

Fagdidaktisk vidensproduktion – samarbejde mellem forskere og praktikere i praksis

Artikler skrevet på basis af indlæg på
symposium for
Sammenlignende Fagdidaktik nr. 6,
november 2019

Redigeret af Torben Spanget Christensen, Peter Hobel, Martin Niss & Helle Rørbech

Udgivet af Afdeling for fagdidaktik ved DPU, Aarhus Universitet; IMFUFA, Institut for Naturvidenskab og Miljø, RUC og Forskningsprogrammet Almendidaktik og Fagdidaktik, Institut for Kulturvidenskaber, SDU

Indholdsfortegnelse:

Indledningside 1-6
Torben Spanget Christensen, Peter Hobel, Martin Niss & Helle Rørbech

Hovedartikler

Professionsutveckling för digitaliserad ämnesundervisning
– reflektioner kring en videobaserad forskningsdesignside 7-28
Anna Slotte, Marie Nilsberth & Christina Olin-Scheller

Samspil mellem fagdidaktisk forskning og udvikling af matematikundervisning
– belyst gennem erfaringer fra et udviklingsprojekt i
undersøgende matematikundervisning side 29-50
Morten Blomhøj

Refleksioner og reformuleringer i didaktisk udviklingsarbejde
– to skrivedidaktiske cases om forsker-praktikersamarbejdet i gymnasiet...side 51-70
Torben Spanget Christensen & Peter Hobel

Åben skole er en pædagogisk humlebi – et casestudie af
undervisningsdifferentiering uden at kende elevernes forudsætningerside 71-94
Lars Emmerik Damgaard Knudsen

Responsartikler

Talentfuldt samarbejde side 95-108
(Respons til Slotte et al., Blomhøj, Christensen & Hobel)
Dorthe Carlsen

Undersøgende matematikundervisning fra et scenariedidaktisk perspektiv..... side 109-120
(Respons til Blomhøj)
Morten Misfeldt

Hvilken betydning har organiseringen af samarbejdet mellem forskere og
praktikere for hvordan disse agerer i didaktiske udviklingsarbejder?Side 121-132
(Respons til Christensen & Hobel)
Martin Niss

Undersøgende undervisning i et sammenlignende fagdidaktisk perspektiv side 133-148
(Respons til Blomhøj)
Helle Rørbech

Om positionering som en del af skolens dannelsesopgave side 149-162
(Respons til Lars Emmerik Damgaard Knudsen)
Ane Qvortrup

Kommentarartikler

Forskerens deltagelse i praksis – en kommentarside 163-174
(Kommentar til Blomhøj og Christensen & Hobel)

Louise Molbæk

Dilemmaer og perspektiver for fagdidaktisk forsknings- og udviklingsarbejde.....side 175-194
(Afsluttende kommentar til symposiet)

Ellen Krogh

Samspil mellem fagdidaktisk forskning og udvikling af matematikundervisning - belyst gennem erfaringer fra et udviklingsprojekt i undersøgende matematikundervisning

Af: Morten Blomhøj¹

I dette kapitel belyses vilkår og muligheder for samspil mellem udvikling af matematikundervisningens praksis og matematikdidaktisk forskning på forskellige niveauer i det system, hvori matematikundervisning findes og udvikles. Det sker på grundlag af erfaringer fra et større forsknings- og udviklingsprojekt om anvendelse af undersøgende matematikundervisning (UM) til at forbedre sammenhængen i elevernes motivation for og læring af matematik henover fem udvalgte overgange i uddannelsessystemet. I analysen fokuseres på de niveauer, hvor der er mulighed for direkte samspil mellem lærere og forskere – det vil sige på klassetrinsniveau, på forløbsniveau i en given klasse og på interaktionsniveau med en klasse og enkelte (grupper af) elever i konkrete aktiviteter. Til slut diskuteres vilkår for og perspektiver på samspil mellem udvikling af undervisningspraksis og matematikdidaktisk forskning mere generelt.

Samspil på forskellige organisationsniveauer

Samspil mellem matematikdidaktisk forskning og udvikling af matematikundervisning har forskellig vilkår og betydning på de forskellige niveauer i det system, hvori almen matematikundervisning findes. I figur 1 er – med inspiration fra økologi – anført syv forskellige organisationsniveauer i dette system. Strukturelt set er systemet til dels hierarkisk. De overliggende niveauer former rammer og vilkår for de underliggende. De enkelte niveauer har deres egen dynamik, karakteristiske fænomener og tidsskala, og er ikke determineret af de overliggende niveauer. På sigt spiller virksomheden på de enkelte niveauer sammen og påvirker udviklingen af det samlede system.

På hvert niveau er det angivet, hvem der er centrale aktører. Matematikdidaktisk forskning og dens resultater kan i princippet komme i spil på alle niveauer. På niveau 1 og 2 er det via interaktion med det (fag-)politiske system, at matematikdidaktisk forskning kan komme i spil. Det institutionelle niveau, niveau 3, omfatter både de generelle institutionelle rammer for de forskellige skoleformer, hvor samspil med matematikdidaktisk forskning er mindre realistisk og oplagt, samt rammer og vilkår på den enkelte skole for lærernes arbejde, for samarbejde i fagteams/faggrupper og for fagsamspil, hvor samspil med didaktisk forskning er særdeles relevant. Læreruddannelse, som jo er forskellige til de forskellige dele af uddannelsessystemet, har fået sit eget niveau, fordi der her er helt særlige muligheder for samspil med matematikdidaktisk forskning. Også læreruddannelse er rammesat af et institutionelt niveau og har derfor fået niveau 4.

¹ Der henvises til denne artikel på følgende måde: Blomhøj, M. (2021). Samspil mellem fagdidaktisk forskning og udvikling af matematikundervisning – belyst gennem erfaringer i et udviklingsprojekt i undersøgende matematikundervisning. I Christensen, T.S.; Hobel, P.; Niss, M.; Rørbech, H. (red.). *Sammenlignende Fagdidaktik 6*, side 29-50. <https://tidsskrift.dk/sammenlignendefagdidaktik>

Niveauerne rummer forskellige handlemuligheder for lærere i forhold til at indgå i samspil med kollegaer og forskere om udvikling af praksis. Det er især på niveau 5-7, at der er mulighed for direkte samspil mellem lærere og forskere, men det kræver typisk særlige omstændigheder – fx i form af et forsknings- og udviklingsprojekt - at etablere rammer for et sådant samspil. SUM-projektet (Sammenhæng gennem Undersøgende Matematikundervisning), som behandles i et senere afsnit, er netop et eksempel på et projekt, der søger at skabe rammer for et sådant samspil.

Organisatoriske niveauer i systemet for matematikundervisning

1. Det politiske niveau, der fastlægger og begrundet love og bekendtgørelser for uddannelser og undervisning. Centrale aktører er her politikere og interesseorganisationer.
2. Det fagspecifikke niveau, der for de enkelte klassetrin fastlægger læreplaner mål, indhold, og bedømmelsesformer. Styrelsen, fagkonsulenterne, matematiklærerforeninger og lærebogsforfattere er aktører på dette niveau.
3. Det institutionelle niveau, hvor institutionelle rammer for undervisningen (i faget) formes og udmøntes. Hvad angår grundskolen omfatter dette niveau det kommunale politiske niveau. Skoleejere, skoleledere og lærere er aktører på dette niveau.
4. Læreruddannelse får sit eget niveau, fordi der her er mulighed for samspil mellem undervisningspraksis og fagdidaktisk forskning såvel i grunduddannelsen samt i tilhørende efter- og videreuddannelse. Læreruddannere, der selv kan være forskere, og lærerstuderende er de centrale aktører.
5. Klassetrinsniveau, hvor teams af (fag-)lærere på skolen og den enkelte lærer lægger årsplaner og udvikler undervisningsforløb. Pædagogiske ledere, lærere/læreren og forældre er aktører på dette niveau.
6. Klasserumsniveau, hvor undervisningen realiseres i kortere eller længere forløb – typisk fra en lektion eller et modul og i forløb op til et par uger. Læreren, klassen og de enkelte elever er de centrale aktører.
7. Interaktionsniveau, hvor den centrale genstand er elevens/elevernes virksomhed og lærerens interaktion med virksomme elever i konkrete aktiviteter.

Figur 1: Syv niveauer i systemet for matematikundervisning.

Det skal understreges, at udpegningen af de syv niveauer i systemet for almen matematikundervisning naturligvis kunne foretages på andre måder. Pointen er at identificere niveauer i systemet, hvor matematikdidaktisk forskning har markant forskellige potentielle bidrag til udvikling af praksis, og hvor vilkårene for samspil mellem forskning og udvikling er forskellige.

Samspil mellem forskning og praksis i matematikdidaktik

Forholdet til undervisningspraksis har været central i diskussionen om matematikkens didaktik siden 70'erne, hvor feltet udviklede sig fra primært at have et stofdidaktisk fokus på udvælgelse, sekvensering og faglig behandling af det matematiske indhold, til i dag at angå hele systemet i figur 1. Mogens Niss har bidraget markant til analyse af feltets karakter og status internationalt (Niss, 1999 og 2007) og har tidligt foreslået følgende karakteristik af feltet, som i dag har bred tilslutning:

”Matematikkens didaktik som den videnskabelige disciplin, der søger at bestemme, karakterisere og forstå de fænomener og processer, der indgår – eller kunne indgå – i matematikundervisning og

matematiklæring. Sigtet er at klarlægge mulige årsagssammenhænge med henblik på at udvikle og forbedre matematikundervisning". (Niss, 1993)

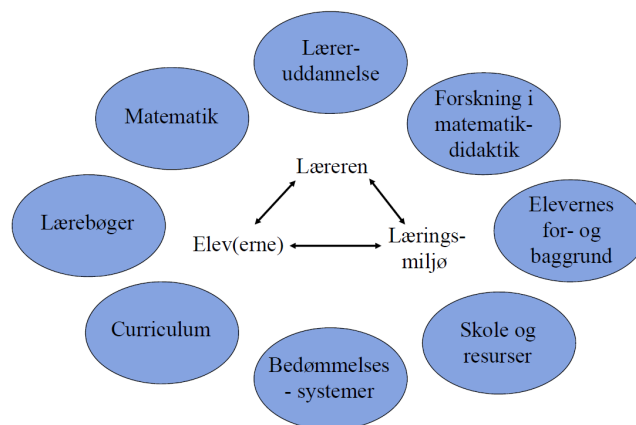
Hele fire forhold kan fremhæves fra citatet. For det første har forskningen et videnskabeligt erkendelsessigte, der handler om at udvikle teorier til at beskrive, forstå og forklare matematikundervisningens praksis. For det andet er det en pointe, at forskningen ikke er begrænset til eksisterende praksis. Den kan også angå konstruktion af nye muligheder og nye praksisformer. For det tredje understreger citatet forskningens forpligtigelse til at udvikle og forbedre praksis. Det betyder, at begrundelser for og analytiske vurderinger af matematikundervisningens relevans og kvalitet indgår centralt. Som det fjerde fremhæves herved det normative aspekt ved forskningen. Udvikling og forbedring af praksis må ses i relation til generelle begrundelser for matematikundervisning på de enkelte niveauer – såvel officielt givne som mulige ideale begrundelser.

Som i alle fagdidaktikker er *kernen* i genstandsfeltet interaktionerne mellem lærer og elever og eleverne indbyrdes i et læringsmiljø, der er planlagt af læreren med intention om at fremme elevernes læring og dannelse i forhold til mere eller mindre veldefinerede mål. Denne kerne er i figur 2 repræsenteret ved den didaktiske trekant i centrum af figuren. Dobbelpilene indikerer, at der er tale om interaktioner mellem læreren, eleven/eleverne og læringsmiljøet. Læringsmiljøet, der omfatter det faglige indhold, der er genstand for undervisningen, er planlagt mere eller mindre bevidst af læreren, men formes i høj grad også gennem elevernes interaktioner med miljøet. Læreren interagerer med eleverne og rammesætter deres indbyrdes interaktioner for at mediere virksomheden i miljøet, som igen virker tilbage på læreren.

Figur 2 viser genstandsfeltet for matematikdidaktisk forskning set med udgangspunkt i undervisningens praksis. Den illustrerer, at matematikundervisning udfolder sig i et komplekst system, der er rammesat af vilkår og fænomener på de forskellige niveauer i systemet, som beskrevet i figur 1. Dette forhold må medtænkes ved design af et udviklingsprojekt.

Tilsammen repræsenterer figur 1 og 2 en rummelig bestemmelse af genstandsfeltet for matematikdidaktisk forskning, der er i god overensstemmelse med citatet fra Niss (1993). Feltet er endvidere karakteriseret ved interdisciplinært samspil med en række baggrundsvidenskaber som matematik, psykologi, semiotik, pædagogik, sociologi, filosofi og historie. Matematik som videnskab indgår i genstandsfeltet som vist i figur 2. Det er begrundet i, at undervisningens indhold er skabt af og til dels må forstås og begrundes med henvisning til matematik som videnskab, og at matematikdidaktiske teorier trækker på afdækning af begrebernes matematiske grundlag, deres placering i teorien, forbindelser til andre begreber og deres historiske udvikling.

Som feltet er bestemt, og forskningen praktiseres, står samspil med udvikling af matematikundervisningens praksis i dag centralt. Det gælder specielt i en dansk og nordisk kontekst, men i vid udstrækning også internationalt. Det er inden for mainstream at forske i teoribaseret udvikling, afprøvning og evaluering af undervisning i samspil med lærere, og der er gode muligheder for at få publiceret forskning internationalt, hvor undervisningspraksis spiller en væsentlig rolle.



Figur 2: Model af genstandsfeltet for matematikdidaktisk forskning (Blomhøj, 2008).

Forskningens (potentielle) bidrag til udvikling af praksis

Matematikens didaktik er internationalt et veludviklet forskningsfelt. Man kan få et indtryk af feltets kompleksitet og historiske udvikling på <https://www.mathunion.org/icmi>. Forskningen har skabt en lange række teorier og metoder, der kan bidrage til at forstå og til at udvikle undervisningspraksis. I det følgende fremhæves nogle eksempler på forskningens produkter. De valgte eksempler er (særligt) relevante i en dansk kontekst via danske forskeres bidrag til deres udvikling og anvendelse. Eksemplerne angår forskellige organisationsniveauer, men de er ikke dækkende eller repræsentative for, hvad feltet har at bidrage med. Pointen med eksemplerne er at vise, hvordan karakteren af de forskellige teorier og metoder er med til at forme vilkårene for samspil mellem forskning og udvikling af undervisningspraksis.

Nogle teorier og metoder angår i sig selv flere organisationsniveauer. Det gælder fx den kompetencebaserede bestemmelse af matematikbeherskelse fra det danske KOM-projekt (Niss & Højgaard, 2002). Fokus er på niveau 2 og på spørgsmålet om, hvordan matematikbeherskelse kan karakteriseres på et matematikdidaktisk analytisk grundlag, der ikke blot baserer sig på opstilling af matematiske emner hørende til forskellige trin i uddannelsessystemet. Det resulterende system af otte matematikkompetencer og tre former for overblik og dømmekraft angår naturligvis også de lavere niveauer. Kompetencesystemet er således brugt som grundlag for design af curricula i flere lande. Som i dansk sammenhæng, hvor systemet er anvendt både i grundskolen og på gymnasialt niveau, bliver de matematiske kompetencer imidlertid typisk transformeret og underlagt andre styringstiltag i sådanne processer. Det skete for eksempel i reformen af grundskolen i 2013, hvor læringsmålstyret undervisning blev det dominerende styringstiltag (Skott & Kaas, 2015; Niss, 2016). Eksemplet viser, at implementering af forskningens produkter således langt fra er uproblematisk. Implementeringsprocessen bør derfor i sig selv være genstand for kritisk forskning.

Der findes sammenhængende matematikdidaktiske teorier, der dækker nærmest hele genstandsfeltet. Det gælder de to store franske teorier, teorien om didaktiske situationer (TDS) (Brousseau, 1997), der er beskrevet i en let tilgængelig form i Winsløw (2006), og Antropologisk teori om det didaktiske (ATD) (Chevallard, 2015), der er formidlet og anvendt som grundlag for udvikling af undervisningspraksis i en ph.d.-afhandling af Britta Jessen (2017). De to teorier tilbyder hver deres ramme – som dog er forenelige – til fortolkning og forståelse af matematikundervisningens

problemfelt. Teorierne giver en fortolkningsramme, der er relevant på alle niveauer fra figur 1, men tilbyder først og fremmest konkrete didaktiske modeller for udvikling af undervisning. I flere lande arbejder forskere med udvikling af praksis i samarbejde med lærere inden for disse teorier. Denne type samspil kræver imidlertid, at lærerne – i et vist omfang – tilegner sig teorien.

Der arbejdes i matematikdidaktik også med metoder, som er udviklet inden for andre videnskabelige discipliner og videreudviklet og anvendt ved udvikling af matematikundervisning. Det gælder fx lektionsstudier (LS) som beskrevet af Arne Mogensen (2015), og som er anvendt med ATD som teoriramme i et ph.d.-projekt om samspil mellem teori og praksis i matematiklæreruddannelse til grundskolen af Kaj Østergaard (2016). Denne forskning angår niveau 6 og 7, men er typisk ofte forbundet med niveau 4 via udvikling af uddannelse for matematiklærere, hvad enten det er grund- eller efter- og videreuddannelse. Matematiklæreres uddannelse og udvikling er imidlertid i sig selv et omfattende matematikdidaktisk felt. Der er her udviklet flere generelle teorier baseret på omfattende empiriske studier af matematiklæreres kompetencer. Det gælder den markante forskning som Deborah Ball og kollegaer har udført til karakterisering af matematiklæreres viden (Ball m.fl., 2008), og det gælder Alan Schoenfelds arbejde med at udvikle en samlet teori for ”Teaching for Robust Understanding”, der har lærerens viden og angeren som omdrejningspunkt. Paul Cobb har i samarbejde med kollegaer i en årrække og i stor skala arbejdet med udvikling af matematiklæreres undervisningspraksis. Det er sket ved Design-Based Research, der sammenkæder interventioner på niveau 6 og 7 med interventioner på niveau 3 og 4 (Cobb m.fl., 2016). I dansk sammenhæng er der udviklet metoder til samspil mellem forskning i nye tiltage i matematikundervisningen og en praksis, der søger at realisere sådanne tiltag. Denne tilgang er af Ole Skovsmose karakteriseret som kritisk matematikundervisning (Skovsmose, 1994, 2006), fordi forskningen søger at skabe nye muligheder for praksis. I Center for Forskning i Matematiklæring (1998-2004) blev der gennemført en række projekter med denne tilgang (Skovsmose & Blomhøj, 2006). Skovsmose og Borba (2004) giver en metodologisk ramme for samspil mellem udvikling af praksis og forskning i denne type forskning, hvor fokus er på niveau 6 og 7.

Som et meget væsentligt bidrag fra matematikdidaktisk forskning, er der udviklet en række teorier, der belyser principielle vanskeligheder ved undervisning og navnlig læring af matematik. Nogle markante eksempler er teorien eller begrebet om udviklingen af elevers begrebsbilleder (Tall & Vinner, 1981), teorien om proces og objekt dualitet ved dannelse og læring af matematiske begreber (Sfard, 1991), teorien om repræsentationers betydning i læreprocessen (Stienbring, 2005), samt teorien om betydningen af semiotiske registre i matematiklæring (Duval, 2006). Disse og andre tilsvarende specifikke teorier om matematiklæring indgår i matematikvejlederprogrammet ved RUC (Jankvist og Niss, 2015). Teorierne er ligeledes anvendt på gymnasialt niveau til analyse af elevers arbejde med symboler i formeludtryk i en ph.d.-afhandling af Marit Hvalsøe Schou (2018).

Teorierne har i høj grad bevist deres relevans i forhold til at beskrive og forstå læringsvanskeligheder, der viser sig i praksis, men det kræver særlige omstændigheder, at få dem i spil som grundlag for udvikling af praksis. Det kan ske i efter- og videreuddannelseskurser som ved det omtalte matematikvejlederprogram. I Niss og Jankvist (2016, 2017, 2020) dokumenterer lærere, der har gennemført programmet, hvordan de har anvendt matematikdidaktisk teori til diagnosticering og afhjælpning af specifikke læringsvanskeligheder hos gymnasieelever. Blomhøj og Kjeldsen (2014) analyserer, hvordan matematikdidaktiske teorierne er anvendt af gymnasielærere i projekter om

matematisk modellering i et efteruddannelseskursus. I afsnittet om SUM-projektet illustreres det, hvordan der i et forsknings- og udviklingsprojekt kan skabes betingelser for udvikling af praksis i samspil med forskning og under inddragelse af matematikdidaktisk teori.

Vilkår for samspil mellem forskning og praksis

Forskning i matematikdidaktik foregår hovedsagelig ved institutioner med læreruddannelser og ved universiteter, hvor forskerne selv underviser i matematik og matematikdidaktik. Forskere har typisk indgående kendskab til indhold og praksis på de uddannelsesstrin, de forsker i, og erfaringer med i egen undervisning at støtte elevers og studerendes matematiklæring. Det er gode professionelle forudsætninger for at indgå i samspil med lærere om udvikling af praksis. Et konstruktivt samspil mellem forskning og praksis er imidlertid afhængig af en god samarbejdsrelation mellem lærere og forskere. Det er vigtigt, at der for lærere og forskere etableres et fælles sigte med projektet. Det kan være styret af forskellige motiver for lærer og forsker, men læreren må danne sig egne motiver, der er forenelige med forskningsperspektivet – for udvikling af praksis. De matematikdidaktiske teorier må tilpasses og konkretiseres i forhold til udvikling af praksis i den givne kontekst. Det sker gennem en didaktisering – en didaktisk modelleringsproces – hvor det teoretiske grundlag krydses med et undervisningsindhold og tilpasses konteksten. Herved skabes der grundlag for udvikling af konkrete undervisningsforløb. I denne proces er det nødvendigt med et tæt samspil mellem lærere og forskere. Læreren må medvirke i didaktiseringen for at få ejerskab til undervisningen og for at sikre, at de planlagte forløb er realistiske i den givne sammenhæng. Forskeren må medvirke i didaktiseringen for at støtte og inspirere processen og for at sikre den forskningsmæssige relevans.

Det er en følsom sag for lærere at indgå i samspil med forskere om udvikling af deres praksis. Det kræver opbygning af et tillidsforhold og en tiltro hos læreren til, at forskningen og forskeren har noget at bidrage med til udvikling af praksis. Sådanne betingelser tager det typisk nogen tid at etablere. De forskellige institutionelle krav til lærere og forskere gør, at mulighederne for samspil hovedsageligt er begrænset til at foregå i forskning- og udviklingsprojekter. Imidlertid kan det ofte være svært at få afsat tilstrækkelige resurser til samarbejdet. Det gælder selvfølgelig kortere projekter, der alene omfatter enkelte undervisningsforløb med få lærere, men også i længerevarende projekter er rammerne for samarbejdet ofte begrænsende. I ph.d.-projekter, hvor samarbejdet med nogle få lærere nok kan strække sig over længere tid – måske et halvt skoleår – er der typisk ingen eller meget få midler til lærernes medvirken. Større og længerevarende projekter bliver ofte finansieret primært som enten et udviklingsprojekt, hvor forskningen har karakter af følgeforskning eller primært som et forskningsprojekt, hvor der ikke er afsat tilstrækkelige midler til lærernes deltagelse. Mulighederne for finansieringen af forskningsprojekter med et udviklingssigte tenderer til, at forskningssigtet fastlægges så stramt, at det bliver vanskeligt at etablere et fælles udviklingssigte med lærerne i projektet. Disse generelle udfordringer for samspil mellem forskning og udvikling af praksis er søgt imødegået i SUM-projektet, som det er beskrevet i afsnittet herom.

Har praksis brug for samspil med forskning?

Med det foregående skulle det være klart, at matematikdidaktisk forskning i høj grad har brug for samspil med praksis. Feltets bestemmelse og berettigelse er jo at støtte udvikling af praksis. Har praksis så også brug for samspil med forskning? Overordnet set er svaret helt klart ja, men

forventningsafstemning i forhold til, hvad forskningen kan levere på forskellige organisationsniveauer, er vigtig. På niveau 1 og 2 kan forskningen give begrundelser for matematikundervisning som led i almen uddannelse og komme med forslag til sammenhængende fastlæggelse af mål – fx baseret på systemet af matematikkompetencer – og tilsvarende organisering af undervisningens indhold på forskellige trin af uddannelsessystemet. Forskningen kan endvidere tjene som grundlag for analyse af sammenhæng – eller mangel på samme – mellem resurser, læringsmål, bedømmelsesformer og elevforudsætninger og afdækning af mulige konsekvenser heraf for såvel undervisning som for elevernes matematiklæring. Der kan imidlertid ikke forskningsmæssigt gives direkte anvisninger på, hvordan faglige læringsmål bedst realiseres inden for givne resurserammer.

Samspil med matematikdidaktisk forskning på niveau 1 og 2 er generelt langt fra uproblematisk. Den politiske praksis på disse niveauer er ikke altid åben for samspil med forskning, og politiske ønsker og krav kan ofte ikke imødekommes på et forskningsmæssigt grundlag. Der er derfor i høj grad behov for kritisk refleksion i relation til samspil på disse niveauer.

Hvad angår niveau 5-7 har forskningen produceret et væld af teorier og metoder – blandt andet dem der nævnes i det følgende afsnit – som *kan* tjene som grundlag for refleksion over og udvikling af undervisningspraksis. Det forudsætter imidlertid omstændigheder, hvor lærere kan komme i nærkontakt med teorierne og opleve deres relevans i forhold til erkendte udfordringer i deres aktuelle praksis. Grundlag herfor kan etableres i grunduddannelsen af matematiklærere. Vilkårene herfor er forskellige for grundskole og de gymnasiale uddannelser, men generelt spiller matematikdidaktik en meget beskedent rolle i matematiklæreruddannelse. Den generelle udfordring i læreruddannelse til grundskolen med, at de studerendes oplevelse af relevansen af fagdidaktik forudsætter praksiserfaring, er påtrængende ved uddannelse af matematiklærere (Østergaard, 2016). Matematikdidaktik indgår typisk med 5-10 ETCS i en kandidatuddannelse, der giver kompetence til undervisning på det gymnasiale niveau. Hertil kommer Teoretisk Pædagogikum, der med det fagdidaktiske projekt giver kandidaterne mulighed for at forbinde matematikdidaktisk teori til udvikling af egen praksis. Hvad angår niveau 4, findes der et solidt forskningsmæssigt grundlag for indretning af matematiklæreruddannelse til forskellige trin af uddannelsessystemet. Denne forskning er dog kun i meget ringe grad taget i betragtning ved udvikling af uddannelser til matematiklærer i det danske system.

Samspil mellem udvikling af praksis og matematikdidaktisk forskning på niveau 5-7 kan antage mange former. Den enkelte lærer eller måske mere sandsynligt en gruppe af kollegaer kan selv opsøge matematikdidaktisk teori som grundlag for udvikling af deres praksis – eventuelt gennem personlig kontakt til forskere. Det sker, men det er sjældent. Matematikvejledere, der gennem efter- og videreuddannelse har fået en stærkere matematikdidaktisk baggrund, kan initiere teoribaseret udvikling af praksis. Generelt giver de institutionelle rammer for undervisning kun ringe muligheder for samspil med fagdidaktisk forskning.

Særsomt finansierede udviklings- og forskningsprojekter er således et væsentligt bidrag til at skabe samspil mellem udvikling af undervisningspraksis og fagdidaktisk forskning, og det er derfor relevant at overveje ved design af projekter, hvordan der kan skabes grundlag for samspil, samt at analysere i hvilken grad mulighederne for samspil realiseres. Som nævnt er der strukturelle vanskeligheder ved finansiering af sådanne projekter. Ydermere er der særlige udfordringer knyttet til opskalering af projekter med tæt samspil mellem lærere og forskere. Foruden tilstrækkelig

finansiering kræver det en projektorganisering med mange samarbejdende forskere, der kan indgå i tæt samarbejde med lærere i parallel forløb. I det følgende afsnit præsenteres og diskuteres SUM-projektet som et eksempel på et udviklingsprojekt, der søger at løfte denne udfordring.

SUM – et udviklingsprojekt med samspil

SUM (Sammenhæng gennem Undersøgende Matematikundervisning) er et forsknings- og udviklingsprojekt, der forløber 2017-2021 ved Norges Arktiske Universitet i Tromsø (UiT) med støtte fra det Norske Forskningsråd. Målet er at bidrage til bedre sammenhæng i elevers motivation for aktiviteter i og læring af matematikundervisning fra børnehave til videregående uddannelse. Det skal ske gennem udvikling af lærernes kompetencer inden for undersøgende matematikundervisning (UM). Projektets akronym, SUM, understreger en intention om at skabe øget sammenhæng via en akkumuleret virkning for elever og lærere af at arbejde med UM (Haavold og Blomhøj, 2019).

Projektet finansierer praktikernes deltagelse med frikøb til institutionerne på 50 timer per deltager per år, og lærerne kan tage studiepoint (10 ECTS per år) som led i deres medvirken i SUM. Det sker gennem særligt tilrettelagte kurser ved UiT. SUM bidrager herved til den aktuelle politiske dagsorden i Norge om at løfte kompetenceniveauet hos matematiklærere for de 6-18-årige (Kunnskapsdepartementet, 2016).

Organiseringen af SUM

SUM realiseres gennem etablering og understøttelse af fem grupper af matematiklærere og matematikdidaktikere, der samarbejder om udvikling, afprøvning og evaluering af UM i lærernes egne klasser igennem tre skoleår. Det sker i relation til fem udvalgte overgange i systemet, nemlig de institutionelle overgange mellem børnehave og skole (her medvirker pædagoger), mellem grundskole og gymnasium, mellem gymnasium og universitet samt ved to overgange inden for grundskolen, fra indskolingen til mellemtrinnet og fra mellemtrinnet til overbygningen. Hver overgangsgruppe består af 8-12 matematiklærere, der aktuelt har klasser omkring den pågældende overgang, samt af to matematikdidaktikere fra UiT, der leder gruppens arbejde.

Der er således tale om et større projekt, der involverer seks pædagoger, omkring 50 matematiklærere og 12 matematikdidaktikere. Projektets natur og organisering gør det imidlertid muligt at gennemføre projektet som fem parallelle udviklingsprojekter med tæt samspil mellem nogle få – to til tre – forskere og en gruppe på omkring 10 praktikere. Praktikerne behøver alene at forholde sig til arbejdet i deres egen overgangsgruppe, men kan alligevel opleve, at de deltager i et større projekt, der handler om UM og sammenhæng i hele skolesystemet.

Samtidig er det en styrke i projektet, at den overordnede organisering, styring og finansiering er fælles. Det gælder fx rekruttering af institutioner og deltagere samt kontakten til institutionerne undervejs i projektet. Som udviklingsprojekt er det vigtigt – ikke mindst for finansieringen – at SUM adresserer problematikken omkring overgange og sammenhænge i matematikundervisningen på langs af uddannelsessystemet over et længere forløb med tre skoleår. Det fælles matematikdidaktiske grundlag i form af UM er essentiel for SUM – både som udviklings- og som forskningsprojekt. Det rammesætter og støtter samarbejdet med praktikerne i overgangsgrupperne, og det styrker gruppelederne, at de kan trække på et fælles teoretisk grundlag. Samtidig er det en styrke, at projektets organisering gør det muligt for hele forskningsgruppen i matematikdidaktik ved UiT at samarbejde i projektet. Medlemmerne af forskningsgruppen er knyttet til den

overgangsgruppe, der passer bedst til deres interesser og forskningsmæssige kompetencer. Som ledere af grupperne kan de således trække på et godt kendskab til matematikundervisningens praksis og på erfaringer med samarbejde med praktikere på relevante trin.

Det fælles fokus på UM giver samtidig en frugtbar ramme for samarbejdet i forskningsgruppen. Det har imidlertid krævet en del diskussioner at nå frem til en fælles afklaring af grundlaget for projektet. Således har det været ihærdigt diskuteret, om det er nødvendigt endsige hensigtsmæssigt at forsøge at definere UM mere præcist både teoretisk og i forhold til samarbejdet med praktikerne. Der har generelt været to typer af anfægtelser i projektgruppen. Det drejer sig dels om diskussionen om, i hvilken grad og hvordan UM adskiller sig fra andre beslægtede teoribaserede tilgange til matematikundervisning, såsom problem based learning, problem solving og mathematical modelling. Spørgsmål har været, om UM er noget nyt/anderledes eller blot et nyt navn for noget gammelt/velkendt. Dette spørgsmål er først og fremmest relevant i et forskningsperspektiv. Som det er analyseret i Artigue og Blomhøj (2013), er der bestemt et betydeligt overlap i forhold til, hvilke konkrete undervisningsaktiviteter der kan falde ind under de nævnte tilgange. Det erkendelsesteoretiske grundlag med fokus erfaringsmæssig forankring af læreprocessen og refleksion over egne og fællesgjorte erfaringer som fundament for læring af matematiske begreber samt den konkrete didaktisering af UM blev fremhævet som konstituerende træk ved UM. Den anden anfægtelse gik på, om UM er en hensigtsmæssig og effektiv tilgang til at skabe bedre sammenhæng i børn og unges matematiklæring gennem uddannelsessystemet. På den ene side er dette faktisk et åbent spørgsmål, som SUM kan bidrage til at besvare. På den anden side er der solid matematiskdidaktisk grundlag for at antage, at lærere, der samarbejder med kollegaer og matematikdidaktikere om at udvikle og gennemføre UM-forløb, der adresserer udpegede læringsmæssige udfordringer ved en bestemt overgang i systemet, faktisk vil udvikle deres praksis, så den i højere grad styrker og bidrager til øget sammenhæng i elevernes matematiklæring.

Gennem sådanne diskussioner nåede vi i projektgruppen frem til den relativt åbne bestemmelse af UM, der er udfoldet i det efterfølgende. Det blev fremhævet som en pointe, at de fleste af lærerne skulle kunne opleve SUM som en gradvis udvikling af deres undervisningspraksis og ikke som en helt ny form for matematikundervisning. I den sammenhæng har det været en styrke i SUM, at det har været en del af projekt at udvikle en praksis for UM ved de forskellige overgange i systemet.

Den didaktisering af UM, der præsenteres i det følgende, har været rammesættende for praktikernes arbejde i overgangsgrupperne med at udvikle, gennemføre og evaluere konkrete aktiviteter og forløb. Det er denne didaktisering, der er genstand for den forskningsmæssige analyse i SUM-projektet i forhold til spørgsmålene om, hvorvidt den støtter udvikling af lærernes kompetencer i UM, samt om den bidrager til øget sammenhæng i elevernes matematiklæring.

Samspillet i overgangsgrupperne

Overgangsgrupperne mødes til halvdagsseminarer 4-5 gange i løbet af hvert skoleår. Her er der oplæg om UM og støtte til udvikling af undervisningsoplæg. Praktikerne fremlægger og drøfter gennemførte aktiviteter og får feedback fra lederne. Specielt i det første år drøftes det, hvilke udfordringer lærerne oplever i forhold til sammenhæng for eleverne ved den pågældende overgang. Forløbenes mulige bidrag til sammenhæng er et gennemgående tema ved seminarerne.

Samarbejdet i overgangsgrupperne angår især niveau 6-7, men omfatter også niveau 5 i forhold til bestræbelsen for at skabe bedre sammenhæng hen over den aktuelle overgang. Hvilke indslag af UM i årsplanen kan bidrage til sammenhæng? Hvordan kan der arbejdes med forskellige typer af undersøgende aktiviteter i løbet af skoleåret? Og hvordan kan de samme oplæg tilpasses til de forskellige klassetrin ved den aktuelle overgang?

Det er en pointe i organiseringen af SUM, at også det institutionelle niveau – niveau 3 – er medtænkt. Skoleejere og skoleledere er blevet inddraget i rekrutteringen af lærere til projektet, men det har været en præmis, at de enkelte lærere selv har ønsket at deltage i projektet. Næsten alle lærere i projektet har mindst en kollega fra deres egen skole med i overgangsgruppen. Det giver gode muligheder for samarbejde mellem seminarerne, og for at lærerne kan overvære undervisning i hinandens klasser samt for forankring af projektet i den lokale faggruppe. Det er skoleledernes ansvar, at aftalerne om tid til lærernes deltagelse i projektet overholdes, og der er en klar forventning til skolelederne om at understøtte projektets forankring i matematiklærergruppen på skolen. I overgangsgrupperne blev det lejlighedsvist diskuteret, hvordan SUM-projektet kunne synliggøres på skolerne. Nogle af lærerne har holdt oplæg om projektet og deres undervisningsforløb for (matematik-)kollegaer på deres skole. Gruppen omkring indskolingen har arrangeret et event på en skole med en udstilling af deres aktiviteter og forløb for andre klasser på skolen.

Undersøgende matematikundervisning i SUM

I SUM er UM sat på begreb med henvisning til Inquiry Based Mathematics Education (IBME) i Artigue og Blomhøj (2013) og i ZDM (2013). Her trækkes der historiske tråde tilbage til den amerikanske uddannelsesfilosof John Dewey (1859-1952), der udviklede en sammenhængende uddannelsesteori baseret på inquiry som den grundlæggende proces for udvikling af menneskelig erkendelse. I UM er det en hovedudfordring at støtte og opmuntre refleksioner, der kan skabe grundlag for erfaringsbaseret, fælles, faglig læring. Grundprincipperne i Deweys teori, som de er sammenfattet nedenfor, har dannet grundlag for projektet og for arbejdet i forskningsgruppen.

1. Mennesket søger at forstå og beherske sin omverden gennem undersøgende og problemløsende adfærd samt ved at udvikle og dele sin viden gennem social interaktion.
2. Videnskabelig viden er udviklet gennem raffinering og kultivering af denne grundlæggende erkendelsesinteresse og er ikke grundlæggende forskellig fra almenmenneskelig viden.
3. Gyldig (sand) viden er effektiv til forståelse af fænomener og løsning af problemer. Eleverne skal opleve, at den viden, de udvikler, er nyttig og meningsfuld i deres omverden (dette syn på viden kaldes pragmatisme).
4. Uddannelse skal udvikle den enkelte elev til at lære gennem undersøgelse og refleksion i sociale fællesskaber.
5. Elevernes erfaringer og tidligere erhvervet viden er grundlaget for tilrettelæggelse af undervisning, og ny viden må opbygges og almenføres gennem refleksioner over fælles erfaringer.
6. Det overordnede mål er at uddanne eleverne til at tage aktiv og kritisk del i udvikling af demokratiske samfund.

Disse principper kan være retningsgivende for samarbejdet mellem didaktikere og praktikere, og de kan tjene som pædagogisk begrundelse for udvikling af UM. Det kræver dog matematikdidaktisk udvikling at omsætte principperne til undervisning. Som et først skridt i en sådan didaktisering kan der – ud fra principperne – opstilles følgende fordringer til UM (Blomhøj, 2016, kap.VI):

(a) Noget står til undersøgelse i UM. Der skal som udgangspunkt for undersøgende arbejde etableres spørgsmål, forundring eller udfordringer hos eleverne, der kan være styrende for deres arbejde, og som kan danne ledemotiv ved en efterfølgende opbygning af fælles matematikviden i klassen; (b) Der skal etableres faglige, didaktiske og pædagogiske forudsætninger og rammer for, at eleverne kan engagere sig i det undersøgende arbejde, og eleverne skal i dette arbejde have mulighed for at danne og afprøve faglig viden i relation til deres konkrete undersøgelser; (c) Erfaringer, resultater og tilhørende refleksioner fra elevernes undersøgende arbejde skal kunne danne grundlag for fælles relevant matematiklæring.

SUM er eksempel på anvendelse af erkendelsesteori i et projekt, der sigter på udvikling af matematikundervisning. Det har bidraget til at skabe teoretisk sammenhæng i designet, og bedømt på evalueringen af ansøgningen har det medvirket til at sikre finansieringen af SUM. Den teoretiske forankring har været væsentlig for arbejdet i forskningsgruppen. Diskussionerne herom har tjent til at skabe medejerskab til projektet og den valgte didaktisering. Det var nødvendigt, da det teoretiske grundlag og den valgte didaktisering allerede var udfoldet i designet af SUM og formidlet i ansøgningen. Det er vurderingen, at de teoretiske diskussioner om UM i forskningsgruppen har styrket grundlaget for samspillet med praktikerne i overgangsgrupperne.

Baseret på tilbagemeldingerne fra lederne af overgangsgrupperne var de fleste lærere i udgangspunktet ikke specielt interesserede i grundlaget for UM. Interviewene med lærerne efter hvert skoleår viser, at det tager lang tid for lærerne at udvikle erfaringer, der kan danne grundlag for interesse i og refleksion over det teoretiske grundlag for UM. For de allerfleste matematiklærere er udvikling af deres egen praksis en forudsætning for en mere teoretisk interesse i UM.

Som professor II ved UiT har jeg i samarbejde med Per Øystein Haavold, der er leder af forskningsgruppen, designet SUM-projektet, og i den forbindelse har jeg trukket på erfaringer med UM fra EU-projektet PRIMAS (Promoting Inquiry based Mathematics and Science Education Across Europe), der forløb 2010-2013 (ZDM, 2013), og fra samarbejde med lærere i danske udviklingsprojekter om UM. Baseret på samspil med matematiklærere og på erfaringer med UM i praksis i disse sammenhænge har jeg udviklet en didaktisering af UM, der omfatter en trefaset didaktisk model for tilrettelæggelse af undersøgende forløb (se figur 3), udpegning af karakteristiske elev- og læreraktiviteter i UM (se figur 4) samt en typologi for aktiviteter og forløb i UM (Blomhøj, 2013). Det er denne didaktisering af UM, der er præsenteret og diskuteret i overgangsgrupperne. Det er vigtigt at understrege, at den nok virker rammesættende for lærernes udvikling af deres praksis, men den er i høj grad åben for fortolkning og konkretisering. Det er praktikerne, der med støtte fra arbejdet i overgangsgrupperne vælger det faglige indhold, skaber faglige udfordringer, udvikler faglige spørgsmål til elevernes undersøgende arbejde samt foretager den konkrete tilrettelæggelse af arbejdet i de tre faser. Modellen med de tre faser blev i designet af SUM projektet valgt, fordi den havde vist sig at fungere i praksis i forskellige sammenhænge, og fordi det er en relativ simpel model, som det er nemt at arbejde i et større projekt.

Den trefasede model for undersøgende matematikundervisning

De tre faser kalder på en uddybende beskrivelse. **I den første fase** sættes scenen for elevernes undersøgende arbejde. Det kan ske ved, at læreren fortæller en historie, der lægger op til undersøgende arbejde. Det kan være inden for en ren matematisk ramme, eller det kan være med referencer til forhold uden for matematikken. I Skånstrøm og Blomhøj (2016) og Blomhøj (2013) findes flere eksempler på iscenesættelse af forskellige typer af undersøgende forløb. Faglig variation og generalisering af konkrete matematikproblemer eller variation af den didaktiske situation kan give inspiration til og danne ramme om undersøgende aktiviteter.

En 3-faset didaktisk model for undersøgende matematikundervisning

1. Iscenesættelse af forløbet over for eleverne
 - skabelse af spørgsmål, forundring eller udfordringer
 - etablering af det didaktiske miljø for arbejdet
 - formidling af de tidsmæssige og praktiske rammer
 - klargøring af produktkrav og succeskriterier/bedømmelsesform
2. Elevernes selvstændige undersøgende arbejde
 - tilstrækkelig tid, frihed og støtte til elevernes arbejde
 - støtte og udfordring gennem dialog jf. princippet om minimal vejledning
 - forberedelse gennem konstruktion af dialoger
3. Fælles refleksion og faglig læring
 - erfaringer og resultater fra forløbet systematiseres og gøres fælles
 - faglige pointer søges fællesgjort og forbundet til læreplanen

Figur 3: Didaktisk model for tilrettelæggelse af undersøgende aktiviteter og forløb.

Mulighederne for iscenesættelse er mangfoldige og begrænset alene af den fagdidaktiske og pædagogiske fantasi. Målet med iscenesættelsen er at danne motiver hos eleverne, der retter sig mod genstanden for det undersøgende arbejde. Derfor er det vigtig også i denne fase at skabe en dialog med klassen om, hvordan eleverne forstår situationen, hvordan de tænker, at det kan være sjovt, spændende, interessant og vigtigt for dem at arbejde. Erfaringer med UM viser, at det ved tilrettelæggelse af denne fase er vigtigt at overveje, hvilke erfaringer, sprog, samt matematikfaglige og andre begreber eleverne kan forventes at (kunne) bringe i spil i den foreliggende situation. Endelig skal de tidsmæssige og praktiske rammer og kravene til proces og evt. produkter samt vurderingsformatet formidles til eleverne. Det er helt almindelige fagdidaktiske overvejelser.

I den anden fase er fokus på elevernes undersøgende arbejde. I denne fase må eleverne have tilstrækkelig tid, frihed og støtte til deres undersøgende arbejde. Det er selve kerne i den undersøgende tilgang. Læreren kan støtte og udfordre eleverne under arbejdet gennem dialoger med grupper eller enkelte elever. Den afgørende udfordring for læreren er her at hjælpe og støtte lige akkurat så meget, som det er nødvendigt uden at fratage eleverne de centrale faglige udfordringer. Lærerne kan her betjene sig af spørgsmål som: Hvad tænker du? Hvilke muligheder ser du for dig? Hvordan fandt du ud af det? Hvorfor er det rigtigt? Hvordan kan du argumentere for det? Kan man tænke på andre måder? Hvad nu hvis ...? Som lærer kan man i samarbejde med 1-2 kollegaer

forberede sig hertil ved konstruktion og analyse af dialoger, som man forestiller sig, at de kan forekomme i en bestemt klasse eller en bestemt gruppe af elever. Det er en krævende metode, men lærerne oplever typisk, at de herved bliver godt forberedt til samspillet med eleverne.

Differentieret støtte til forskellige grupper kan indarbejdes i selve organiseringen af det undersøgende arbejde gennem forberedte hjælpe- og udfordrings spørgsmål. Ved længere forløb kan det være nyttigt med opsamlings for hele klassen undervejs. Herved kan man som lærer støtte, at de forskellige grupper kan inspirere hinanden, og man kan opnå en vis synkronisering af gruppernes arbejde, eller der kan foretages en arbejdsdeling mellem forskellige grupper.

I den tredje fase skal elevernes erfaringer, resultater og refleksioner systematiseres og deles i klassen. Det kan fx ske på grundlag af elevernes produkter og fremlæggelser, eller det kan ske ved lærerens opsamling i dialog med klassen. De fællesgjorte erfaringer og resultater kan bruges som grundlag for refleksioner i klassen. Hvad ved vi nu, som vi ikke vidste før, og hvad ved vi stadig ikke? Kan vi formulere nye spørgsmål baseret på resultaterne af vores undersøgelser? Hvilke metoder har vi brugt? De samme eller forskellige? Og kunne der være andre tilgange? Hvilke faglige begreber, repræsentationer og metoder har vi brugt, og hvordan forstår vi dem i den aktuelle kontekst, og har vi så udviklet vores forståelse af disse begreber? På grundlag af sådanne refleksioner er det lærernes opgave at udpege centrale faglige pointer fra det undersøgende arbejde for eleverne og skabe forbindelse til læreplanen. Den tredje fase skal ikke nødvendigvis afsluttes i direkte forlængelse af det undersøgende arbejde. Den kan tages op igen ved behandling af nye faglige emner, der er relevante for den undersøgte problemstilling.

Den trefasede model for design af undersøgende forløb har givet et godt udgangspunkt for samarbejdet med og mellem lærerne i overgangsgrupperne. Modellen blev præsenteret ved de første møder i grupperne sammen med lister over væsentlige og karakteristiske elev- og læreraktiviteter i UM. De er gengivet i figur 4. Derudover blev der i hver gruppe præsenteret og drøftet en række eksempler på forskellige typer af undersøgende aktiviteter. Disse elementer har tilsammen støttet lærerne i at udvikle og gennemføre undersøgende aktiviteter og forløb i deres egen undervisning.

De elev- og læreraktiviteter, der er angivet i figur 4 som karakteristiske, kan naturligvis hver især også forekomme i undervisning, der ikke sigter på at være undersøgende. Pointen er, at de i UM er hyppigt og markant til stede, og at de tilstræbes bevidst, samt at de i undervisningen udpeges for eleverne som havende særlig værdi og betydning for læring og undervisning i kontekst af UM.

En hovedsag i overgangsgrupperne er fælles drøftelse af og refleksion over forslag til forløb, som lærerne overvejer at gennemføre. Ideer diskuteres i forhold til de tre faser, og det overvejes, hvilke aktiviteter der er centrale for elevernes læring, og hvordan læreren kan støtte, at de finder sted.

Essentielle elevaktiviteter	Essentielle læreraktiviteter
<ul style="list-style-type: none"> • at stille spørgsmål • at afgrænse og strukturere • at observere systematisk • at måle og kvantificere • at klassificere • at udvikle definitioner • at beregne og lave overslag • at indføre og anvende symboler • at anvende algebra • at ræsonnere og bevise • at repræsentere og visualisere at anvende algebraisk udtryk • at ræsonnere og bevise • at repræsentere og visualisere • at danne og teste hypoteser • at eksperimentere • at kontrollere variable • at fortolke og vurdere resultater • at kommunikere • at danne og teste hypoteser • at eksperimentere • at kontrollere variable • at fortolke og vurdere resultater • at kommunikere • 	<ul style="list-style-type: none"> • at sætte scenen for undersøgende aktiviteter • at inspirere til undersøgende holdning og tilgange til matematik • at formidle og fællesgøre læringsmål • at bygge på og udbygge elevernes erfaringer • at støtte elevernes ejerskab til problemer og projekter • at skabe rum for dialogisk samspil i klassen • at opmuntre til spørgsmål og refleksion • at stille åbne og nysgerrige spørgsmål til elevernes arbejde • at bemærke og påskønne elevers faglige ideer og ræsonnementer • at værdsætte forsøg og fejl som grundlag for læring • at fremme samarbejde • at udpege og almengøre centrale begreber og metoder • at evaluere elevernes faglige læring • at evaluere forløb og udvikle praksis •

Figur 4: Essentielle elev- og læreraktiviteter i UM.

Tre didaktiske niveauer for samspil mellem udvikling og forskning i SUM

SUM sigter på at skabe samspil mellem matematikdidaktisk forskning og udvikling af praksis ved at anvende en undersøgende tilgang på tre forskellige didaktiske niveauer: (a) Elevers undersøgende arbejde i og med matematik; (b) Læreres brug af UM som middel til at støtte elevernes læring og til at skabe bedre sammenhæng ved den aktuelle overgang; (c) Undersøgelse af samspillet mellem udviklingen af undervisningspraksis og forskning i forhold til punkt (a) og (b).

Udpegningen af disse tre niveauer for en undersøgende tilgang til matematikundervisning er inspireret af Barbara Jaworski (2004, s. 24), der selv har udviklet og anvendt disse niveauer i forbindelse med forsknings- og udviklingsprojekter, som involverer tæt samspil mellem matematiklærere og matematikdidaktiske forskere (Bjuland og Jaworski, 2009).

Det skal bemærkes, at disse didaktiske niveauer angår forskningsperspektivet og derfor ikke stemmer helt overens med de syv organisationsniveauer i figur 1. De didaktiske niveauer (a) og (b) angår ganske vist forskning med fokus på henholdsvis niveauerne 6-7 og niveauerne 5-6 fra figur 1. Men det didaktiske niveau (c) beskriver et metaperspektiv på forskningen og kan ikke henføres til bestemte organisationsniveauer.

Sammenhæng er et nøglebegreb i SUM, og det er en grundlæggende antagelse, at en undersøgende tilgang til udvikling af matematikundervisning på hvert af de tre didaktiske niveauer kan bidrage til at skabe og fastholde sammenhæng henover de identificerede overgange. Sammenhæng har imidlertid forskellige betydninger på hvert af de tre didaktiske niveauer.

På niveau (a) er fokus på børnenes og elevernes motivation for aktiviteter i og læring af matematik. Sammenhæng refererer her til sammenhæng i meningen med og udbyttet af at beskæftige med matematik, som eleverne kan opleve hen over de enkelte overgange. Hvis der passende ofte arbejdes med undersøgende tilgange på de enkelte klassetrin på måder, der er genkendelige for eleverne, fx jævnfør modellen i figur 3, og som fremhæver nogle af de samme matematiske aktiviteter som centrale og værdifulde, jævnfør figur 4, er der grund til at forvente, at det kan bidrage til oplevelse af sammenhæng og til sammenhæng i elevernes læring af matematik.

På niveau (b) er fokus på lærernes udvikling af deres egen praksis gennem brug af UM som et middel til at skabe sammenhæng for eleverne på det første didaktiske niveau (a). For de allerfleste lærere i SUM er det nyt at arbejde bevidst med at skabe rum for elevernes undersøgende arbejde i matematik. Gennem arbejdet i overgangsgrupperne og via erfaringerne med planlægning og gennemførelse af undersøgende aktiviteter og forløb i deres egne klasser bliver lærerne gradvis mere og mere opmærksomme på mulighederne for at støtte elevernes læring i denne type undervisning. Samtidig bliver de også i stigende grad bevidste om de didaktiske udfordringer, man møder som lærer i UM. Det gælder fx de forskellige didaktiske udfordringer, der er knyttet til hver af de tre faser i modellen i figur 3. Lærerne får gennem deres erfaringer grundlag for at efterspørge matematikdidaktisk støtte til håndtering af konkrete udfordringer i deres praksis.

På niveau (c) er der fokus på samspil mellem udviklingen af praksis og forskning. Selve det forhold, at lærerne deltager i et udviklings- og forskningsprojekt, gør det legitimt for dem at eksperimentere med UM i deres praksis. Samtidig giver denne eksperimenterende praksis grundlag for fælles refleksioner i overgangsgrupperne om didaktiseringen af de enkelte forløb og om udvikling af praksis baseret på UM i det hele taget. Det springende punkt er imidlertid, om lærerne selv danner erfaringsbaserede motiver til at eksperimentere med og udvikle deres praksis til også at omfatte UM. Det forhold, at de fleste lærere deltager i en overgangsgruppe sammen med en kollega fra samme skole, og at der i grupperne lægges op til kollegialt samarbejde om UM i egen undervisning, understøtter, at lærerne bliver aktive deltagere i og medskabere af projektet. Det samme gælder projektets fokus på at skabe bedre sammenhænge i elevernes matematiske virksomhed og matematiklæring ved de valgte overgange. Lærerne og pædagogerne i de enkelte overgangsgrupper er med til at udpege, hvilke faglige emner og begreber der skal være i fokus i gruppens UM-forløb. I den sidste fase af projektet er det intentionen, at refleksionerne i grupperne kan angå spørgsmålet om, hvilken rolle og funktion UM kan spille i en fortsat praksis, der søger at skabe sammenhæng for eleverne hen over den aktuelle overgang.

De foreløbige erfaringer og resultater i SUM

Målet med SUM som udviklingsprojekt er netop udviklingen af lærernes matematikdidaktiske kompetencer til kunne anvende UM i deres egen praksis med henblik på sammenhæng ved den aktuelle overgang. Svarende hertil er der et forskningssigte i at belyse, i hvilken grad lærerne udvikler sådanne kompetencer i SUM. Samtidig er det et sigte for forskningen i SUM at bidrage til teoretisk belysning af UM. Det sker ved analyse af den valgte didaktisering i relation til dens muligheder og begrænsninger for at bidrage til sammenhæng ved de fem overgange.

Projektet er i sit tredje skoleår, og indtil videre har vi indsamlet data gennem individuelle interviews og spørgeskemaer med lærere, optagelser af overgangsgruppemøder og fokusgruppeinterviews med lærere. De foreløbige resultater viser, at:

- det tager lang tid at etablere et godt og målrettet samarbejde i overgangsgrupperne om udvikling og afprøvning af UM.
- det teoretiske grundlag for UM spiller i udgangspunktet en mindre rolle for lærerne. Det kræver en særlig indsats i overgangsgrupperne at få knyttet de generelle principper til den generelle didaktisering af UM og til de konkrete undervisningsforløb.
- det tager tid for lærerne at opbygge fælles motiver for anvendelse af undersøgende tilgange til at bidrage til at skabe sammenhæng ved den aktuelle overgang.
- samarbejde med kollegaer, der underviser på andre klassetrin og ved andre institutioner om at skabe sammenhæng i elevernes arbejde med og læring i matematik, bliver oplevet af lærerne som særdeles relevant og interessant.
- den trefasede model er en god og nødvendig støtte for lærernes udvikling og afprøvning af undersøgende aktiviteter og forløb og for deres efterfølgende refleksioner i gruppen.
- udpegningen af karakteristiske elev- og læreraktiviteter tjener som støtte ved planlægning, afprøvning og refleksion over forløb, og lærere kan selv udvide listen og knytte de enkelte aktiviteter til hver af de tre faser.
- for de allerfleste lærere er det den tredje fase, der rummer de største didaktiske udfordringer. For lærere på gymnasialt niveau med en solid faglig baggrund er det dog i højere grad fase 1 og 2, der volder udfordringer.
- flere lærere efterspørger inspiration og støtte til udvikling af undersøgende aktiviteter, der er målrettet læringsvanskeligheder knyttet til specifikke matematiske begreber eller emner.
- lærerne i stigende grad efterspørger didaktisk støtte, der kan imødekommes i overgangsgrupperne, til konkrete udfordringer i deres egen praksis, fx i forhold til differentieret støtte og hjælp til forskellige elevgrupper og håndtering af dialogen med eleverne i fase 2.
- det er vigtigt for lærerne at se eksempler på forskellige typer af undersøgende aktiviteter og forløb i forhold til matematikfaglige tilgange og forskellige grader af frihed for elevernes undersøgende arbejde.
- deltagelse i et længerevarende udviklingsprojekt giver mulighed for at blive bevidst om egen udvikling, og at det har stor betydning for lærerne, at projektet er synligt på skolen.

Erfaringerne tyder generelt på, at organiseringen af SUM udgør en hensigtsmæssig og realistisk ramme for samspil mellem udvikling af praksis og forskning inden for UM. Lærerne efterspørger naturligvis forskning, der meget konkret kan støtte udvikling af aktiviteter og forløb, men de er også interesseret i teorier, der belyser de vanskeligheder, de møder i deres praksis. På begge fronter er der tale om, at der allerede findes relevante teorier, men de udfordringer, lærerne oplever i SUM, kan i høj grad også give anledning til og grundlag for ny forskning.

Set i forhold til udvikling af lærernes kompetencer til at bedrive UM er det værd at fremhæve, at de henvendte 40 praktikere, der ender med at have deltaget i hele projektet, har samarbejdet i overgangsgruppen med kollegaer og matematikdidaktikere om at designe, teste og evaluere aktiviteter og forløb i UM i deres egen praksis mindst ni gange i løbet af tre skoleår. Hertil kommer, at omtrent ligeså mange har deltaget i et eller to skoleår. Samtidig har praktikerne været involveret i udvikling af og refleksion over oplæg til UM, der er gennemført af andre i deres overgangsgruppe.

Bedømt ud fra, hvad der vides om betingelser for, at professionel udvikling for lærere kan få gennemslag som blivende forandring af undervisningspraksis, udgør SUM en realistisk ramme for den kompetenceudvikling, der er målet med projektet.

Boaler (2008) fremhæver således – baseret på et survey over projekter inden for professionel udvikling for matematiklærere – at et fælles træk ved projekter, der skaber varig forbedring af praksis er, at de giver mulighed for og støtte fra forskere til, at lærere kan samarbejde om udvikling og afprøvning af nye undervisningsformer i deres egen praksis. SUM-projektet er designet netop med henblik på at skabe sådanne muligheder for samspil i de enkelte overgangsgrupper.

Baseret på forskning i tilknytning en lang række projekter inden for læreres professionelle udvikling argumenterer Guskey (2002) for, at læreres udvikling i vid udstrækning kan forstås ud fra en model med følgende faser, som må gennemleves, for at udviklingen fører til blivende ændring af praksis.

- (1) Støtte til at gøre noget nyt i egen undervisning i projekter eller kurser *kan føre til*
- (2) Forandring af egen praksis i enkelte forløb *kan føre til*
- (3) Oplevelse af forbedret respons og læringsudbytte hos eleverne *kan føre til*
- (4) Lærers ændrede opfattelser af og holdning til fag, undervisning og læring.

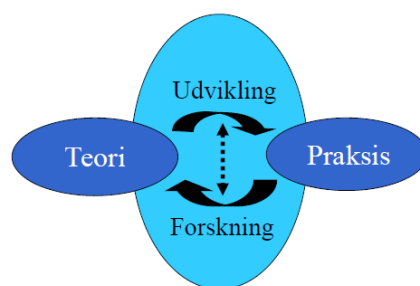
Det er en pointe i modellen, at lærernes ændrede opfattelser af undervisning og læring i faget bør ses og forstås snarere som en konsekvens af end som en forudsætning for ændring af praksis.

Ved indgangen til det tredje skoleår i SUM var det vurderingen, at lærerne generelt er kommet til fase 3. De allerfleste har oplevet i hvert fald nogle velfungerende undersøgende forløb i deres egen undervisning. For nogle lærere er der også indikationer på, at de er nået til fase 4. De sidste seminarer vil i høj grad blive brugt til præsentation af og refleksion over gennemførte forløb. Det er sigtet og håbet, at der herved kan skabes grundlag for fælles diskussion af, hvilken rolle og funktion UM kan have i forhold til at skabe sammenhæng ved den aktuelle overgang.

Endvidere vil der blive afholdt en afsluttende konference, hvor arbejdet i overgangsgrupper vil blive præsenteret og diskuteret. Endelig vil der også være mulighed for, at lærerne kan være medforfattere til artikler om deres arbejde i projektet. Disse aktiviteter kan forhåbentlig også bidrage til, at flere lærere når fase 4 som resultat af refleksioner over deres medvirken i SUM. Det skal imidlertid understreges, at det ikke har været målet med SUM at ”omvende” de deltagende matematiklærere til tilhængere af UM, men derimod at udvide deres repertoire til på et reflekteret grundlag også at kunne anvende undersøgende tilgange i egen praksis blandt andet med sigte på at skabe bedre sammenhænge for eleverne ved den overgang, de har arbejdet med i SUM.

Muligheder og vilkår for samspil

Relationen mellem forskningsbaseret udvikling og forskning kan ses som samspil mellem to processer, der forbinder praksis med teori i hver sin retning. Den ene retning handler om at udnytte forskningens tilgange og resultater i form af teorier og metoder til udvikling af praksis. Den anden retning handler om at bedrive forskning i udvikling af undervisningspraksis og derigennem udvikle ny viden og teori om praksis. Det er illustreret i figur 5. (Blomhøj, 2008)



Figur 5: Samspil mellem udvikling og forskning i matematikdidaktik.

Specielt hvad angår niveau 5-7 i figur 1, hvor samspillet manifesterer sig som samarbejde mellem lærere og forskere, er der mulighed for synergi mellem de to processer. For forskningen betyder samspillet, at relevansen for udvikling af praksis sikres, og at det er muligt at etablere en relevant undervisningspraksis som grundlag for forskningsmæssig undersøgelse. For udviklingen af praksis betyder samspillet, at relevante teorier kan blive konkretiseret og bragt i spil som grundlag for lærernes udvikling af undervisning. Figur 5 repræsenterer en forståelse af samspillet mellem udvikling og forskning, hvor teori og praksis er forskellige, men ligeværdige elementer. I det lyseblå felt kan lærere og forskere samarbejde ligeværdigt på grundlag af deres forskellige viden om og perspektiv på teori og praksis med det fælles sigte at skabe samspil mellem forskning og udvikling af en undervisningspraksis. Det kræver lærernes og forskernes gensidige anerkendelse af udviklings- og forskningsperspektivet.

Udfordringen er, at det er vanskeligt at etablere de nødvendige betingelser for et sådant samspil. Fagdidaktisk forskning og undervisningspraksis udfolder sig normalt under meget forskellige sociologier og vilkår. Det kræver særlige omstændigheder, fx i form af udviklings- og forskningsprojekter, at etablere længerevarende og stabile rammer for samspil mellem lærere og forskere. I forhold til udvikling af praksis er det meget begrænset, hvor mange lærere der kan deltage i sådanne projekter. Gennemslag ved udvikling af praksis generelt kræver således, at de overliggende niveauer inddrages, og her er vilkår og muligheder for samspil mellem forskning og udvikling af praksis nogle andre. Det må belyses nærmere i andre sammenhænge.

Referencer

- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). "Conceptualising inquiry based education in mathematics". *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 797-810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bjuland, R. & Jaworski, B. (2009). Teachers' perspectives on collaboration with didacticians to create an inquiry community. *Research in Mathematics Education*, 11(1), 21-38. <https://doi.org/10.1080/14794800902732209>
- Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. København: Frydenlund.
- Blomhøj, M. (2013): Hvad er undersøgende matematikundervisning – og virker den? I: M. Wahl Andersen og P. Weng (red.), *Håndbog om matematik i grundskolen. Læring, undervisning og vejledning*, 172-188. København: Dansk Psykologisk Forlag.
- Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2014). Brug af didaktisk teori i læreres udvikling af modelleringsprojekter i matematik. *MONA*, 2, 42-63.

Blomhøj, M. (2008). ICMI's challenges and future. In Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L. & Arzarello, F. (eds.): *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 169-179.

<https://doi.org/10.1007/s10649-009-9211-3>

Boaler, J. (2008). Bridging the gap between research and practice: International examples of success. In Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L. & Arzarello, F. (eds.): *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 91-104. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9211-3>

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education*. Springer, Cham., 173-187.

https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. *Handbook of international research in mathematics education*, 3, 481-503. Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>

Guskey, T. R. (2002). Professional development and teacher change. *Teachers and teaching*, 8(3), 381-391.

<https://doi.org/10.1080/135406002100000512>

Haavold, P. Ø., & Blomhøj, M. (2019). Coherence through inquiry based mathematics education. In the *Proceedings of CERME 11*.

Hvalsøe Schou, M. (2018). *ABC - Actors at the Scene of Mathematics - An investigation of how students understand mathematical symbols and formulas in upper secondary school*. Ph.d.-afhandling ved Syddansk Universitet.

Jankvist, U.T & Niss, M. (2015). A framework for designing a research-based 'maths counsellor' teacher programme. *Educational Studies in Mathematics*, 90 (3), 259-284. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9629-8>

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational studies in mathematics*, 54(2-3), 249-282.

<https://doi.org/10.1023/b:educ.0000006160.91028.f0>

Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. Plenary address at PME 28. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 17-36).

Jessen, B. E. (2017). *Study and Research Paths at Upper Secondary Mathematics Education: a Praxeological and Explorative study* (Doctoral dissertation), Department of Science Education. Copenhagen: University of Copenhagen.

Kunnskapsdepartementet (2016). *Fag – Fordypning – Forståelse. En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Stortingsmelding 28. Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Mogensen, A. (2015). Lektionsstudier i skolen – kollegial sparring gennem fælles studier. København: Dafolo.

Niss, M. (2016). Målstyret matematikundervisning?!. *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, 1, 69-73.

Niss, M. (2007). Reflections on the state and trends in research on mathematics teaching and learning: From here to Utopia. I: F. K. Jr. Lester (red.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. NCTM.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40 (1), 1-24.

Niss, M. (1993). Centrale problemstillinger i matematikkens didaktik i 1990'erne. I: Andersen (red.), *15. Nordiske LMFK-kongres*. Konferencerapport. Århus: LMFK, 11-47.

Niss, M., & Jankvist, U. T. (2020). *Matematikvejledning i gymnasiet – anvendelse af teori i praksis*. København: Frydenlund.

Niss, M., & Jankvist, U. T. (2017). *Læringsvanskeligheder i matematik – hvordan kan de forstås og afhjælpes*. København: Frydenlund.

Niss, M., & Jankvist, U. T. (2016). *Fra Snublesten til Byggesten – matematikdidaktiske muligheder*. København: Frydenlund.

Schoenfeld, A. H. (2018). Video Analyses for Research and Professional Development: The Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 50(3), 491-506. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0908-y>

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections of processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36. <https://doi.org/10.1007/bf00302715>

Skott, C. K., & Kaas, T. (2015). Matematiklæreres planlægningspraksis og læringsmålstyret undervisning. *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, 4, 7-24.

Tall, D. & Vinner, S., 1981: Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169. <https://doi.org/10.1007/bf00305619>

Skovsmose, O. (2006). Kritisk matematikundervisning – for fremtiden. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.) *Kunne det tænkes? – om matematiklæring*. København: Malling Beck, 273-295.

Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.) (2006). *Kunne det tænkes? – om matematiklæring*. København: Malling Beck

Skovsmose, O. & Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Ed.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology*. Dordrecht: Kluwer, 207-226. https://doi.org/10.1007/1-4020-7914-1_17

Skånstrøm, M. & Blomhøj, M. (2016). Det kommer an på... I Rangnes, T.E. og Alrø, H (red.) *Matematiklæring for Framtida*. Caspar forlag.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. New York: Springer Science & Business Media.

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer - En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Biofolia.

ZDM (2013). Implementation of Inquiry-Based Learning in Day-to-Day Teaching. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 779-923. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0528-0>

Østergaard, K. (2016). *Teori-praksis-problematikken i matematiklæreruddannelse: belyst gennem lektionsstudier*. Roskilde Universitet: IMFUFA.

English summary

This chapter sheds light on conditions and opportunities for interaction between the development of mathematics teaching practice and research in mathematics education at different levels in the system in which the practice of mathematics teaching is formed and taking place. The chapter draws on experiences from a large research and development project on the use of inquiry based mathematics teaching (IBMT). The overall developmental aim of the project is to develop the teachers' competence for using IBMT as a means for improving the coherence in students' motivation for and learning of mathematics at the following selected five transitions (T1-T5) in the educational system:

Kindergarten (T1) → Primary school (T2) → Middle school (T3) → Lower secondary (T4) → Upper secondary (T5) → University

The analysis focuses on the levels where there is an opportunity for direct interaction between teachers and researchers – that is at the level of the class at a certain grade, at course level in a

specific class, and at the level of interactions with a class, small groups of students, or individual students with regard to specific activities. The paper concludes with a discussion of the potentials and limitations in developing practices of IBMT in collaboration between teachers and researchers and ends with some reflections on interplay between the development of teaching practice and research in mathematics education more generally.

Keywords (dansk)

Systemiske niveauer for samspil mellem praksis og forskning, teoribaseret udviklingsprojekt, en didaktisk model for undersøgende matematikundervisning (UM), elevaktiviteter i UM, matematiklæreres professionelle udvikling.

Keywords (English)

Systemic levels for interplay between practice and research, theory based developmental project, a didactic model for IBMT (Inquiry Based Mathematics Teaching), students' activities in IBMT, mathematics teachers' professional development

Forfatteroplysninger

Morten Blomhøj

Professor DPU, AU. Leder af NCUM | Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning, Forsker i matematikdidaktik generelt og specielt i undersøgende matematikundervisning og matematisk modellering.

blomhoej@edu.au.dk,

<https://pure.au.dk/portal/da/organisations/8000/persons.html?query=Morten+Blomh%C3%B8j&organisationName=&organisations=&keyword=>

