

Nobelprisen i økonomi 2012: To matematikere guider den usynlige hånd

Alvin Roth og Lloyd Shapley fik Nobelprisen i økonomi i 2012. Med udnævnelsen cementeres spilteoriens store betydning for hele det samfundsvidenskabelige område. I artiklen præsenteres en kort og ikke-teknisk gennemgang af ideerne bag nogle af deres hovedbidrag.



JENS LETH HOUGAARD

professor
Institut for Fødevare- og Ressourceøkonomi,
Københavns Universitet
jlh@ifro.ku.dk

I 2012 gik Nobelprisen i økonomi til amerikanerne Alvin Roth og Lloyd Shapley for deres arbejde med allokeringsmekanismer af markeddesign. Hermed blev der tilføjet to nye medlemmer til den stadigt voksende gruppe af (hvad der bredt kan betegnes som) spilteoretikere, der er sluppet igennem Nobelkomiteens nåleøje, og tildelingen kan altså ses som endnu en indikation af den enorme indflydelse, som spilteorien har haft ikke blot på det økonomiske fagområde, men på samfundsvidenskab som helhed. Den eksklusive klub af spilteoretikere, der har fået Nobelprisen, omfatter derudover Nash, Selten, Harsanyi, Aumann, Schelling, Hurwitz, Myerson og Maskin, og er altså nu oppe på 10 medlemmer.

Alvin Roth er den yngste af de to (født i dec. 1951) og er for nyligt flyttet til et professorat på Stanford University efter i en årrække at have været ansat på Harvard. Han har en PhD-grad i operationsanalyse fra Stanford. Roth er nok mest kendt for sit arbejde med praktisk design af matchningsmekanismer.

Lloyd Shapley er født i 1923 og er i dag professor emeritus på University of California, Los Angeles (UCLA). Han har en PhD-grad i matematik fra Princeton. Shapley er nok mest kendt for sit grundlæggende teoretiske arbejde inden for kooperativ spilteori.

Begge har de en omfattende videnskabelig produktion bag sig og har haft stor betydning inden for en række forskellige områder der inkluderer; kooperativ spilteori, omkostningsfordeling, aksiomatisk forhandlingsteori, eksperimentel økonomi og matchning. Det siger derfor sig selv, at denne artikel ikke

kan dække det hele. I det følgende vil jeg derfor gennemgå, hvad der sikkert mest rimeligt kan betegnes som et personligt udvalg af deres mange bidrag til vores forståelse af allokering og praktisk markeddesign.

Normalt er allokering noget, man bør overlade til markedet, men hvordan designer man allokeringsmekanismer, når man af den ene eller anden årsag ikke ønsker en egentlig prisdannelse? Kan man i det hele taget komme op med retningslinjer for, hvad der er fair og hensigtsmæssig allokering? Og kan vores forståelse af økonomisk interaktion således i praksis føre til, at vi kan styre udfaldet til alles fordel? Dette er alle eksempler på spørgsmål, som Roth, Shapley og deres samarbejdspartnere har hjulpet økonomer til at få en bedre forståelse af.

Vi starter med et fælles udgangspunkt – *matching* (se f.eks. Roth og Sotomayor, 1992). Betragt en situation, hvor to grupper skal matches med hinanden en og en, altså således at hvert element i en gruppe skal matches med et, og kun et, element i den anden gruppe – såkaldt 1-1 *matching*. I den kulørte version kan vi tænke på en gruppe gamle rige mænd, der skal matches med en gruppe unge smukke kvinder. I princippet behøver grupperne ikke være lige store – man kan godt blive matchet med sig selv og således ende op som single. Ikke helt urealistisk antager vi, at alle mændene har en komplet rangordning af alle kvinderne, og at alle kvinderne har en komplet rangordning af alle mændene. Når vi nu skal finde en konkret *matching*, vil det være naturligt at tage hensyn til disse præferencer. Et oplagt succeskriterium for en konkret *matching* vil derfor være, hvorvidt matchet er stabilt i den forstand, at

intet par (mand, kvinde) hellere vil være sammen med hinanden end med den partner, de er blevet tildelt i den konkrete matchning.

Spørgsmålet er blot, om sådan en stabil matchning eksisterer og hvordan vi i så fald finder den. Her kommer Shapley os til hjælp med den såkaldte Gale-Shapley-algoritme: Lad mændene fri til deres foretrukne kvinde, hvis en kvinde har flere tilbud, vælger hun den højest rangerede mand blandt frierne. Resultatet er således en række forlovelser. Hvis der stadig er umatchedede mænd, frier disse nu til deres næstbedste valg. Hvis dette inkluderer en kvinde, der allerede er forlovet, vælger hun at bryde forlovelsen, hvis det nye tilbud er bedre osv., indtil alle er matchede. Det siger sig selv, at vi også kunne have ladet kvinderne fri først. Resultatet af sådan en trinvis procedure kan vises at være en stabil matchning, så algoritmen er samtidig et konstruktivt bevis for, at der *altid* eksisterer mindst én stabil matchning i 1-1 problemer, hvor grupperne har en komplet rangordning af hinanden. Eksistensen er i sig selv bemærkelsesværdig, da det langt fra er tilfældet i variationer over denne matchning situation, jf. f.eks. det såkaldte »roommates«-problem, hvor en gruppe studerende skal matches to og to på kollegieværelser (her kan vi let have, at der ikke findes en stabil matchning). Men det rigtig interessante resultat er i denne forbindelse, at den matchning, der kommer ud af at lade mændene fri til kvinderne, er bedst for mændene og værst for kvinderne (blandt alle de stabile match) og omvendt, den matchning, der kommer ud af at lade kvinderne fri til mændene, er bedst for kvinderne og værst for mændene. Ganske tankevækkende, når man kombinerer denne viden med diverse sociale konventioner.

Roth fører arbejdet med matchning videre til en række konkrete eksempler på praktisk markedsdesign i situationer, hvor en central koordinering viser sig fordelagtig.

Turnusforløb for medicinstuderende i USA (se f.eks., Roth og Peranson, 1999): Når de medicinstuderende er færdige på universitet, skal de i turnus på et hospital for at få den sidste praktiske del af deres uddannelse. Det siger sig selv, at ikke alle hospitaler er lige attraktive for de studerende og ikke alle studerende er lige attraktive for hospitalerne. Før Roth foregik hele denne proces, ved at hospitalerne kappedes om at tilbyde de bedste studerende turnuspladser, og de studerende var så i den lidt ubehagelige situation, hvor de ikke rigtig vidste, om de skulle acceptere et konkret tilbud på et givet tidspunkt, eller om de hellere skulle vente og se sig, om ikke et bedre tilbud skulle dukke op. Der er klare fordele for alle parter ved, at denne matchning foregår centralt og med et stabilt udfald, så man undgår at spille tid og ressourcer på unødvendige kontraktbrud.

Til at løse dette problem kan man bruge en variant over Gale-Shapley algoritmen kaldet NRMP-algoritmen (efter National Resident Matching Program), idet vi nu er i en situation, hvor ét hospital godt kan være matchet med mange studerende, men én studerende kun kan være matchet med ét hospital. Roth (og samarbejdspartnere) viser, at selv når man tager

hensyn til, at par (blandt studenterne) gerne vil matches med samme hospital, kan en allokeringssprocedure baseret på, at de studerende »frier« til hospitalerne, resultere i et stabilt udfald, der i praksis ikke kan manipuleres. Når man herhjemme læser i dagspressen om medicinstuderende, der sælger deres turnuspladser for op til 200.000 kr. på det sorte marked, er det altså, fordi vi i Danmark har valgt ikke at bruge en algoritme ala NRMP, og at man åbner op for at lade de studerende bytte efterfølgende. I vores lille socialdemokratiske land er det naturligvis en kættersk tanke, hvis vi skulle lade de bedste hospitaler vælge de mest talentfulde studerende, således at de kunne få den bedst mulige uddannelse. Hospitalerne har således ikke lov til rangordne de studerende i det danske system, med det resultat at den tilknyttede lodtrækning altså kan slå en top-studerende hjem til det lille provinsygehus.

Ved første øjekast virker det måske ikke så tosset, at der efterfølgende opstår et marked, hvor den slags fejlallokeringer delvist kan udbedres (ved brug af penge), men problemet er imidlertid, at muligheden for et efterfølgende marked får de studerende til at manipulere med deres præferencer. Lad os sige, at en studerende af familiemæssige årsager rent faktisk ønsker at få en plads på provinsygehuset. Da vedkommende godt ved, at han er temmelig ene om dette ønske, er det derfor helt frit for ham at lade, som om han helst vil ind på det nye supersygehus i storbyen. Hvis han skulle være heldig at få pladsen, kan han jo altid sælge den til den uheldige sjæl, der endte op i provinsen. Central allokering skal altså være gennemtænkt fra starten. En yderligere introduktion til problemet på dansk findes i Hougaard et al. (2007).

Nyreudvekslingsprogram i New England, USA (se f.eks. Roth et al., 2004): Et af de seneste eksempler på Roth's design af matchningsmekanismer findes inden for organtransplantation, hvor etiske hensyn står i vejen for et egentligt marked med en prisdannelse. Ventelisten på organer (typisk nyrer) er ofte lang, og selv med en donor i baghånden kan en patient ikke være sikker på et fysiologisk match og dermed anvendeligheden af donors organ. Men set blandt en større gruppe af patient-donor-par vil der åbne sig muligheder for nyreudveksling i den forstand, at to patienter, der begge har en inkompatibel donor, men som hver især er kompatibel med den andens donor, kan matches med den andens donors organ, og derved vil begge kunne modtage en kompatibel nyre. I princippet kan sådanne udvekslinger finde sted i vilkårligt store »kæder« af patient-donor-par, men i praksis er der ofte en række faktorer, der begrænser størrelsen. Opgaven er således igen at finde en passende matchning af donorer og patienter. Patienterne kan rangordne donorerne, f.eks. efter deres vævstypematch eller alder. Til at finde optimale udvekslinger bruges den såkaldte »Top Trading Cycles and Chains« (TTCC) mekanisme, hvor patienterne til start peger på deres fortrukne donor. Under passende omstændigheder kan det vises, at den resulterende matchning er Pareto-optimal (altså at der ikke eksisterer en anden matchning, som alle patienter finder mindst lige så god og mindst et patient-donor par finder strengt bedre) og ikke kan manipuleres, ved at patienterne lyver om deres præferen-

cer. En yderligere introduktion til problemet på dansk findes i Beierholm et al. (2009).

Hvis vi tager skridtet endnu længere tilbage og spørger, om vi kan finde helt grundlæggende principper for fair allokering, f.eks. i situationer hvor agenterne end ikke kan formulere præferencer, er vi tilbage i hjertet af kooperativ spilteori og på Shapley's hjemmebane. Antag f.eks., at to venner deler en taxa på hjem fra en drukatur i byen. De bor begge langs den samme vej (Tuborgvej), den ene blot længere ude end den anden. Det er klart økonomisk efficient, at de deler taxaen og altså ikke hopper ind i hver sin taxa. Problemet er nu blot, hvordan de deler regningen. Formelt kan vi således se situationen som følger: en gruppe agenter (her de to venner) involveres i en fællesaktivitet (taxa-turen) med en samlet resulterende omkostning. Omkostningen for hver agent alene kendes også (ligesom det er tilfældet med omkostningen for en vilkårlig undergruppe, hvis der er mere end to agenter). Dette udgør et såkaldt »Transferable Utility« (TU) spil. Et centralt spørgsmål er nu, hvordan den samlede omkostning kan deles således, at denne deling understøtter samarbejdet (da dette jo er efficient). Det virker rimeligt klart, at vi aldrig kan tvinge nogen til at betale mere af den fælles regning, end de selv kan løse opgaven for – hvis vi gør det, vil de med stor sandsynlighed bryde samarbejdet. Derfor må vi sikre, at alle individuelle agenter (og grupper af agenter) betaler mindre end deres såkaldte egen-omkostning. Mængden af fordelinger af de fælles omkostninger, der har denne egenskab, kaldes *kernen* af TU-spillet. Ved brug af dualitetssætningen fra lineær programmering kan det lade sig gøre at opstille nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at der findes sådanne løsninger (altså at kernen ikke er tom) – det såkaldte Bondareva-Shapley-teorem (se f.eks. Shapley, 1967, 1971). At kernen ikke er tom i taxa-eksemplet, er let at se, idet den af vennerne, der bor længst ude, jo skulle have betalt hele turen selv, hvis han ikke havde delt taxaen med den anden. Spørgsmålet er derfor alene, hvor meget han kan vride ud af sin medpassager.

Til at bestemme den endelige fordeling foreslår Shapley, at vi kigger på et vægtet gennemsnit af den enkelte agents marginale omkostninger forbundet med at træde ind i et samarbejde med de øvrige agenter (altså gruppens omkostning med agenten mi-

nus omkostningen uden agenten) – den såkaldte Shapley-værdi (se f.eks. Shapley, 1953). I taxa-eksemplet får vi således den intuitivt smukke løsning, at omkostningerne ved den første del af turen (indtil første mand stiger ud) deles lige mellem de to venner, hvorimod den sidste del betales alene af ham, der bliver tilbage i taxaen. Denne fordeling er i kernen, da ingen af de to venner kan gøre det billigere ved at tage en taxa selv. Men faktisk er det ikke altid, at Shapley-værdien ligger i kernen – dette gælder kun, hvis samarbejdsfordelene altid er tilpas store.

Varianter af Shapley-værdien bruges også i andre sammenhænge. Antag for eksempel, at en virksomhed producerer to forskellige produkter (udbringning af brev- og pakkepost) til en samlet fællesomkostning. Hvis virksomheden, som i dette tilfælde kunne være postvæsenet, er et såkaldt »naturligt monopol«, er der gode reguleringsmæssige grunde til at holde øje med, hvordan virksomheden prisfastsætter de enkelte produkter, således at konkurrencen ikke forvrides. Til at afgøre om der er tale om en fair prisfastsættelse, skal det være muligt at kunne bestemme omkostningerne for de enkelte produkter, men disse er jo netop sambestemte, så vi behøver en måde af fordele dem ud på de enkelte produkter på. Næppe overraskende kommer Shapley os til hjælp igen: Vi kan bruge Shapley-værdien relativt direkte ved at bestemme produktionsomkostninger for alle delmængder af produkterne (hvor mængden for hvert af de øvrige produkter sættes lig nul) – dette giver os et TU-spil (i produkterne), hvor direkte brug af Shapley-værdien ofte refereres til som brug af Shapley-Shubik-fordelingsregelen. Men man kan også benytte den såkaldte Aumann-Shapley-pris, der er defineret som gennemsnittet af marginalomkostningerne for det enkelte produkt over alle proportionalt producerede mængder (mindre end mængden selv). Blandt økonomer har der længe været konsensus omkring anbefaling af Aumann-Shapley priser, selvom relativt ny forskning peger på potentielle problemer med denne tilgang.

Hvis man nu har fået lyst til selv at kaste sig ud i design af allokeringmekanismer, eller bare gerne vil vide mere, kan man finde en general introduktion til fordelingsproblemer og fordelingsregler i Hougaard (2009). Ellers findes der glimrende fremstillinger i Young (1994) og Moulin (1988).

LITTERATUR

- Beierholm, M.L., Platz, T.T. og Østerdal, L.P. (2009), Organdonation og – allokering i et mikroøkonomisk perspektiv, *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, 147, 265-296.
- Hougaard, J.L., Kolind, J.M. og Østerdal, L.P., (2007), Danske lægers turnusordning, *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, 145, 144-163
- Hougaard, J.L. (2009), *An Introduction to Allocation Rules*, Springer.
- Moulin, H. (1988), *Axioms of Cooperative Decision Making*, Econometric Society Monographs, Cambridge University Press.
- Roth, A.E. og Peranson, E. (1999), The redesign of the matching market for American physicians: Some engineering aspects of economic design, *American Economic Review*, 89, 748-79.
- Roth, A.E. og Sotomayor, M.A.O. (1992), *Two-sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monographs, Cambridge University Press.
- Roth, A. E., Sönmez, T. og Ünver, M.U. (2004), Kidney Exchange, *Quarterly Journal of Economics*, 119, 457-88.
- Shapley, L., (1953), A value for n-person games, *Annals of Mathematical Studies*, 28, 307-318.
- Shapley, L., (1967), On balanced sets and cores, *Naval Research Logistics Quarterly*, 14, 453-460.
- Shapley, L., (1971), Cores of convex games, *International Journal of Game Theory*, 1, 11-26.
- Young, H.P. (1994), *Equity*, Princeton.