

# Fagdidaktiske perspektiver på formativ evaluering og faglig udvikling i forskellige fagområder

Artikler skrevet på basis af indlæg på  
symposium for  
Sammenlignende Fagdidaktik nr. 7,  
november 2021

Redigeret af Torben Spanget Christensen, Peter Hobel, Martin Niss & Helle Rørbech

Udgivet af Afdeling for fagdidaktik ved DPU, Aarhus Universitet; IMFUFA, Institut for Naturvidenskab og Miljø, RUC og Forskningsprogrammet Almendidaktik og Fagdidaktik, Institut for Kulturvidenskaber, SDU

## Indholdsfortegnelse:

Indledning .....	1-10
<i>Torben Spanget Christensen, Peter Hobel, Martin Niss og Helle Rørbech</i>	
<b>Hovedartikler:</b>	
Higher order thinking in social science education – an empirical study with classroom observations from Denmark and Norway .....	11-36
<i>Anders Stig Christensen og Nora E. H. Mathé</i>	
Om formativ evaluering af matematiske kompetencer .....	37-56
<i>Tomas Højgaard og Mogens Niss</i>	
Et internationalt STM-perspektiv på evaluering .....	57-76
<i>Jens Dolin, Jesper Bruun og Jan Alexis Nielsen</i>	
Elevers tidlige skriveudvikling – en tekstorienteret model med potentialer for differentieret skriveundervisning .....	77-112
<i>Kristine Kabel, Jeppe Bundsgaard og Jesper Bremholm</i>	
<b>Responsartikler:</b>	
Higher order-tænkning og samtale – Respons til Anders Stig Christensens & Nora Mathés artikel “Higher order thinking in social science education – an empirical study with classroom observations from Denmark and Norway” .	113-124
<i>Marie Louise Molbæk</i>	
Højere ordens-tænkning i samfundsfag anskuet i et elevperspektiv – Respons til Anders Stig Christensens & Nora Mathés artikel “Higher order thinking in social science education – an empirical study with classroom observations from Denmark and Norway” .....	125-136
<i>Vibeke Christensen</i>	
Formative og summativ evaluering af matematiske kompetencer set ud fra SOLO-taksonomien .....	137-156
<i>Bettina Dahl Søndergaard</i>	
Formativ evaluering gør matematik (kultur)relevant for eleven – en kommentar til Højgaard og Niss’ artikel .....	157-170
<i>Bjørn Friis Johannsen</i>	
Didaktisk evaluering – Perspektiver på udvikling af en meningsfuld, evalueringsinformeret undervisningspraksis .....	171-186
<i>Mikkel Stovgaard</i>	

Kompetenceudviklende dybdelæring gennem design og evaluering af praktisk arbejde i geografi på læreruddannelsen ..... 187-210  
*Jesper Heidemann Langhoff*

Skriveudvikling, skriveridentitet og ekspansion. Respons til Kabel, Bundsgaard og Bremholm: "Elevens tidlige skriveudvikling" ..... 211-226  
*Søren Nygaard Drejer*

**Afsluttende kommentar til symposiet:**

Generelle og sammenlignende fagdidaktiske perspektiver på formativ evaluering ..... 227-242  
*Martin Niss*



# Om formativ evaluering af matematiske kompetencer

Af: Tomas Højgaard, DPU, Aarhus Universitet & Mogens Niss, IMFUFA, Roskilde Universitet<sup>1</sup>

*I denne artikel anlægges og udfolder vi nogle perspektiver på forholdet mellem på den ene side 'matematiske kompetencer' og på den anden side 'evaluering' med henblik på at diskutere formativ evaluering af matematiske kompetencer. Først fremlægger vi vores forståelse af matematiske kompetencer som fænomen og som læringsmæssig målkategori og af evaluering som didaktisk-pædagogisk aktivitet, i begge tilfælde ved at anlægge begrebsanalytiske synsvinkler. Det danner grundlag for vores bud på potentialer og udfordringer ved at bedrive evaluering af elevers matematiske kompetencebesiddelse og -udvikling. Kernen er her dels en skelnen mellem en holistisk og en atomistisk tilgang og udfordringerne i begge, dels en tilgang til evaluering med eksplicit vægt på at efterstræbe høj validitet. Derefter præsenterer og diskuterer vi eksempler på brug af den fremlagte analyse fra udvalgte forsknings- og udviklingsprojekter. Til slut sammenfatter vi de erfaringer, disse eksperimentelle aktiviteter har kastet af sig, og de anbefalinger det giver os anledning til at fremsætte.*

## Fortale

Denne artikel angår en bestemt problemstilling, der vedrører matematikkens didaktik såvel som aspekter af matematikundervisningens praksis. Vi lægger derfor ud med en kort afklaring af, hvad vi mener med disse begreber.

Med udgangspunkt i tidligere forsøg på at definere matematikkens didaktik, vovede den ene af os (Mogens Niss) i 1997 pelsen med generelt at indkredse begrebet *fagdidaktik* vedrørende et givet undervisningsfag (Niss, 1997, s. 16-17). Denne indkredsning betjener vi os også af i denne artikel med enkelte sproglige modifikationer. For et givet undervisningsfag har det fagdidaktiske arbejdsfelt fire komponenter:

**Genstand:** Et fags didaktik er det videnskabelige arbejdsfelt, der søger at identificere, karakterisere og forstå de fænomener og processer, der indgår – eller kunne indgå – i både faktisk og potentiel *undervisning* i og *læring* af faget.

**Bestræbelse:** Hvad specielt angår forståelsen af sådanne fænomener og processer står bestræbelser på at afdække *mekanismer* og *årsagssammenhænge* i centrum for beskæftigelsen.

**Tilgange:** I behandlingen af denne opgave beskæftiger fagets didaktik sig med *alle forhold, der måtte have betydning for undervisning i og læring af faget*, uanset hvilke substansvidenskabelige, psykologiske, værdimæssige, samfundsmæssige eller andre sfærer de

---

<sup>1</sup> Der henvises til denne artikel på følgende måde: Højgaard, T. og Niss, M. (2023). Formativ evaluering af matematiske kompetencer. I Christensen, T.S.; Hobel, P.; Niss, M. og Rørbeck, H. (red.). *Sammenlignende Fagdidaktik 7*, side 37-56. <https://tidsskrift.dk/sammenlignendefagdidaktik>

stammer fra, ligesom den også betjener sig af *betragtninger, metoder og resultater fra andre discipliner og fagområder*.

**Virksomhedsformer:** Et fags didaktik rummer forskellige former for virksomhed, rækkende fra *teoretisk og empirisk grundforskning, over anvendt forskning og udviklingsarbejde til systematisk reflekteret undervisningspraksis*.

De centrale genstande i denne indkredsning er, som det fremgår, undervisning og læring. En diskussion af læringsbegrebet i forbindelse med et givet fag er en nøglesag, som vi ikke har mulighed for at gennemføre her, ikke når det gælder matematik, og slet ikke når det gælder fag generelt. Det er dog en central pointe med denne artikel, at et adækvat læringsbegreb vedrørende matematik må omfatte (meget) mere end viden, nemlig udvikling af matematisk kompetence som en handlekategori (se nedenfor). Hvad angår undervisning i et fag, vil – i den bedste af alle verdener – udtænkningen, planlægningen og gennemførelsen af konkret undervisning være informeret af didaktiske resultater, indsigter og systematiske refleksioner. Dette behøver imidlertid ikke at være tilfældet. Megen undervisning hviler først og fremmest på et magnetfelt af tradition, erfaringer, etablerede vaner og diskussioner med kolleger.

## Introduktion

Det følgende er en analyse af begreberne 'matematisk kompetence' og 'evaluering' og deres indbyrdes forhold.

Først fremlægger vi af tre grunde vores forståelse af de to begreber: For det første er det jo disse begreber, artiklen handler om. For det andet har vi erfaring for, at begge begreber kan bruges til at støtte udviklingen af god matematikundervisning. Endelig er begge begreber allerede kraftigt i spil i en lang række nyere og aktuelle forsøg på at reformere matematikundervisningen i Danmark. Derfor er det at forholde sig til begreberne en vigtig del af at kunne diskutere og eventuelt bidrage til disse reformer på et informeret grundlag.

Dernæst fremlægger vi to perspektiver på, hvilke potentialer og udfordringer der ligger i at arbejde med matematiske kompetencebeskrivelser som grundlag for at evaluere matematikmestring og giver eksempler på udviklingsmæssig brug af disse perspektiver. Det ene perspektiv, som har afsæt i kompetencekarakteristikken, handler om det, vi vil betegne den holistisk-atomistiske udfordring i forbindelse med kompetenceevaluering. Det andet perspektiv, som har afsæt i tilgangen til evalueringbegrebet og -processen, trækker på begreberne 'validitet' og 'reliabilitet'. Dem bruger vi til at argumentere for, at arbejde med kompetencemål og evaluering kan støtte – men også vanskeliggøre – hinanden som undervisningsaktiviteter, alt afhængigt af hvilke dele af en evalueringsproces, man lægger størst vægt på.

Afslutningsvis sammenfatter vi de erfaringer, den udviklingsmæssige brug af disse perspektiver har kastet af sig, og de anbefalinger vi mener, det giver anledning til at fremsætte.

## Om matematisk KOMpetence

I dette afsnit leveres en kort introduktion til den centrale begrebsforståelse og -dannelse i KOM-projektet for matematikundervisning. Dette projekt omfatter dels den såkaldte KOM-rapport (Niss & Jensen, 2002), dels et større antal efterfølgende danske og internationale opfølgingspublikationer (fx Niss & Højgaard, 2019) samt diverse forsknings- og udviklingsprojekter udført af os og/eller andre i diverse projektgrupper. KOM-projektet har som rammeværk spillet en betydelig rolle i udviklingen af matematikundervisningen og matematikdidaktikken og dens rammer i ind- og udland, men vi begrænser os her til at omtale de vigtigste begrebsorienterede aspekter af projektet.

### Om begrebet 'kompetence'

Begrebet 'kompetence' bruges på dansk i to meget forskellige betydninger, som kunne kaldes henholdsvis 'ekspertise' og 'autorisation' (Niss, 1999). Denne artikel fokuserer på indholdet i begrebet 'ekspertise', og angår altså ikke den formelle ret – autorisation – til at udføre bestemte handlinger eller bestride bestemte job, jf. begreber som 'beslutningskompetence', 'undervisningskompetence' eller formel ret til at praktisere som læge, advokat eller pilot.

Mere præcist bruges 'kompetence' her som betegnelse for *nogens indsigtfulde parathed til at handle på en måde, der lever op til udfordringerne i en given situation* (jf. Niss & Højgaard, 2019). Bag valget af denne formulering (som ikke ligger langt fra ordvalget i Niss & Jensen, 2002, s. 43) ligger bl.a. et ønske om at indfange en række karakteristiske træk ved kompetence i betydningen ekspertise.

*For det første* er kompetencebegrebet *orienteret mod handling*. Ordet 'handling' er her brugt i bred forstand, idet handlinger ikke behøver at være fysiske – mentalt at træffe en beslutning er fx også en handling. På den anden side er der ingen kompetencer forbundet med at være umådeligt vidende og indsigtfuld, hvis indsigten ikke (kan) omsættes til handling i denne brede betydning af ordet.

*For det andet* har enhver kompetence et *aktionsområde*, dvs. et – muligvis meget sammensat – domæne, inden for hvilket den kan aktiveres (jf. Niss & Jensen, 2002, s. 64-65).

*For det tredje* er kompetence et *analytisk begreb*, der forudsætter en klarlæggelse af, hvad der objektivt set indgår i udøvelsen af en given kompetence. Men begrebet er også personbundet, fordi en kompetence altid er "nogens"; kompetencer eksisterer ikke frit svævende i sig selv – det der eksisterer, er mennesker, som er kompetente til at håndtere forskellige typer af situationer.

*For det fjerde* er kompetence et *normativt begreb* derved, at vurderingen af hvilke udfordringer, en given situation rummer, involverer et normativt grundlag.

*For det femte* og sidste indgår der i vores forståelse af kompetencebegrebet elementet *indsigtfuld parathed*. Derved forstår vi, at en kompetent person besidder de intellektuelle (dvs. videnskæssige og kognitive) forudsætninger, der skal til for at udøve kompetencen i forskellige situationer. Det kan anføres, at der også kan være tale om personlighedsmæssige, emotive og holdningsmæssige former for parathed. Om end vigtige nok, er disse parathedstræk kategorialt forskellige fra dem, vi fokuserer på her.

## Fra 'kompetence' til 'matematiske kompetencer'

På den skitserede baggrund er vi nu i stand til at definere matematisk kompetence i bred forstand:

Matematisk kompetence er en persons indsigtfulde parathed til at handle på en måde, der lever op til *alle slags matematiske udfordringer* i en given situation (let modificeret oversættelse fra Niss & Højgaard, 2019).

Matematisk kompetence angår altså udøvelsen af matematisk virksomhed i bredeste forstand. Det fundamentale i denne udøvelse består i at spørge og svare *i, med og om* matematik under bemestring af matematikkens sprog og redskaber. For at opnå en nærmere bestemmelse af denne kompetence identificerede KOM-projektet otte matematiske kompetencer, der til sammen konstituerer matematisk kompetence. *En* matematisk kompetence har fokus på én bestemt type af matematiske udfordringer:

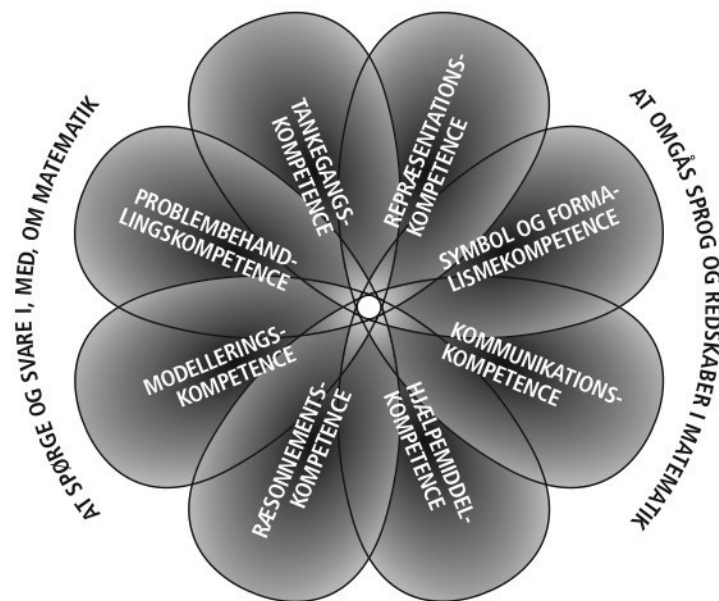
*En* matematiske kompetence er en persons indsigtfulde parathed til at handle på en måde, der lever op til *en bestemt slags matematiske udfordringer* i en given situation (Niss & Højgaard, 2019).

Uden at gå i detaljer nævner vi her de omtalte otte matematiske kompetencer:

- *Tankegangskompetence* – at være i stand til at stille matematiske spørgsmål.
- *Problembehandlingskompetence* – at være i stand til at formulere og løse matematiske problemer.
- *Modelleringskompetence* – at være i stand til at analysere og bygge matematiske modeller.
- *Ræsonnementskompetence* – at være i stand til at bedømme og frembringe argumenter til støtte for matematiske påstande.
- *Repræsentationskompetence* – at være i stand til at forholde sig til og behandle repræsentationer af matematiske objekter og processer.
- *Symbol- og formalismekompetence* – at være i stand til at omgås og behandle symbolholdige udtryk og relationer, samt de til grund liggende formalismer.
- *Kommunikationskompetence* – at være i stand til at kommunikere i, med og om matematik.
- *Hjælpemiddelkompetence* – at være i stand til at forholde sig til og behandle materielle hjælpemidler til støtte for matematisk virksomhed.

Disse kompetencer kan repræsenteres grafisk ved hjælp af den såkaldte *kompetenceblomst*, som viser, at skønt enhver kompetence har overlap med enhver anden, har de enkelte kompetencer hver deres specifikke identitet.

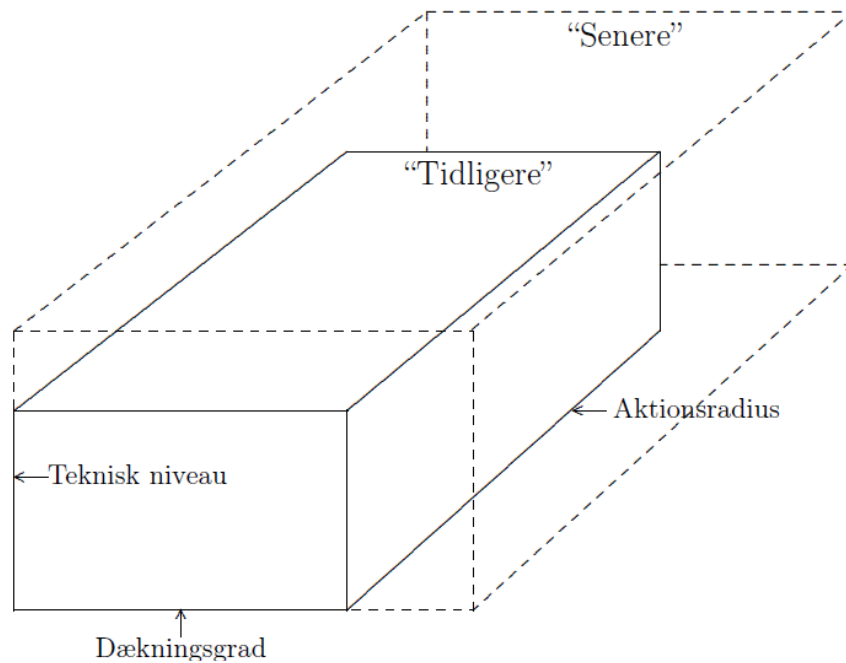




Figur 1: En visuel repræsentation – “KOM-blomsten” – af de otte matematiske kompetencer præsenteret og eksemplificeret i KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

## En tredimensionel tilgang til kompetencebesiddelse

Når det gælder en persons besiddelse af en bestemt matematisk kompetence, opererer KOM-projektet med tre dimensioner heri. Den første, kaldet *dækningsgrad*, angår det spektrum af karakteristika, som indgår i den nærmere karakteristika af kompetencen. Jo flere af disse karakteristika, personens besiddelse af kompetencen omfatter, jo større dækningsgrad har besiddelsen hos den pågældende. Den anden dimension, kaldet *aktionsradius* (jf. omtalen af et aktionsområde i karakteristikkens af kompetencebegrebet ovenfor), angår det spektrum af kontekster og situationer, hvori personen er i stand til at aktivere kompetencen med succes. Jo flere kontekster og situationer dette kan ske i, jo større aktionsradius har den pågældendes kompetencebesiddelse. Den tredje dimension, benævnt *teknisk niveau*, angår hvor avancerede matematiske begreber, emner og metoder personen kan bringe i spil i udøvelsen af kompetencen. Disse tre dimensioner er af kvalitativ, ikke af kvantitativ art, selv om de benyttede ord 'grad', 'radius', 'flere', 'større', osv. kan siges at have en kvantitativ klang. Hvis én af dimensionerne i en persons besiddelse af en given kompetence er tom, besidder personen simpelthen ikke den pågældende kompetence.



Figur 2: En visuel repræsentation af progression i en persons besiddelse af en matematisk kompetence (Niss & Jensen, 2002, s. 128)

Alt i alt kan vi indfange en persons besiddelse af en given kompetence ved – i et ”øjebliksbillede” – at karakterisere hver af dimensionerne i kompetencebesiddelsen. Ved at se på, hvordan disse dimensioner for en person ændrer sig over tid, bliver det muligt også at opnå dynamisk beskrivelse af udviklingen i den pågældendes kompetencebesiddelse. Hvis, fx, en eller flere af dimensionerne øges, uden at andre mindskes, foreligger der progression i personens kompetencebesiddelse. Omvendt er der tale om en reduktion, hvis en eller flere dimensioner mindskes, uden at andre øges. Hvis nogle dimensioner øges, mens andre mindskes, er der ikke entydigt tale om en progression eller reduktion.

## Om begrebet 'evaluering'

Ved 'evaluering' forstår vi en målrettet handling, hvor en person (eller en gruppe af personer) i en eller anden henseende udsættes for bedømmelse.

Evaluering optræder mange steder og på mange måder i uddannelsessystemet. Som aktivitet tjener det i hovedsagen tre forskellige, men ingenlunde modstridende, formål (jf. Niss, 1993):

- At frembringe *information* til forskellige slags modtagere om karakteristika hos den person, der bedømmes.
- At skabe grundlag for *beslutninger og handlinger* vedrørende den, der bedømmes.
- At forme dele af *den samfundsmæssige og sociale virkelighed*.

I denne artikel vil vi afgrænse os til at beskæftige os med de to førstnævnte formål, og fokus er på evaluering af den enkelte elev eller studerende i uddannelsessystemet snarere end på grupper af elever.

Konkrete evalueringsformer og -instrumenter kan karakteriseres ved at give svar på følgende spørgsmål:

- Hvad er *målet* for bedømmelsen?
- Hvad er de konkrete *genstande* for bedømmelse?
- *Hvornår* finder bedømmelsen sted?
- Under hvilke *omstændigheder* finder bedømmelsen sted?
- Hvilke *midler og procedurer* anvendes ved bedømmelsen?
- Hvilke *kriterier* indgår i bedømmelsen, og hvilke slags resultater *registreres*?
- Til hvem og hvordan *rapporteres* bedømmelsens resultater?

Hvis hovedformålet med en evaluering er at gøre opsummerende status over en elevs eller studerendes samlede læringsudbytte på et eller andet felt med henblik på at rapportere denne status til den lærende selv eller til andre instanser, taler vi om *summativ evaluering*. Ved at fokusere på en tilstandsbeskrivelse har summativ evaluering i sin natur et statisk perspektiv. Den udføres typisk ved afslutningen af et længere undervisnings- og læringsforløb, fx ved afslutningen af en større del af en uddannelse eller af den samlede uddannelse.

Hvis hovedformålet med en evaluering er at afdække aspekter af en elevs eller studerendes læring og udbyttet af den, typisk med henblik på at give den pågældende feedback så han eller hun kan overvåge, udvikle og kontrollere sit videre læringsarbejde og sine læringsresultater, taler vi om *formativ evaluering*. Formativ evaluering har i sin natur et udviklingsperspektiv og lægger op til senere opfølgende evaluering. Man kan også sige, at formativ evaluering har et dynamisk præg. Formativ evaluering finder typisk sted flere gange undervejs i et undervisnings- og læringsforløb, ofte med relativt korte mellemrum.

Summativ evaluering kan godt indgå i formativ evaluering, navnlig hvis den summative evaluering udføres successivt. Men summativ evaluering er forpligtet på at levere en afrundende evaluering af alle de slags læringsudbytte som ønskes gjort til genstand for evalueringen. Til forskel herfra har formativ evaluering ikke nødvendigvis en sådan forpligtelse. Den kan meget vel alene fokusere på en bestemt slags læringsudbytte såvel som på elevens eller den studerendes læringsarbejde.

## Om evaluering af matematisk kompetence

Som det vist er tydeligt ud fra den ovenstående korte indføring i KOM-projektets kerneidéer og -begreber, er matematisk kompetence en særdeles kompleks størrelse. Derfor er evaluering af matematisk kompetence ikke mindre kompleks. Faktisk kan man med rette spørge, om et sådant forehavende overhovedet er muligt. Hvis ikke, ville det være overordentligt vanskeligt at tillægge matematisk kompetence en bærende rolle i konstitueringen af matematikundervisningen i uddannelsessystemet, hvor evaluering jo indtager en nøgleposition. Vores svar er – måske ikke så overraskende – at det faktisk er muligt at evaluere matematisk kompetence, men det forudsætter inddragelse af

evalueringsformer og -instrumenter, der respekterer og indfanger kompetencebegrebets kompleksitet.

Et forhold, der komplicerer problemstillingen, er, at matematisk kompetence angår handlinger, der udøves i situationer, som rummer matematiske udfordringer. Evaluering af kompetence må derfor enten direkte inddrage sådanne situationer eller godtgøre, hvordan de benyttede evalueringsformer og -instrumenter på adækvat måde kan belyse handlinger udøvet i den slags situationer. Som forenkle(n)de analogier kan nævnes, at evnen til at køre bil eller flyve et fly ultimativt evalueres ved at sætte den kommende bilist eller pilot til at køre eller flyve i forskellige slags situationer med varierede udfordringer. Uddannelsen af læger har evaluering af deres evne til i forskellige situationer at stille diagnoser eller udføre operationer som nøgleingredienser. Evalueringen ved praktisk pædagogikum handler om at bedømme en lærerkandidats evne til at begå sig i undervisningen af sine fag på en didaktisk kompetent måde. Og så fremdeles.

### Den holistisk-atomistiske udfordring

I KOM-rammeverket konstitueres matematisk kompetence af helheden af de omtalte otte matematiske kompetencer. Hvis man skal kunne evaluere matematisk kompetence som en samlet størrelse, altså "holistisk" set, må man derfor også kunne evaluere hver af de otte kompetencer for sig. Betjener vi os af KOM-rapportens metafor om matematisk kompetence som et stort molekyle skabt ved integreret sammensætning af otte atomer – de enkelte kompetencer – skal vi altså (også) kunne evaluere disse "atomistisk" set. Pr. definition rummer hver af de otte kompetencer en lavere kompleksitet end helheden af matematisk kompetence. Det er derfor oplagt at spørge, om evaluering af hver af disse kompetencer muliggør evaluering af matematisk kompetence i bred forstand, eller om der skal mere til for at indfange helheden. Dette kalder vi den holistisk-atomistiske udfordring (jf. Niss, 2016).

I kraft af kompetencebegrebets natur må evalueringen af såvel matematisk kompetence som kompetencer hvile på at elever/studerende sættes i situationer, der involverer udførelsen af hverv, som indebærer udøvelse af kompetencen, og hvor bedømmeren enten direkte eller indirekte har adgang til at følge med i, hvordan hvervene udføres, og ikke kun i resultatet af udførelsen. Skal bedømmeren ikke lade sig nøje med en behavioristisk undersøgelse af elevens eller den studerendes adfærd, men også søge at indfange og vurdere de overvejelser og valg, der ligger bag denne adfærd, må bedømmeren have mulighed for at tale med eleven/den studerende undervejs, mens hvervet udføres, eventuelt (tillige) før eller efter udførelsen.

For at opnå et tilstrækkeligt dækkende billede af elevens/den studerendes kompetence, er det ofte nødvendigt at en flerhed af varierede situationer med varierede typer af hverv tages i betragtning i bedømmelsen. Her viser både danske og internationale erfaringer (forstået som systematisk reflekterede observationer fra praktisk virksomhed, i stil med det engelske begreb "experience") og forskningsmæssige erkendelser, at en vekslen mellem situationer, der kræver aktivering af matematisk kompetence i holistisk form, og en række situationer, hvor en enkelt eller til nød et par kompetencer i atomistisk form er på dagsordenen ad gangen, er velegnet til at give et brugbart billede af matematisk kompetence i sin helhed (Blomhøj & Jensen, 2003; Kaiser & Brand, 2015). En af de variationsmuligheder, der kan bringes i spil, er

KOM-projektets tre dimensioner i kompetencebesiddelse: dækningsgrad, aktionsradius og teknisk niveau. For at sætte fokus på kompetencebesiddelse i så ren form som muligt, er det ofte ønskeligt at lade elever og studerende arbejde med hverv, hvor de tekniske udfordringer er lave relativt til elevens/den studerendes uddannelsestrin. Kan de personer som bedømmes begå sig godt i sådanne situationer, kan man i evalueringen skrue op for det tekniske blus.

Det fremgår, at der ikke er grænser for den kompleksitet af evalueringssituationer, som med rette kan komme på tale ved evaluering af matematisk kompetence. Jo mere nuanceret en evaluering man ønsker, jo flere – og jo flere forskellige – evalueringssituationer er der brug for. I uddannelsesvirkelighedens verden er det selvsagt nødvendigt at gå pragmatisk til værks og betjene sig af håndterligt få evalueringssituationer og -instrumenter, der imidlertid alligevel rækker til at frembringe et rimeligt billede af kompetencebesiddelsen.

Også når det gælder formativ tilbagemelding af evalueringssituationer om matematisk kompetence til den, der evalueres, er kompleksiteten omfattende. Tilbagemeldingen, der i hovedsagen er af kvalitativ art, finder utvivlsomt bedst sted i samtaler med den pågældende, fordi tilbagemeldingen kan gives i dialogisk form med spørgsmål og svar etc. Indholdsmæssigt set kan tilbagemeldingen med fordel ske langs det sæt af variationer, der har indgået i de benyttede evalueringssituationer, hverv etc. En oplagt mulighed i den forbindelse er at udbygge information om besiddelsen af den evalueredes matematisk kompetence i sin helhed med information om besiddelsen af de enkelte kompetencer, fx med inddragelse af de tre dimensioner heri.

Det faktum, at evaluering af matematisk kompetence er så omfattende og komplekst et forehavende, gør, at der ikke foreligger et stort forskningsunderstøttet empirisk materiale, som dokumenterer en mangfoldighed af vellykkede evalueringstiltag. Vi må lade os nøje med at præsentere nogle eksempler og med at pege på konkrete udviklingsmuligheder.

## Undervisningsformativ evaluering

Som nævnt fokuserer formativ evaluering på at give den enkelte elev eller studerende konkrete tilbagemeldinger til støtte for hans eller hendes fortsatte læringsarbejde. Der er imidlertid grund til at se nærmere på en anden, men dog beslægtet form for evaluering, som sigter mod at levere information til læreren om, i hvilke henseender, på hvilke måder og i hvilken grad den gennemførte undervisning fremmer modtagernes læring. Med udgangspunkt i evaluering af læringsudbytte og -udvikling hos elever eller studerende, er sigtet her at levere didaktisk ”brændstof”, som sætter læreren i stand til at monitorere og, om ønskeligt, justere sin undervisning i bredeste forstand med henblik på at støtte og videreudvikle deltagernes læring. Vi har valgt at kalde evaluering, der har dette sigte, for *undervisningsformativ evaluering*. Undervisningsformativ evaluering går med andre ord ud på formativt at evaluere lærerens undervisning ved hjælp af evaluering af elevernes/de studerendes læring. Dette betyder ikke, at evalueringen af deltagerne til dette formål behøver at være formativ; også summativ evaluering kan benyttes til dette formål, forudsat at der ikke går for lang tid mellem evalueringssituationerne.

Undervisningsformativ evaluering kan enten udføres af læreren selv eller under medvirken af observerende eller deltagende kolleger og/eller forskere, som det fx kendes fra de japanske inspirerede *lesson studies* (se fx Rasmussen, 2018). Ud over at have selvstændig

værdi som middel til lærerens didaktiske refleksioner og udvikling af sin undervisning, kan undervisningsformativ evaluering bringes i spil til erstatning af egentlig formativ evaluering som defineret ovenfor. Det kan for eksempel være i situationer, hvor det ikke er meningsfuldt at levere formativ feedback til eleverne, fordi de er for unge til at modtage og forstå den indgående information, eller i situationer hvor der ikke er tilstrækkelige rammer eller ressourcer til rådighed for fokuserede personlige tilbagemeldinger til undervisningens modtagere om udviklingen i deres læring.

## Om at gennemføre formativ evaluering af matematisk kompetence

Forenklet sagt kan gennemførelsen af en given evaluering siges at bestå af tre delprocesser (Højgaard, 2008):

- *Karakteristik* af det, man er på udkig efter i evalueringen.
- *Identifikation* af på hvilken måde og i hvilket omfang det man er på udkig efter, er til stede i evalueringssituationen eller -forløbet.
- *Vurdering* af de gjorte fund.

Hvad kan man sige om muligheden for at gennemføre god evaluering af elevers/studerendes kompetence? Det afhænger ikke overraskende af, hvad man mener med ”god”.

### Validitet versus reliabilitet

Vi ser først på en klassisk distinktion, der kan bruges som et tænkeværktøj, når man diskuterer kvaliteten af en konkret evalueringsform (jf. Højgaard, 2008, som dette afsnit er baseret på):

- *Validitet*: Fanger evalueringen *essensen* af det, den søger – og hævder – at evaluere?
- *Reliabilitet*: Er evalueringen pålidelig, dvs. vil forskellige kyndige bedømmere nå frem til de samme konklusioner ved analyse af outputtet fra evalueringssituationen (”bedømmeruafhængighed”)?

Begge disse kvalitetskriterier vedrører evalueringsprocessen som helhed, men som sprogbrugen signalerer, lægger de to kriterier vægten på hver sin del af processen: Validitet drejer sig om at fastholde fokus på det, man egentlig forsøger at evaluere, og vurderingen af, hvad der er god og mindre god evaluering, tager derfor afsæt i, i hvilken grad dette er tilfældet, dvs. i karakteristikdelen af evalueringsprocessen. Reliabilitet drejer sig om at gøre selve vurderingen af outputtet så gennemskuelig og upersonlig som muligt, og tager derfor naturligt nok afsæt i denne del af evalueringsprocessen.

Ved udformningen af en konkret evaluering vil det være oplagt at tilstræbe en kombination af høj validitet og høj reliabilitet, hvis man mener det er inden for praktisk rækkevidde. Det vil det være, hvis det man er på udkig efter, kan karakteriseres på så ligefrem en måde, at identifikations- og vurderingsdelen af evalueringen bliver simpel at gennemføre.

Det gælder eksempelvis, hvis *multiple choice*-spørgsmål eller oplæg til at udøve færdigheder – ”Hvad er  $100 \cdot 8 \cdot 35$ ?” – er tilstrækkelige til at indfange ambitionen med evalueringen (og den bagved liggende undervisning). For os er det i en vis forstand selve kernen i begrebet ’færdighed’, som vi bruger som betegnelse for nogens evne til sikkert, og gerne også hurtigt, at udføre en given handling med utvetydige og indiskutable karakteristika (Højgaard, 2008). Det er den slags kunnen, som er nem både at karakterisere, identificere og vurdere, fordi den optræder i ”0-1-situationer”, hvor man enten kan eller ikke kan udføre den givne utvetydige handling.

Hvis man arbejder med kompetencer som et centralt læringsmål, trækker man demonstrativt i den modsatte retning. ”Brug matematisk modellering til at undersøge hvor mange bøger der cirka er på skolebiblioteket”. Med en formulering som denne, udnyttes det potentiale kompetencebeskrivelser har med henblik på at eksplicite nogle ikke-trivielle ambitioner med en given undervisning. Fokus på kompetence styrker således karakteristikkdelen af en evaluering og bidrager dermed direkte til at øge validiteten af evalueringen.

De ikke-trivielle ambitioner betyder imidlertid også, at brugen af kompetencemål umiddelbart gør de dele af en evaluering, der handler om at identificere og vurdere en persons læring, alt andet end simple at gennemføre. Derfor er det forventeligt, at det oplagte mål om at kombinere høj validitet og høj reliabilitet bliver vanskeligt at realisere. Det skaber den udfordring, der altid ligger i at skulle forvalte en situation, som man på forhånd ved næppe kan håndteres som man ideelt set kunne ønske sig den, hvorfor der derved er fare for at ægte dilemmaer opstår.

### Hold fast i høj validitet!

Den udfordring kan man forholde sig til på to forskellige måder, når man skal designe og gennemføre en konkret evaluering. Firkantet sat op kan man enten have et krav om høj validitet som udgangspunkt, for dernæst at tilstræbe, at reliabiliteten bliver så høj som muligt, når nu validitet prioriteres; eller man kan designe evalueringen med afsæt i høj reliabilitet som et *must* og så arbejde for, at validiteten bliver så høj som muligt med denne randbetingelse. Den sidstnævnte tilgang er den, der typisk benyttes ved formulering af skriftlige eksamensopgaver, herunder så godt som alle centralt stillede prøve- og eksamensopgaver i tilknytning til matematikundervisning.

Problemet ved denne tilgang er den store risiko for at ende i en ”Storm P.-situation”, der svarer til tegneseriestriben, hvor en mand leder efter sine tabte nøgle under lygtepælen, fordi det er der, der er lys, skønt manden erkender at have tabt nøglerne i mørket: Opgaverne bliver formuleret på en måde, så der er så meget ”lys” over foretagendet, at enhver fagkyndig person umiddelbart kan forstå og vurdere såvel spørgsmål som alle de mulige svar. Men den del af læringen, der kastes lys over, er ikke den del, man ifølge undervisningsmålene, er interesseret i at afdække (og opnå).

Vi har det modsatte udgangspunkt. Vores fokus i arbejdet med evaluering er at sikre høj validitet på grund af evalueringens bredt erkendte kraftige indvirkning på undervisning og læring – *what you assess is what you get*. Hvis validiteten af en evaluering er høj, kan den bruges til at holde undervisning og læring på ret kurs ved at bidrage til *constructive alignment*

(Biggs & Tang, 2011), hvorimod en evaluering med lav validitet (men måske med høj reliabilitet) meget nemt risikerer at virke som ”sirenerne” i Odysseen, der let kan bringe skuden ud af kurs.

Afsættet i validitet har afgørende og konkret betydning i forhold til valg af evalueringsinstrumenter. Evaluering består principielt af to forbundne men principielt forskellige komponenter. Den første komponent er selve *afdækningen af den læring*, der har fundet sted hos den elev eller studerende, som skal evalueres, set i forhold til det man er på udkig efter i evalueringen. Den anden komponent er udvælgelsen og formidlingen af den *information* om resultaterne af læringsafdækningen, der skal viderebringes til relevante modtagere, herunder eleven/den studerende selv. Såvel læringsafdækningen som informationsformidlingen kræver evalueringsinstrumenter, der på adækvat måde kan indfange den læring der er i fokus, og den information der skal formidles. Når det drejer sig om komplekse former for læring, er det en krævende opgave at finde eller konstruere valide, brugbare evalueringsinstrumenter. Jo mere kompleks den læring er, som skal evalueres, jo mindre egner simple, overfladefærdighedsfokuserede evalueringsinstrumenter sig til opgaven.

Når hensigten er at evaluere kompetence, står validitet af evalueringen altså i centrum. Det kan – helt svarende til, hvordan Biggs og Tang (2011) foreslår, at man arbejder med at etablere *constructive alignment* i sin undervisning – efterstræbes ved at arbejde med evalueringsdesignet ”oppefra og ned” (jf. fx KOM-rapportens kapitel 9, hvor der også findes konkrete eksempler) – og svare på spørgsmål i stil med disse:

- Hvilke (*kompetence*)*læringsmål* er der for den undervisning, jeg gerne vil evaluere?
- Hvordan *forstår* og *beskriver* jeg disse mål, også hvis det ikke i udgangspunktet er mig, der har valgt og formuleret dem?
- Hvilke former for *aktivitetsoplæg* for evaluering kan jeg finde eller konstruere, som vil være velegnede til at hjælpe eleverne med at udvikle sig *i retning af* de opstillede mål?
- Hvilke *tegn* i elevernes aktivitet skal jeg være særlig opmærksom på, for at kunne *identificere* det omfang og den måde, hvorpå det, jeg er på udkig efter, er til stede i evalueringssituationen?
- Hvordan vil jeg *vurdere* det, jeg har identificeret?

## Modellen af en formativ evalueringsproces anvendt i praksis

Denne oppefra-og-ned-model af en formativ evalueringsproces bliver aktuelt brugt som grundstruktur i et langvarigt forsknings- og udviklingsprojekt, som i forlængelse af begrebsudviklingen i denne artikel har fået præciseret sit navn til *Undervisningsformativ evaluering af kompetenceorienteret matematikundervisning* (UFE). I projektet samarbejder en af os, Tomas Højgaard, med matematiklærere i grundskolen om at tilrettelægge, gennemføre og evaluere eksemplariske forløb i matematikundervisningen på 1.-9. klassetrin, hvor én udvalgt matematisk kompetence efter tur udgør det læringsmæssige sigtepunkt:



*Tilrettelæggelsen* af hvert forløb sker på et møde på en times tid, hvor Tomas og den deltagende lærer a) drøfter hvad de opfatter som kernen i en udvalgt matematisk kompetence, b) drøfter hvordan man kan undervise med sigte på denne kompetence på det givne klassetrin, og c) beslutter med hvilke didaktiske karakteristika den forestående forsøgsundervisning konkret skal gribes an.

*Gennemførelsen* af forsøgsundervisningen står læreren for, mens Tomas observerer og videodokumenter, hvad der foregår.

*Evalueringen* af forløbet sker ligeledes på et møde på en times tid, hvor Tomas og den deltagende lærer drøfter, i hvilket omfang og på hvilke måder det lykkedes at realisere de tilsigtede didaktiske karakteristika ved forsøgsundervisningen, samt om de havde de forestillede konsekvenser for elevernes læreproces. Desuden gennemfører og lydoptager Tomas et ca. fem minutter langt semistruktureret interview med læreren, som efter at have set et udvalgt videoklip fra forsøgsundervisningen reflekterer over spørgsmål, som strukturelt følger den ovenstående model af en formativ evalueringsproces.

Sådanne kompetenceevalueringsepisoder er der gennemført én af for hver matematisk kompetence i både indskoling (1.-3. klassetrin), mellemtrinnet (4.-6. klassetrin) og udskoling (7.-9. klassetrin). Alle disse episoder er samlet i et overblikssark, som kan tilgås via forsiden på Tomas Højgaards hjemmeside <http://au.dk/tomas@edu>. Arket er skabt for at give et samlet overblik over de kompetenceforståelser og opgaver, der bruges i UFE-projektet, og den støtte der tilbydes i forbindelse med vurdering af elevernes kompetencebesiddelse. Således rummer arket støtte til arbejdet med både læringsmål, aktivitetsoplæg og tegn på kompetencebesiddelse, jf. modellen af en formativ evalueringsproces. Nedenfor gør vi som en slags ”læsevejledning” rede for, hvordan hvert af disse elementer optræder i arket, og hvordan de kan bruges som led i at støtte op om læreres evaluering af elevers kompetencebesiddelse.

Som konkret eksempel beskriver vi den kompetenceevalueringsepisode fra overblikssarket, der med sigte på matematisk hjælpemiddelkompetence blev gennemført i en 1. klasse. Vi har valgt at præsentere et projekt fra 1. klasse for at sikre, at også læsere uden matematisk eller matematikdidaktisk baggrund kan følge fremstillingen. Episoden er – som mange andre episoder i overblikssarket – en del af forsknings- og udviklingsprojektet *Meningsfuld målstyret matematikundervisning*. I logbogen herfra, der som ovennævnte overblikssark kan tilgås via forsiden på Tomas Højgaards hjemmeside, er episoden beskrevet som modul 2.

Via denne logbog gives der også adgang til videoklip fra undervisningen, hvoraf nogle bringes i spil herunder. For at få lov at afspille videoklippene, samt de ledsagende interview med hhv. lærer og en elevgruppe, skal man ifølge aftale med deltagerne angive kodeordet Tomas. Det er i orden at dele dette kodeord i kollegiale miljøer, men det må selvfølgelig ikke offentliggøres mere generelt.

## Læringsmål

I venstre side af overblikssarket findes en beskrivelse af, hvad der i de omtalte projekter opfattes som de centrale elementer i hver matematisk kompetence. Desuden linkes der til nogle videoer på YouTube, som sætter flere ord på denne forståelse af kernen i og arbejdet med hver kompetence. Begge dele kan man som lærer bruge som støtte til at udvikle egen kompetenceforståelse, til at formulere læringsmål for og med eleverne og til at skærpe sit eget og elevernes blik for, hvad man skal være på udkig efter i evalueringssituationen.

*I det konkrete hjælpemiddelkompetence-eksempel* blev læreren og Tomas enige om at benytte den model af hjælpemiddelkompetencens centrale elementer, som er gengivet i figur 3, og som er forklaret og eksemplificeret i den [hjælpemiddelkompetence-YouTube-video](#) (Højgaard, 2017), som der også linkes til i overblikssarket.

	Et hjælpemiddel	Flere hjælpemidler
Færdigheds-niveau	Anvende (betjene sig af)	Skifte
Kompetence-niveau	Vurdere (kendskab til)	Vælge (ud fra indblik i muligheder og begrænsn.)

Figur 3: En model af de centrale elementer i matematisk hjælpemiddelkompetence (Højgaard, 2017)

Med afsæt i denne forståelse af matematisk hjælpemiddelkompetence nåede læreren og Tomas på det ovennævnte tilrettelæggelsesmøde frem til, at det konkrete læringsmål, som de ville sigte mod i tilrettelæggelsen, var, at eleverne blev i stand til at vælge hjælpemidler, som er hensigtsmæssige i forhold til de udfordringer, de oplever i konkrete og for dem hverdagsnære situationer, hvor længden af forskellige ting skal bestemmes. I modellen i figur 3 svarer det til at være i det mest ambitiøse felt nederst til højre, hvor man i en given kontekst er kompetent til at vælge mellem flere forskellige alternative hjælpemidler ud fra indblik i hver af disse hjælpemidlers muligheder og begrænsninger.

## Aktivitetsoplæg og arbejdet hermed

Overblikssarket rummer på 7.-9. klassetrin en opgave til evaluering af hver af de centrale aspekter af hver kompetence på hvert klassetrin, fordi der til disse klassetrin er udgivet en evalueringsslogbog (Højgaard & Johansen, 2021), som har fremskyndet processen med systematisk at udvikle disse opgaver. For de øvrige klassetrin er der tale om en påbegyndt proces frem mod en sådan fuld udfyldning af strukturen.

Med afsæt i lignende opgaver fra lærebogssystemet *Matematrix* er opgaverne til kompetenceevaluering skabt ud fra den ovennævnte beskrivelse af 2-3 centrale elementer i hver matematisk kompetence. Dette er gjort for i den enkelte opgave bedre at kunne fokusere evalueringen på bestemte aspekter af kompetencen, og for derved samlet set at kunne evaluere med fuld dækningsgrad.

*I det konkrete hjælpemiddelkompetence-eksempel* blev der taget udgangspunkt i opgaverne på [side 82 i lærebogen \*Matematrix 1B\*](#) (Gregersen, Hedegaard, Højgaard & Petersen, 2015) for 1. klasse. Her udfordres eleverne til at undersøge sig selv og hinanden ved at foretage målinger af forskellige længder. I forhold til det ovenfor beskrevne hjælpemiddel-læringsmål var det hensigtsmæssige ved dette aktivitetsoplæg, at de forskellige ting, eleverne skal måle, inviterer til brug af forskellige måleredskaber. Det gælder fx de to indledende udfordringer, hvor eleverne skal måle henholdsvis deres højde og omkredsen rundt om deres hoved. Derved kommer den hjælpemiddel-mæssigt kompetente adfærd til at involvere både valg af og situationsbetinget skift mellem forskellige hjælpemidler.

Det gode aktivitetsoplæg til at udvikle og evaluere en given kompetence skal bidrage til at skabe en situation, hvor den kompetente form for handlen er naturlig og hensigtsmæssig. Uanset hvor gennemtænkt et aktivitetsoplæg er, kan det imidlertid ikke i sig selv etablere en ”kompetenceegnet situation”. Det kræver først og fremmest, at læreren over for eleverne kommer med ledsagende forklaringer, spørgsmål og kommentarer, som bidrager til at rammesætte situationen på en kompetenceorienteret måde (Højgaard, 2021). Som det nok mest centrale element heri peger mange erfaringer (se fx Sølberg, Bundsgaard & Højgaard, 2015; Højgaard & Winther, 2021) på, at det ofte er en god idé at rammesætte både undervisnings- og evalueringssituationen på en måde, så eleverne ved, hvilken form for kompetent adfærd de udfordres på. Derfor er det vigtigt, at eleverne er bevidste om, hvilke kompetencemål de forventes at demonstrere i evalueringssituationen, jf. ovenstående omtale af læringsmålene.

*I det konkrete hjælpemiddelkompetence-eksempel* foregik det ved, at både [lærerens indledende rammesættende oplæg](#) og [afrundende opsamling](#) havde et dobbelt fokus på dels begreber knyttet til længdemåling, dels valg af hjælpemiddel til konkret at gennemføre sådanne målinger.

## Tegn på og vurdering af kompetencebesiddelse

Som del af udviklingen af kompetenceevalueringsepisoder har mange af de kompetenceorienterede opgaver i overblikssarket været prøvet af som evalueringsværktøj, jf. det gennemgående eksempel med fokus på hjælpemiddelkompetence. Det har gjort det muligt at støtte læreres arbejde med at se tegn på elevernes kompetencebesiddelse ved at give konkrete eksempler på, hvordan det kan foregå. Således linkes der i overblikssarket i tilknytning til hver kompetenceevalueringsepisode til:

- et *videoklip* med elever, der arbejder med den angivne opgave.
- et *interview* (som følger den her angivne model af en formativ evalueringssituation) med den involverede lærer, der mundtligt evaluerer de viste elevers præstationer i forhold til det valgte kompetencemål.
- et af Tomas udfyldt *evalueringssark* med en tilsvarende skriftlig evaluering.

*I det konkrete hjælpemiddelkompetence-eksempel* viser [videoklippen](#) to elever, som arbejder med de ovennævnte udfordringer om at måle deres højder og omkredsen rundt om deres hoveder. Som beskrevet i logbogen benytter de uden nærmere drøftelse en medbragt

tommestok til højdemålingen. Det volder ikke eleven H nogen problemer, men makkeren B bøvler lidt med, hvordan tommestokken som måleredskab skal håndteres. Først måler hun fra den gale ende, og da hun vender tommestokken om, får hun i første omgang ikke foldet den helt ud, og starter derfor målingen fra det sted, den i situationen er bøjet. Målingen af omkredsen af deres hoveder medfører et oplevet behov for at skifte måleredskab, hvilket H helt umiddelbart er opmærksom på: "Jeg går lige rundt og henter sådan en ting, som vil være smart til at måle det her", mumler hun for sig selv. Hun kommer tilbage med et målebånd, som de to elever kort får lærerens hjælp til at bruge, hvorefter målingerne gennemføres ubesværet.

I [det efterfølgende interview med Tomas](#) italesætter læreren den kompetenceforståelse og det læringsmål, som er beskrevet i ovenstående afsnit herom. Derefter beskriver hun, hvilken besiddelse af matematisk hjælpemiddelkompetence, eller mangel på samme, hun ser i det udvalgte videoklip, samt hvilke tegn hun baserer denne vurdering på. En tilsvarende vurdering findes skriftliggjort i [det af Tomas udfyldte evalueringsark](#).

## Eksempler fra matematikvejlederuddannelsen ved RUC 2012-2020

I årene 2012-2020 udbød RUC en særlig forskningsbaseret uddannelse af matematikvejledere i gymnasiet med henblik på at sætte de uddannede matematikvejledere i stand til at hjælpe gymnasieelever med matematikspecifikke læringsvanskeligheder (se Niss & Jankvist, 2016; 2017; 2020). Uddannelsen varede tre semestre på deltid og var i alt normeret til 30 ECTS-point. Blandt uddannelsens mange elementer var samtaler med elever, enkeltvis eller i to-tre personers grupper, om matematiske hverv, der rummede udfordringer for de pågældende elever. Sigtet med samtalerne, der blev gennemført af elevernes lærere, eventuelt sammen med lederne af vejlederuddannelsen (Mogens Niss og Uffe Jankvist), var dels diagnosticerende, dels afhjælpende. Blandt de hverv som elever arbejdede med, var opgaver der omhandlede aspekter af enten ræsonnementskompetencen eller modelleringskompetencen. Vi giver her to eksempler på sådanne samtaler, begge vedrørende ræsonnementskompetencen.

I den første samtale (Rosendahl & Kærgaard, 2020), der fandt sted med eleven "Christian" (et pseudonym) fra 2g på htx, deltog elevens lærere, mens Uffe Jankvist og Mogens Niss deltog som observatører. Christian havde gennem interviews og på anden måde i den almindelige undervisning tilkendegivet, at matematik for ham bestod af en sværm af usammenhængende og uforståelige regler, der skulle huskes udenad og som kun gav mening for enkelte, helt særlige elever, som han bestemt ikke regnede sig selv for at være én af. Det stod klart for lærerne, at Christian ikke blot savnede ræsonnementskompetence i matematik, men var overbevist om, at ræsonnementer intet havde at gøre i faget. Til gengæld havde lærerne observeret, at han godt kunne udføre ræsonnementer uden for matematikken, fx i programmering. De iværksatte derfor et kortvarigt interventionsforløb, hvor de ønskede at få ham til at indse, at der var logik og sammenhæng i matematikken, og at begge dele var tilgængelige for ham. De ønskede med andre ord at styrke hans matematiske ræsonnementskompetence. Det pågældende interventionsforløb muliggjorde også umiddelbar kvalitativ evaluering, "in situ", af (ændringer i) Christians ræsonnementskompetence, samt umiddelbar tilbagemelding til Christian om de fremskridt, han havde gjort undervejs.

Tilbagemeldingen indebar udpegning af, hvor fremskridtene havde fundet sted og en dialog med Christian, hvorunder han selv kunne erkende disse fremskridt. Der er med andre ord tale om et eksempel på formativ evaluering af ræsonnementskompetencen, hvor både læringsafdækning og information var på dagsordenen. Til oplysning kan det nævnes, at interventionsforløbet angik sætninger fra elementær algebra (Rosendahl & Kærgaard, s. 105-116).

I den anden samtale (Schou, 2016, s. 39-43), der fandt sted mellem tre htx-elever, uden lærerindblanding, skulle eleverne fremsætte og bevise en hypotese om vinkelsummen i en  $n$ -kant og derefter overveje, om deres bevis gjaldt for alle  $n$ -kanter. Ved først at betragte vinkelsummen for trekanter og firkanter nåede eleverne i et antal skridt frem til at fremsætte den hypotese, at for hver ny kant der tilføjes, forøges vinkelsummen med  $180^0$ , således, at vinkelsummen af en  $n$ -kant er  $180^0 + 180^0(n-3)$ , hvis  $n$  er større end eller lig med 3. Eleverne nåede frem til dette ad induktiv vej og konstaterede, at resultatet passede for alle  $n = 3, \dots, 9$ . De var ikke i stand til at afgøre, om dette ræsonnement var tilstrækkeligt til at gælde for et bevis, ligesom de faktisk ikke fremførte et egentlig (holdbart) bevis, men gjorde alligevel fremskridt i udviklingen af ræsonnementskompetencen. I kraft af den transskriberede samtale kunne deres lærer (og andre med adgang til teksten) med anvendelsen af begreber og didaktiske teorier om matematiske ræsonnementer evaluere den aktuelle besiddelse af ræsonnementskompetencen i sammenhæng med plangeometri, som den pågældende sekvens var udtryk for hos de tre elever. I dette eksempel indgår der ingen tilbagemelding til eleverne om deres kompetencebesiddelse, så der er ikke tale om formativ evaluering i egentlig forstand, højst i indirekte forstand, idet elevernes diskussion fremmede deres overvejelser om matematiske ræsonnementer.

Disse eksempler viser, hvordan man gennem elevens situationsbestemte arbejde med konkrete hverv kan komme ind på livet af vigtige aspekter af deres besiddelse af en given matematisk kompetence. Men det fremgår også, at der netop kun er tale om aspekter. En rimeligt dækkende kompetenceevaluering kræver inddragelse af en mangfoldighed af evalueringssituationer.

## Erfaringer og anbefalinger

Som eksemplificeret ovenfor har vi arbejdet med formativ evaluering af matematisk kompetence i forskellige sammenhænge, og de erfaringer og forskningsmæssige erkendelser, vi derigennem har gjort os, kan sammenfattes i tre punkter.

For det første gør det at insistere på høj validitet i forhold til ikke-trivielle mål formativ evaluering til en både kompleks og meget meningsfuld udfordring.

For det andet er arbejdet med at forstå en kompetences ”kerne” afgørende for, at resten af evalueringsprocessen lykkes: Hvis man er ”kommet ind under huden” på en kompetence, bliver arbejdet med aktivitetsoplæg og identifikation af tegn en naturlig konkretisering af denne forståelse, fordi det alt sammen, i kraft af kompetencebegrebets natur, drejer sig om elevernes matematiske handlinger i udfordrende situationer.

For det tredje kan man i vurderingsdelen af en evaluering til brug for undervisningsformativ evaluering, få processen til at understøtte god undervisningspraksis ved at lægge vægten på en kvalitativ karakteristik af om eleverne udvikler sig i den rigtige

retning, frem for at lade sig nøje med en fattig kvantitativ bedømmelse af deres placering på en éndimensional (karakter)skala.

Summa summarum: Hvis man som vi mener, at høj evalueringsmæssig validitet er afgørende for matematikundervisningens muligheder for at trives og udvikle sig, må man gøre denne erkendelse til en præmis for arbejdet med konkrete evalueringsformer, og derefter, med det udgangspunkt, udvikle metoder til at øge reliabiliteten. Og hvis det helt rimelige og uomgængelige krav om at gennemføre god evaluering som del af sin undervisning ses i det lys, bliver det efterhånden muligt at forfølge faglige kompetencemål.

Som en afsluttende bemærkning må det indrømmes, at der i Danmark foreligger relativt få systematiske forsknings- og udviklingsarbejder vedrørende formativ evaluering i egentlig forstand af matematiske kompetencer, især hvad angår tilbagemelding til elever og studerende om deres kompetencebesiddelse og -udvikling. Der er derfor brug for en øget og fokuseret indsats på dette felt.

## Referencer

- Biggs, J. & Tang, C. (2011). *Teaching for quality learning at university* (4. udg.). McGraw-Hill.
- Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139.
- Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. I W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (red.), *Applications and Modelling in Mathematics Education: The 14th Study* (s. 45-56). Springer.
- Gregersen, P., Hedegaard, C., Højgaard, T. & Petersen, L. K. (2015). *Matematrix 1B* (2. udg.). Alinea.
- Højgaard, T. (2008). Kompetencer, færdigheder og evaluering. *Matematik*, 7, 43-46.
- Højgaard, T. (2017). *Hjælpemiddelkompetence*. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=0J-xZm6jRdc&t=53s>
- Højgaard, T. (2021). *Kompetenceorienteret matematikundervisning*. Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning. <http://matematikdidaktik.dk/temaer/kompetenceorienteret-matematikundervisning/>
- Højgaard, T. & Johansen, S. G. (2021). *Matematrix 7.-9. klasse, Logbog/Web*. Alinea.
- Højgaard, T. & Winther, N. (2021). Facilitering af kompetenceorienteret matematikundervisning: Erfaringer med kommunalt forankret, skolebaseret udvikling af lærerkompetencer. *MONA*, 1, 50-68.
- Jensen, T. H. (2007). Assessing mathematical modelling competency. I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (red.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (s. 141-148). Horwood.

- Kaiser, G. & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. I G. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (red.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (s. 129-149). Springer.
- Niss, M. (red.) (1993). *Investigations into Assessment in Mathematics Education: An IMCI Study*. Kluwer.
- Niss, M. (1997). Fagdidaktiske problemstillinger. Hvad kan fagdidaktik være? I Undervisningsministeriet, Gymnasieafdelingen (red.). *Fagdidaktikrapport* (s. 11-33). Undervisningsministeriet.
- Niss, M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddannelse*, 9, 21-29.
- Niss, M. (2016). Assessment of mathematical competencies. I E. Castro, E. Castro, J.L. Lupiáñez, J.F. Ruiz, & M. Torralbo (red.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (s. 75-88). Comares.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28.
- Niss, M., & Højgaard, T. (forthcoming). Mathematical Competencies in Mathematics Education: Past, Present, and Future. Springer.
- Niss, M. & Jankvist, U. T. (red.) (2016). *Fra snublesten til byggesten – matematikdidaktiske muligheder*. Frydenlund.
- Niss, M. & Jankvist, U. T. (red.) (2017). *Læringsvanskeligheder i matematik - hvordan kan de forstås og afhjælpes?* Frydenlund.
- Niss, M. & Jankvist, U. T. (red.) (2020). *Matematikvejledning i gymnasiet – anvendelse af teori i praksis*. Frydenlund.
- Niss, M. & Jensen, T. H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, nr. 18-2002. Undervisningsministeriet.
- Rasmussen, K. (2018). Lektionsstudier fra metode til tankegang – forståelser og misforståelser omkring lektionsstudier i Danmark. *MONA*, 2, 58-73.
- Rosendahl, T. & Kærgaard, H. N. L. (2020). Udvikling af matematikforståelse med elevens egen logik. I M. Niss & U. T. Jankvist (red.), *Matematikvejledning i gymnasiet – anvendelse af teori i praksis* (s. 93-117). Frydenlund.
- Schou, M. H. (2016). Klasserumsintervention om matematisk ræsonnement. I M. Niss & U.T. Jankvist (red.), *Fra snublesten til byggesten – matematikdidaktiske muligheder* (s. 29-46). Frydenlund.

## English summary

*In this article, we apply and explore a number of perspectives on the relationship between 'mathematical competencies' and 'assessment' in order to discuss formative assessment of mathematical competencies. We begin by presenting our understanding of mathematical competencies as a phenomenon and as a category of learning outcomes, as well as our understanding of assessment as an educational and instructional activity. In both cases, we do so through conceptual analysis. This presentation provides a foundation for our outline of potentials and challenges when performing assessment of students' mathematical competencies and their progress in this regard. At the core is a distinction between a holistic and an atomistic approach and the respective challenges they present, and also an approach to assessment that explicitly emphasises the pursuit of high validity. We then present and discuss examples of how this analysis has been used in a number of research and development projects. Finally, we summarise the experiences gained from these experimental activities and make recommendations based on these experiences.*

## Keywords

Formative assessment, formative assessment for teaching, competence, mathematical competencies, classroom studies, curriculum studies.

## Nøgleord

Formativ evaluering, undervisningsformativ evaluering, kompetence, matematiske kompetencer, klasserumsstudier, fagdidaktik

## Forfatteroplysninger

Tomas Højgaard

Lektor, DPU, Aarhus Universitet

Muligheder og vanskeligheder ved at bruge faglige kompetencebeskrivelser som didaktisk udviklingsværktøj

tomas@edu.au.dk

ORCID: 0000-0003-0771-9061

Mogens Niss

Professor Emeritus, IMFUFA, Roskilde Universitet

Matematiske kompetencer, matematisk modellering, matematikkens didaktik som disciplin

[mn@ruc.dk](mailto:mn@ruc.dk)

ORCID: 0000-0001-8559-8600