenfor omtalte sikre beretninger lever i folkemunde dèr på egnen, er i modsætning til hine som sagt uden tvivl blot opdigtede eller dog overdrevent udsmykkede historier.

Jørgen Hansens navn blev på grund af hans store matematiske kyndighed forholdsvis tidlig bekendt i de videste krese her i Nordslesvig. Når han omtaltes, nævntes han imidlertid sjælden ved sit egentlige navn, men kaldtes i almindelighed enten „klog' Jör'n" eller også, og da hyppigst, „e reggenmester i Tumbøl". Senere gik hans ry som regnemester, tit under ledsagelse af de mest eventyrlige fortællinger, også langt ud over Nordslesvigs grænser.

Specielt i en del af de sagkyndiges lejr blev han navnlig bekendt ved at inddrages i flere matematiske korrespondancer.

Hen imod slutningen af forrige århundrede trådte han således i brevveksling med en lærer Jacob Jacobsen på Sild i anledning af en bog, som denne havde udgivet under den lange og delvis noget mærkværdig lydende titel: „Freundschaftliche Bewirthung meiner mathematischen Brüder mit einem Tractement von sechs Gerichten oder: Curieuse mathematische Aufgaben nebst ihrer Auflösung von Jacob Jacobsen, Schullehrer zu Tinnum auf Sylt. Schleswig, 1790. Gedruckt in der Königl. privil. Serringhausenschen Buchdrukkerey". Bogen, der omfatter 174 små sider i dobbeltskudt stortryk, indeholder et antal ejendommelig fantastisk iklædte matematiske opgaver, der kræver en del kendskab både til geometri og algebra samt til plan og sfærisk trigonometri, ja enkeltvis endogså til differentialregning. Blandt opgaverne finder man således den tidligere nævnte om bægeret med den mindst mulige indre overflade; men forfatteren af bogen går kun ind på løsningen af det förste og letteste tilfælde: når bægeret har cylinderform. — Brevvekslingen med Jacobsen blev dog ikke af ret lang varighed.

Længere varede en anden korrespondance, som Jørgen Hansen omkring ved år 1820 førte med en matematiklærer Pahl i Altona.

Denne korrespondance, der var offentlig, blev indledet på følgende måde. Den daværende præst i Felsted, pastor Höck, var holder af „Altonaischer Mercurius", det eneste dengang i hertugdömmerne eksisterende ugeblad. I dette fandt han en dag en regneopgave, der var indrykket af den nævnte matematiklærer Pahl, og da præsten ikke selv kunde magte den, skyndte han sig over til gamle Jørgen Hansen og viste ham opgaven med bön om at løse den og tilstille ham løsningen, for at han så kunde indsende denne til bladet.

Efter at Jørgen Hansen havde gennemlæst opgaven, spurgte han præsten, om denne havde travlt, og da dette just ikke var tilfældet, bad han ham om at tage plads og blot vente en halv times tid, da han lige så godt kunde foretage løsningen med det samme. Præsten gav gærne sit samtykke til dette forslag, og da så den ommeldte frist endnu næppe var udløben, sad han allerede med løsningen i lommen. Lige så forbavset som fornöjet over dette bevis på den gamles overordentlige matematiske dygtighed gik han så hjem og indsendte straks den modtagne løsning, idet han tillige bemærkede, at bladet for fremtiden gærne kunde bringe lidt vanskeligere opgaver end denne, som en gammel bonde i hans sogn havde regnet i løbet af nogle og tyve minutter.

Nogen tid efter kom præsten atter til Slyngsten med det nyeste nummer af „Altonaischer Mercurius“, der nu virkelig indeholdt en betydelig vanskeligere opgave. Han anmodede Jørgen Hansen om også at løse denne og at tilsende ham løsningen så snart som muligt; og samtidig bad han ham om nu til gengæld også at stille en opgave, som matematikeren i Altona kunde have at more sig med. Uden længere snak eller större omstændigheder opfyldte den gamle de fremsatte ønsker, og præsten lod derpå med særlig tilfredsstillelse løsningen og opgaven afgå til bladet. Hr. Pahl var imidlertid heller ikke sen, men fremkom i eet af Mercurens næstfølgende numre med løsningen af den tilstillede opgave; og Jørgen Hansen konstaterede på præstens forventningsfulde spörgsmål, at løsningen var rigtig.

Men pastor Höck havde lyst til at spinde den tråd noget længere. Han opfordrede derfor Jørgen Hansen til atter at give ham en opgave til Bladet, og dennegang helst en så vanskelig som muligt, for at deres matematiske modpart i Altona ret kunde øve sine kræfter derpå. I förstningen betænkte den gamle sig lidt, men omsider gik han ind på forslaget og fremlagde derpå en opgave, der kun kunde løses ved ligninger af fjerde grad. Præsten smilede polisk, da han indsendte denne, og imødeså derpå en tid lang med spændt forventning hvert følgende nummer af bladet. Men forgæves: der kom aldrig nogen løsning. Dermed var præsten tilfredsstillet og korrespondancen med Altona afsluttet.

Senere korresponderede Jørgen Hansen med en officer i Fredericia. Om denne brevveksling vides der imidlertid kun følgende. Da Nis Iversen fra Svejrup i året 1838 var soldat i Fredericia, henvendte een af de derværende officerer, hvis navn nu ikke kan konstateres, sig en dag til ham med de ord: „Jeg hører, at De er fra Felsted sogn. Så kender De vel nok den gamle Jørgen regnemester i Tumbøl. Ham har jeg korresponderet med om matematiske spörgsmål."

Desuden er det meget sandsynligt, at Jørgen Hansen imod slutningen af sin levetid trådte i brevveksling med den overalt i Nordslesvig bekendte matematiker H. P. H. Grünfeld, der den gang var lærer i Sønderborg, men senere blev overlærer ved domskolen i Slesvig. Hvorledes iøvrigt de to blev personlig bekendt med hinanden, skal vi straks komme til at beröre lidt nærmere.

Som følge af det ry, der gik om gamle Jørgen Hansens matematiske kundskaber, modtog han i tidens løb en del mere eller mindre notable besøg, hvoraf der dog her kun skal nævnes et par fra hans senere leveår. Vistnok i efteråret 1843 blev han gæstet af den daværende hertug af Avgustenborg, den noksom bekendte Kristian Avgust.

Hertugen, der var en stor jagtelsker, plejede en gang om året at gennemsøge et rörkrat, der den gang fandtes på Slyngsten mark og i reglen husede et par ræve. Ved en sådan lejlighed var det, at hertugen, efter at rörkrattet var gennemsøgt og fangsten gjort, med sit jagtfølge vendte sig mod gården for at hilse på den gamle. Uden for gården traf han hans sön, den daværende ejer, med hvem han begyndte en samtale, der i hovedsagen drejede sig om følgende spörgsmål: om den gamle Jørgen Hansen var hans fader, om han endnu var rask, hvor höjt han var oppe i alderen, om han endnu kunde regne, om han, sönnen, havde drevet det lige så vidt i regnekunsten som faderen osv. Til slutning udtalte hertugen ønsket om at hilse på den gamle regnemester, hvis han da var hjemme, og da dette var tilfældet, blev han selvfølgelig inviteret til at træde indenfor og tage plads.

Medens der blev sendt bud til gamle Jørgen Hansen, fulgte hertugen husmoderens indbydelse til at drikke en kop kaffe. Så trådte den 85-årige olding ind og hilste på den fornemme gæst. Hertugen rejste sig og rakte ham hånden, hvorefter han begyndte at underholde sig med ham. I særdeleshed rettede han følgende spörgsmål til den gamle: „Beskæftiger De Dem endnu med matematik? Jeg har hørt, at De har opnået en meget stor kyndighed i denne videnskab! Hvorledes har De erhvervet denne kyndighed? Hvor har De gået i skole? Hvem var Deres lærer? Har De da ikke også haft privatundervisning? Har De korresponderet med matematikere?“ På ethvert af spörgsmålene gav oldingen oplysende svar, og med hensyn til det sidste bemærkede han, at han blandt andet for godt en snes år siden havde haft lejlighed til at veksle opgaver med en matematiker i Altona. „Løste han de stillede opgaver?“ spurgte hertugen videre. „Løsningen af den sidste opgave udeblev“, svarede den gamle. „Kan De måske endnu huske den? Jeg kunde nok have lyst til at høre den“, fortsatte hertugen. Jørgen Hansen gengav da opgavens ordlyd. „Nu, og løsningen kom altså ikke? Å nej, den er jo vist heller ikke så helt let at løse!“ tilföjede hertugen. Dermed sluttede han samtalen, rakte den gamle hånden til afsked og forlod så huset.

Et næppe sa fornemt, men til gengæld så meget des kærere besøg fik gamle Jørgen Hansen et par år senere, idet den for lidt siden nævnte lærer Grünfeld fra Sønderborg (senere overlærer ved domskolen i Slesvig og udgiver af flere bekendte både danske og tyske regnebøger) gæstede ham.

Grünfeld havde tit hørt tale om regnemesteren i Tumbøl, og da netop matematik var hans yndlingsfag, havde han i lang tid næret det ønske at göre Jørgen Hansens personlige bekendtskab. Imidlertid var en ven af ham, en lærer Ahlmann fra Als, bleven degn i Felsted, og Grünfeld benyttede nu et besøg hos denne til sammen med ham at gå over til Slyngsten. Det var en söndag eftermiddag, de kom ind på gården og dèr blev modtagne med vanlig imødekommen og venlighed. Da så Ahlmann havde fortalt, hvem hans ledsager var, at han særlig interesserede sig for matematik og da også havde drevet det forholdsvis vidt i denne videnskab, lyste det op i den gamles öjne, og han bød den fremmede hjærtelig velkommen.

Det varede selvfølgelig ikke ret længe, för samtalen drejede sig ind på det matematiske område. Men det viste sig snart, at samtale ikke kunde klare det; synlige tegn måtte tages til hjælp, og der regnedes og tegnedes da nu i flere Timer: ikke med pen på papir eller griffel på tavle, men som følge af den gamles lidt svækkede syn med kridt på bordet i stuen. Inden ret længe var imidlertid bordet skrevet fuldt, og et andet og större blev stillet til rådighed. Men heller ikke dette slog til, og der måtte da spyttes og viskes ud for at skaffe den fornødne plads til de yderligere beregninger. Dette var noget for den gamle; af hans påfaldende livlighed fremgik det klart, at han her havde fundet en uvant behagelig underholdning.

Lærer Ahlmann kunde naturligvis ikke følge med ved de höjtgående og indviklede beregninger; imidlertid så han opmærksomt til, og han morede sig ypperlig over at iagttage, at hans ven, den i regning ham langt overlegne Grünfeld, bestandig måtte opbyde hele sin åndelige kraft for så nogenlunde at kunne konkurrere med den næsten halvfemsindstyveårige bonde. Men endelig måtte han minde de to i figurer og formler fordybede mænd om den fremrykkede tid; og til stor beklagelse på begge sider slog afskedens time. Da Jørgen Hansen og Grünfeld imidlertid langtfra blev færdige med deres beregninger, er det, som ovenfor

10

udtalt, meget sandsynligt, at de senere har fortsat deres tankeudveksling ad skriftlig vej; men et fastere holdepunkt til støtte for denne ret rimelige antagelse haves der ikke.

At det dog ikke altid var særlig matematikinteresserede fremmede, gamle Jørgen Hansens navnkundighed drog til Slyngsten, vil fremgå af følgende lille begivenhed. En dag kom nogle höjtideligt udseende bønderfolk kørende, vistnok vestfra. Der var blevet begået et tyveri hos dem, og de ønskede derfor, at „kloge Jørgen" skulde „vise igen"; han behøvede ikke at spare på de midler, han havde til sin rådighed, og han måtte endogså, på deres regning og risiko, gærne slå et öje ud på tyven. Men den gamle rystede med påtagen alvorsmine på hovedet og erklærede, at det var en sag, han dog ikke vilde indlade sig på. Derimod fortav han, med lidt af en skælm bag øret, at han heller ikke kunde.

Foruden ved korrespondancer og besøg i hjemmet kom gamle Jørgen Hansen undertiden også på andre måder i nærmere matematisk beröring med folk, og det endte da gærne i sådanne tilfælde med, at hans uventede viden på regnekunstens område gjorde et levende indtryk på vedkommende.

Således satte han engang en snedker, der arbejdede på gården, i stor forbavselse.

Snedkeren var i færd med at lave et spillebord af den bekendte slags, hvis kvadratiske plade kan klappes sammen og drejes en ret vinkel om, så den atter kommer til at ligge symmetrisk på fodens ramme. Han havde just fået rammen færdig, da gamle Jørgen Hansen tilfældigvis kom til stede, og han spurgte da denne, hvor han mente, at hullet, som bordpladens tap eller skrue skulde dreje sig i, burde bores. Snedkeren vidste det godt, thi han havde fået regel og forskrift derfor af sin mester; men han havde nu lyst til at prøve, om vor regnemester også skulde være i stand til at regne det ud, hvad der efter hans overbevisning måtte være så godt som umuligt.

Efter at den gamle havde set på sagen og derpå noteret, hvad han gærne skulde vide om bordets dimensioner, gik han ind i sin stue; men det varede ikke ret længe, för han atter kom ud til snedkeren og sagde: „Når du fra eet af rammens hjörner måler så og så mange tommer hen ad siden og dèr fra i en ret vinkel så og så mange tommer indefter, vil du få det punkt, hvor hullet, som bordpladens tap skal dreje sig i, må bores“. Da snedkeren så, at de således angivne mål var aldeles nöjagtige, var han af bare forbavselse nær gået baglæns over i spånerne; der var efter hans formening ved denne (i parentes bemærket ret simple) beregning blevet udført et næsten vidunderligt kunststykke, og han nærede fra den dag af en til ærefrygt grænsende respekt for den gamle.

En anden gang var det en del af latinskoleeleverne i Flensborg, Jørgen Hansen kom til at göre indtryk på.

En dag fik han nemlig bud fra den ovenfor omtalte pastor Höck i Felsted, om han ikke havde lyst til et par dage senere at køre med til Flensborg. Jørgen Hansen, der netop havde ærende til byen og nok vilde

10*

have en lille passiar med præsten, tog gærne imod tilbuddet og mødte til den fastsatte tid i præstegården. Efter at de så var ankomne til Flensborg, opfordrede præsten den gamle til at göre ham følgeskab op på latinskolen, hvor een af lærerne var en særlig ven af ham. Jørgen Hansen var dog ikke så lige tilböjelig til at gå ind på det fremsatte forslag: han kendte jo ikke et eneste menneske der oppe og havde desuden en hel del ærender at udrette; men præsten holdt på og blev ved, og omsider lod den gamle sig overtale til at gå med ham.

Oppe på skolen blev de venlig modtagne og derpå førte ind i øverste klasse, hvor man netop tilfældig — eller vistnok snarere i god overensstemmelse med præstens i forvejen udklækkede plan — havde matematiktime. De karlvoksne latinskoleelever så noget forundrede på præsten og gloede lidt hånligt på den gamle bonde. „Hvad mener De om sådanne opgaver?“ spurgte præsten den gamle og pegede på den store tavle, der var fuld af algebraiske ligninger. Jørgen Hansen trådte hen til tavlen og så på beregningerne. Alt imens gled et spottende smil over alle elevernes ansigter. Da den gamle havde set på sagerne, vendte han sig om og spurgte den nærmestsiddende af eleverne: „Nå, kan I kom etter et?“ — „„Jo““, svarede den adspurgte leende og tilföjede spydigt: „„ejsen kan I vel hjælp vos?““ — „Ja, de kund jo enda væ'e“, lød den gamles replik. Det var jo vældige löjer for vore elever; hele klassen brast ud i en skraldende latter.

Så gik gamle Jørgen Hansen igen hen til tavlen, og idet han pegede på beregningerne, sagde han roligt: „Den opgav' hæ'er è ganske vist løst rigte nok; men den kan da no løses en hel del nemme, som æ no skal vis' je.“ Dermed tog han et stykke kridt og demonstrerede kort og klart sin lettere løsningsmetode. Smilene forsvandt, og latteren forstummede; eleverne indså nu fluks, at den gamle i vadmelsfrakken måtte være dem langt overlegen i algebraen. „Men“, fortsatte Jørgen Hansen, „no vil æ gi jer en opgav', så kan vi jo pröwer å se, om I kan løs' den“; og han gav sig da til at notere en opgave på tavlen. Eleverne stirrede på opgaven og skottede om til hverandre; men der var ingen, der vovede at give sig i kast med den. En almindelig flovhed var pludselig trådt i stedet for den tidligere kådhed.

Pastor Höck, der hele tiden opmærksomt havde fulgt den vekslende scene, var åbenbart yderst tilfreds med udfaldet; og han blev det end mere, da gamle Jørgen Hansen ved afskeden, efter en længere samtale med læreren, vendte sig om til eleverne med den formaning: „Passer no kun å! For æ vil snart kom egjen, ɔ så må I kund reggen bæ'; fɔ de fɔslær itt' rigte now'er eno med je!“

Kunde således altså Jørgen Hansen ved lejlighed nok være med til at lægge en dæmper på visse ungdommelige menneskers storladne mening om sig selv, var han ellers i sin adfærd over for ungdommen altid elskværdig og opmuntrende. At hans opmuntringer derved som oftest gik netop i særlig matematisk retning, vil ingen kunne undre sig over. Han hyldede i lighed med den næsten jævnaldrende pædagog Pestalozzi den anskuelse, at matematik og regning i börnenes sidste skoleår altid bör indtage øverste plads som undervisningsfag, og han tiltalte derfor i reglen, hver gang han mødte nogle ældre skolebörn, disse med de ord: „Nå, hvad bestil I i e skol'? Lær I godtå reggen? Ja, ströwe kun med de, for e regnend skærper e fosta'nd!"

Men forunderligt nok var han selv slet ikke i stand til at give en virkelig praktisk undervisning i selve sin videnskabs förste begyndelsesgrunde. Formodentlig har han vel syntes, at hvad der stod fuldkomment klart for hans eget blik, måtte også umiddelbart let kunne fattes af andre; den kunst at læmpe sig efter et tungere nemme forstod han nu sikkerligt ikke. Et særligt bevis, der kan gælde for alle, er følgende morsomme lille begivenhed. Den gamles sönnesön, den nuværende gamle Jørgen Hansen i Slyngsten, fremkom engang som 12- til 14-års dreng med en udtalelse om, at han nok havde lyst til at lære lidt algebra. Hans bedstefader syntes, at dette var et lige så billigt som let efterkommeligt ønske, lod handlingen følge på ord og begyndte at give ham lidt undervisning i bogstavregning. Först gik det udmærket godt: additionen og subtraktionen forårsagede ikke den opvakte dreng nogen synderlig vanskelighed; også multiplikationen forløb på tilfredsstillende måde, sa længe der endnu kun var tale om positive störrelser. Men så gik det pludselig galt, da de kom til den opgave at multiplicere to negative störrelser med hinanden. Den gamles belærende ord lød nemlig: „Se, minus gang minus gi plus; de kan do jo nok fostå!" Men det kunde lille Jørgen selvfølgelig ikke uden videre sådan forstå, og da han lod falde en ytring derom til den gamle, gav denne det svar: „Hvad, kan do itt' fostå de? Ja, så kan de skam itt' nytt' nowe med dæ! Så må vi held'e hold op med e sa·m'." Og dermed var den undervisning til ende.

Ihvorvel Jørgen Hansen i hele sin tænken og stræben fornemmelig var matematiker, indskrænkede hans kundskabsdrift sig dog ikke absolut til de blot matematiske og astronomiske enemærker; hans åndelige interesser strakte sig videre, og hvor der var lejlighed, søgte han også at skaffe sig indblik i andre videnskabelige områder.

Han var jo kaldet til at være *landmand,* og han var det af agtelse for standen og beundring for naturen med liv og lyst. Han var, som vi har set, en dygtig landmand, og denne sin dygtighed søgte han stadig at øge ved læsning af den gang fortrinlige landøkonomiske skrifter som O. C. Olufsens „Lærebog i den danske Landoekonomie" (1805) og Albrecht Thaers „Grundzüge der rationellen Landwirthschaft" (1809—10).

Som beundrer af naturen og tænkningens love fordybede han sig endvidere gærne i alt, hvad der hedder *naturvidenskab.* Han ejede blandt andet og kendte for en væsentlig del, hvis ikke til bunds, Esaias Fleischers berömte „Forsøg til en Naturhistorie" (1786—1804), et stort og i sin tid betydningsfuldt værk på 26 bind, der i virkeligheden byder langt mere, end titelen lover, idet det foruden de egentlig naturhistoriske fag også indeholder kosmogoni, astronomi, geologi, fysik o. s. v. Inden for den sidstnævnte videnskab havde han især sin opmærksomhed henvendt på dampkraftens virkning og anvendelse, og han talte så ofte med liv om dens store betydning for fremtidens skibsfart og samfærdsel, handel og næringsdrift; men selv fik han aldrig en dampmaskine at se.

På det *historiske* område dvælede han helst ved sin egen samtid; men han oplevede jo også en lang og på store forandringer rig periode. Ude på verdenshistoriens skueplads var det især så omvæltende og uensartet forløbende begivenheder som de nordamerikanske fristaters tilblivelse og kongeriget Polens sønderlemmelse, den franske revolutions ideer om frihed og lighed samt derpå følgende rædselsregimente, Napoleons verdenserobrende sejersgang og senere nederlag samt grækernes heldige og polakkernes mislykkede frihedskampe, der fængslede hans blik og satte hans sind i bevægelse. Men nærmere berørte ham dog de betydningsfulde omskiftelser, der foregik inden for fædrelandets grænser: i hans ungdom på den ene side Karoline Mathildes landsforvisning samt Struensees henrettelse og på den anden side de gennemgribende landboreformer med afskaffelse af hoveriet og fællesdriften samt indførelse af bedre dyrkningsmåder og nye kulturplanter; i hans manddomsalder skærtorsdagsslaget på reden, Københavns bombardement med ranet af flåden og derpå den syvårige ufredstid med statsbankerotten og tabet af Norge til følge, men ved siden af den sörgelige materielle og politiske nedgang et glædeligt opsving i kunst, literatur og videnskab; i hans alderdom endelig oprettelsen af de rådgivende stænderforsamlinger samt så tilsidst endnu udbruddet af det slesvigholstenske oprør. Imidlertid lod han det over for disse begivenheder ikke bero ved et förstehåndsindtryk, men søgte, så vidt som han kunde få lejlighed til det, ved omfattende læsning og grundig overvejelse af det læste at skaffe sig dybere indblik i tingenes årsager, gang og nødvendige følger.

Endvidere var også hans *sproglige* kundskaber större, end ellers almindelige bønderfolks plejer at være. Han beherskede således ikke alene sit danske modersmål, men var tillige så fuldkommen inde i det tyske sprog, at han skrev det aldeles korrekt, skönt han heller ikke heri havde modtaget nogen privatundervisning.

Endelig er det jo fuldtud naturligt, at han, som den store tænker, han var, desforuden granskede over *filosofiske* spörgsmål. Han ejede flere, om ikke just talrige, bøger om filosofi, og da navnlig om metafysik, det vil sige den videnskabsgren, der handler om tingenes væren og væsen samt årsag og formål. Som et ret ejendommeligt træk kan det nævnes, at han, vel især i de senere år, satte pris på at læse i den sværmerske Lavaters „Aussichten in die Ewigkeit“ (1768—78), en bog på 4 bind, der indeholder drömme og visioner om menneskets tilstand efter døden. Men det er jo alligevel ikke nogen större mærkværdighed end den, at den store matematiker Newton tilsidst skrev forklaringer over profeten Daniels spådomme og Johannes'es åbenbaring.

Selvfølgelig var dog hans gransken i disse forskellige videnskabsgrene en biting ved siden af hans særlige studium; thi matematik, og da navnlig differential- og integralregning, vedblev at være hans kæreste fag og hans langt overvejende syssel, så længe han levede.

Jørgen Hansen var af *legemsbygning* höj og mager; i ungdommen og manddomsårene rank, men senere noget foroverböjet. Han havde en stærk natur og glædede sig hele sit liv ved en usvækket sundhed. Hans rolige adfærd og sindige væsen bar vidnesbyrd om, at han ikke var plaget af sygelig pirrede nerver. Hans skarpt udprægede ansigtstræk gjorde ligesom den tætsluttede mund, den store næse og de roligt lysende öjne et levende indtryk af kraftfylde, alvor og klogskab.

Han var begavet med en klar *forstand* og et ypperligt nemme, der aldrig forlod ham. I de sidste år af hans levetid kunde det ganske vist mærkes, at han fattede en indviklet sag noget vanskeligere og langsommere; men han beholdt sin forstands ufordunklede lys til sin sidste time.

Blandt hans særlige *karaktertræk* bör fremhæves: hans jævnhed og mådehold såvel som hans sandhedskærlighed og retsfølelse. Selv af naturen beskeden og fordringsløs mødte han hovmod og storpraleri med foragt, og opdragen til nöjsomhed og sparsommelighed dadlede han overdåd og luksus. Med sin udprægede agtelse for sandhed og oprigtighed viste han altid en levende afsky for svig og hykleri, og med sin dybe følelse for ret og retfærdighed var han en åbenlys hader af hårdhed og overlast; han mindedes endnu i sin höjeste alder med harme, hvorledes han engang som dreng havde set, at fogden på Ladegård piskede løs på en gammel og affældig bonde, der ikke var i stand til at følge de andre ved arbejdet.

Hans *kulturelle* sans gik mere i retning af det nyttige end af det skönne. Vel yndede han episk og lyrisk såvel som dramatisk poesi, og han følte sig navnlig tiltalt af Holbergs komedier. Han påskönnede endvidere sang og musik; dans derimod ringeagtede, ja ligefrem dadlede han. Men betydelig höjere end kunstydelser agtede han nyttige opfindelser samt virkelige fremskridt i oplysning og dannelse.

Hvad hans *religiøse* standpunkt angar, da var han i udpræget grad ortodoks lutheraner. Han holdt urokkelig fast ved Pontoppidans i sin tid almindelig bekendte pietistiske „Forklaring over Luthers Katechismus“ (1737), hvoraf han endog i sin höjere alder citerede længere stykker som afgørende beviser for visse ved lejlighed fremsatte religiøse anskuelsers gyldighed eller ugyldighed. Imidlertid holdt han dog også meget af de i „Den evangelisk-christelige Psalmebog“ (1798) indeholdte salmer, der ellers i pietistiske krese med ringeagt kaldtes „rationalismens produkt“.

I *politisk* henseende var han royalist i ordets bedste betydning. En herhen hørende udtalelse af ham lyder således: „En konge har på sit ophöjede stade de vanskeligste opgaver at løse og det största ansvar; men derfor tilkommer der også en samvittighedsfuld konge, der alvorlig vil sit folks vel og søger at virke heldbringende på alle mulige måder, at hans undersåtter viser ham den störste ærbødighed, tillid og hengivenhed“.

Ud fra dette synspunkt bedömte han også det slesvig-holstenske oprør. Imidlertid så han kun krigens begyndelse og ikke dens afslutning; men han vedblev indtil sin sidste time at nære en levende forvisning om, at den nok skulde føre til sejer for Danmarks sag.

I vide kredse lever gamle Jørgen Hansens navn endnu stadig i folkemunde; og på gården i Slyngsten holdes hans minde bestandig i hævd og i ære. Men gården er også gået i arv fra fader til sön gennem flere slægtled; den næste arvtager, en lille Jørgen Hansen, er den gamles sönnesöns sönnesön. Og ligesom gården og mindet bevares da også en del af den gamles begavelse trofast af slægten: hans kundskabstrang og belæsthed såvel som hans grundige tænkning er ligefrem blevne til tradition dèr på stedet og har for de enkelte ætleds vedkommende ført til betydelig viden og særegen virken på flere forskellige områder. Men i matematisk retning er der ingen af slægten, der hidtil har evnet, om end kun tilnærmelsesvis, at nå frem til dens stovte, ærværdige stamfader: gamle Jørgen Hansen.