Nationaløkonomisk Tidsskrift 133 (1995): 52-65

Faktorefterspørgsel på kort og langt sigt

Thomas Thomsen
Modelgruppen, Danmarks Statistik

SUMMARY: *This paper deals with the theory of production functions, or more specifically the demand for production factors. In the paper the distinction between the short and the long run is discussed, and it is shown that it is very simple to form short-run factor demands from long-run factor demands, even if the underlying production function is unknown. This result, involving »shadow« or »virtual« prices, is illustrated in the two-factor case by the CES production function and graphically in the three-factor case. Finally, the result is illustrated empirically (with four production factors), this time by the GL cost function.*

1. Indledning

Det er i teorien om efterspørgslen efter produktionsfaktorer nødvendigt at sondre mellem kort og langt sigt på grund af trægheder. At en produktionsfaktor er træg vil sige, at den på *kort sigt* ikke antager det niveau, som er optimalt på *langt sigt,* fordi der er leveringstider, usikkerhed, tilpasningsomkostninger osv. Disse forhold gør, at det på kort sigt er for dyrt at tilpasse de træge produktionsfaktorer til det niveau, som er optimalt på langt sigt. I lærebøger antages det f.eks. ofte, at kapitalapparatet er givet; dvs. fuldstændigt trægt på kort sigt, og virksomhederne må så lade de *fleksible* produktionsfaktorer kompensere for denne træghed. I denne artikel fokuseres der udelukkende på *konsekvenserne* af træghederne og ikke på *årsagerne* til disse.

Antag at produktionen, Y, er en funktion af de to produktionsfaktorer kapitalapparat, K, og arbejdskraft, L; dvs. $Y = F(K, L)$. Hvis Y og K er givne på kort sigt, må L da antage det niveau, som lige præcis er nødvendigt for at »producere produktionen«. Denne nødvendige arbejdskraft findes ved at løse $Y = F(K, L)$ for L, og hvis der opereres med en almindelig (kvasikonkav) produktionsfunktion med konstant skalaafkast, betyder det, at hvis Y stiger, må L som følge af trægheden i K på kort stige med *mere* end Y, selv om der er konstant skalaafkast.[1]

Tak til Ellen Andersen, John Smidt, Dan Knudsen og modelgruppens medarbejdere for gode kommentarer.

1. Det skal her bemærkes, at måleenhederne for kapitalapparatet og arbejdskraften er afgørende for fortolkningerne, idet der i opgangsperioder for kapitalapparatets vedkommende kan være tale om forøget udnyttelsesgrad (f.eks. via skiftehold) og for arbejdskraftens vedkommende om uregistreret overarbejde eller løben hurtigere. Disse effekter er utvivlsomt relevante teoretisk set, men problemet er naturligvis, at de er vanskelige at måle, og derfor ignoreres de sædvanligvis i empiriske analyser, jf. senere i afsnit 4.

Nationaløkonomisk Tidsskrift 133 (1995): 52-65

Faktorefterspørgsel på kort og langt sigt

Thomas Thomsen
Modelgruppen, Danmarks Statistik

SUMMARY: *This paper deals with the theory of production functions, or more specifically the demand for production factors. In the paper the distinction between the short and the long run is discussed, and it is shown that it is very simple to form short-run factor demands from long-run factor demands, even if the underlying production function is unknown. This result, involving »shadow« or »virtual« prices, is illustrated in the two-factor case by the CES production function and graphically in the three-factor case. Finally, the result is illustrated empirically (with four production factors), this time by the GL cost function.*

1. Indledning

Det er i teorien om efterspørgslen efter produktionsfaktorer nødvendigt at sondre mellem kort og langt sigt på grund af trægheder. At en produktionsfaktor er træg vil sige, at den på *kort sigt* ikke antager det niveau, som er optimalt på *langt sigt,* fordi der er leveringstider, usikkerhed, tilpasningsomkostninger osv. Disse forhold gør, at det på kort sigt er for dyrt at tilpasse de træge produktionsfaktorer til det niveau, som er optimalt på langt sigt. I lærebøger antages det f.eks. ofte, at kapitalapparatet er givet; dvs. fuldstændigt trægt på kort sigt, og virksomhederne må så lade de *fleksible* produktionsfaktorer kompensere for denne træghed. I denne artikel fokuseres der udelukkende på *konsekvenserne* af træghederne og ikke på *årsagerne* til disse.

Antag at produktionen, Y, er en funktion af de to produktionsfaktorer kapitalapparat, K, og arbejdskraft, L; dvs. $Y = F(K, L)$. Hvis Y og K er givne på kort sigt, må L da antage det niveau, som lige præcis er nødvendigt for at »producere produktionen«. Denne nødvendige arbejdskraft findes ved at løse $Y = F(K, L)$ for L, og hvis der opereres med en almindelig (kvasikonkav) produktionsfunktion med konstant skalaafkast, betyder det, at hvis Y stiger, må L som følge af trægheden i K på kort stige med *mere* end Y, selv om der er konstant skalaafkast.[1]

Tak til Ellen Andersen, John Smidt, Dan Knudsen og modelgruppens medarbejdere for gode kommentarer.

1. Det skal her bemærkes, at måleenhederne for kapitalapparatet og arbejdskraften er afgørende for fortolkningerne, idet der i opgangsperioder for kapitalapparatets vedkommende kan være tale om forøget udnyttelsesgrad (f.eks. via skiftehold) og for arbejdskraftens vedkommende om uregistreret overarbejde eller løben hurtigere. Disse effekter er utvivlsomt relevante teoretisk set, men problemet er naturligvis, at de er vanskelige at måle, og derfor ignoreres de sædvanligvis i empiriske analyser, jf. senere i afsnit 4.

Analyser, i hvilke det sikres, at man »er på produktionsfunktionen« – også på kort sigt – kaldes tredje-generationsmodeller, og med kun to produktionsfaktorer er kortsigtsniveauet for L givet uden videre ved at løse produktionsfunktionen for L. Er der derimod flere fleksible produktionsfaktorer, er det ikke længere oplagt, hvad der er optimalt. Hvis der f.eks. også bruges energi, E, er produktionsfunktionen på kort sigt givet som $Y = \mathrm{F}(\bar{K}, L, E) = \mathrm{G}(L, E)$. Der er nu uendelig mange kombinationer af L og E, som kan »producere produktionen« givet $K = \bar{K}$, og spørgsmålet er, hvordan de kortsigtede efterspørgselsfunktioner for L og E ser ud? Dette spørgsmål besvares i det følgende, hvor det vises, at man fra de langsigtede faktorefterspørgsler kan komme hurtigt og smertefrit til de kortsigtede, endda uden at skulle løse et optimeringsproblem.

Det følgende er organiseret på den måde, at der i afsnit 2 præsenteres produktions-, omkostnings- og kortsigtsomkostningsfunktioner, illustreret for den simple tofaktor *CES-funktion*. I dette afsnit beskrives desuden, hvordan kortsigtede faktorefterspørgsler udledes af langsigtede faktorefterspørgsler, samt hvorledes kortsigtede marginalomkostninger kan fås ud fra langsigtede gennemsnitsomkostninger. I afsnit 3 illustreres skyggeprisresultatet grafisk i trefaktortilfældet, og til sidst gives i afsnit 4 et eksempel på en estimation vha. GL-omkostningsfunktionen med to træge henholdsvis to fleksible produktionsfaktorer.

2. Produktions- og omkostningsfunktioner på kort og langt sigt

I stedet for at tage udgangspunkt i en produktionsfunktion, kan man alternativt benytte en såkaldt *omkostningsfunktion,* hvilket i det følgende skal illustreres ved hjælp af CES-funktionen – Constant Elasticity of Substitution – med konstant skalaafkast og to produktionsfaktorer, K og L:

$$Y = \kappa \left[\delta K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)\, L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \qquad = \mathrm{F}(K, L)\,, \tag{1}$$

hvor parametrene κ og σ er positive og $0 < \delta < 1$. Minimeres omkostningerne, $C \equiv P_K K + P_L L$, givet faktorpriserne, P_K og P_L, og produktionen, Y, fås de langsigtede faktorefterspørgselsfunktioner som

$$K^* = \quad \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \frac{Y}{\kappa} \left[\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\sigma} + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \mathrm{K}^*\,(Y, P_K, P_L)\,, \tag{2}$$

$$L^* = (1-\delta)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \frac{Y}{\kappa} \left[\left(\frac{P_K}{P_L}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma} + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \mathrm{L}^* (Y, P_K, P_L)\,. \tag{3}$$

Til enhver kombination af produktion og faktorpriser svarer der én omkostningsminimerende kombination af K og L, nemlig K^* og L^*. De til K^* og L^* svarende omkostninger kaldes *langsigtsomkostningerne*, C^*:

$$C^* \equiv P_K K^* + P_L L^* = \frac{Y}{\kappa} \left[\delta^{\sigma} P_K^{1-\sigma} + (1-\delta)^{\sigma} P_L^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \mathrm{C}^* (Y, P_K, P_L)\,. \tag{4}$$

Formel (4) fremkommer ved at indsætte (2) og (3) og reducere, og funktionsformen kaldes *CES-omkostningsfunktionen*. Det ses, at langsigtsomkostningerne, C^*, udelukkende er en funktion af produktion og faktorpriser; produktionsfaktorerne optræder ikke, idet de i omkostningsfunktionen antager deres optimale niveauer, som igen er en funktion af produktion og faktorpriser. De langsigtede *gennemsnitsomkostninger, AC^** – undertiden også kaldet »CES-prisindekset« – kan nu fås simpelt som

$$AC^* \equiv \frac{C^*}{Y} = \frac{1}{\kappa} \left[\delta^{\sigma} P_K^{1-\sigma} + (1-\delta)^{\sigma} P_L^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \mathrm{AC}^* (P_K, P_L)\,. \tag{5}$$

Man kan vise, at hvis produktionsfunktionen, $\mathrm{F}(\cdot)$, er kvasikonkav (dvs. at isokvanterne krummer den rigtige vej), er det ensbetydende med, at omkostningsfunktionen $\mathrm{C}^*(\cdot)$ er konkav. Desuden er $\mathrm{C}^*(\cdot)$ homogen af første grad i faktorpriserne – og i produktionen under antagelsen om konstant skalaafkast. Men nok så væsentligt er, at der gælder følgende overordentligt nyttige sammenhæng mellem omkostningsfunktionen og de langsigtede faktorniveauer, kendt under navnet *Shephards Lemma*:

$$K^* = \frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}P_K} \quad \text{og} \quad L^* = \frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}P_L}\,. \tag{6}$$

Differentieres omkostningsfunktionen mht. én af faktorpriserne, fås den langsigtede faktorefterspørgsel. Dette resultat forklarer, at omkostningsfunktioner er blevet konkurrenter til de almindelige produktionsfunktioner, fordi man for det meste primært er interesseret i faktorefterspørgselsfunktionerne (og ikke i produktionsfunktionen som sådan), og fordi det sædvanligvis er meget nemmere at differentiere en omkostningsfunktion, end det er at skulle minimere omkostningerne under bibetingelse af produktionsfunktionen.

Omkostningsfunktionen behøver imidlertid ikke at være udledt af en produktionsfunktion, som tilfældet var ovenfor. Man kan helt frit vælge funktionsformen $C^*(\cdot)$ og af denne udlede de langsigtede faktorefterspørgsler:

1. Vælg en omkostningsfunktion, $C^* = C^*(Y, P_1, P_2, \dots, P_n)$, som er konkav og homogen af første grad i de n faktorpriser og desuden i Y, hvis der skal være konstant skalaafkast.
2. Differentiér den mht. den j-te faktorpris for at få den j-te langsigtede faktorefterspørgselsligning.

Postulerer man alternativt en (kvasikonkav) produktionsfunktion, kan det være vanskeligt eller ligefrem umuligt at løse det minimeringsproblem, som giver de optimale faktorniveauer. Sammenhængen mellem omkostningsfunktioner og faktorefterspørgsler er således meget lettere at finde, end sammenhængen mellem produktionsfunktioner og faktorefterspørgsler, og det er ligeledes lettere at »gætte« på en omkostningsfunktion, som lige præcis giver faktorefterspørgselsfunktioner, som er enkle at fortolke eller enkle at estimere.

Der er dog den ulempe ved omkostningsfunktioner, at mens der til enhver produktionsfunktion (med løsbare faktorefterspørgselsfunktioner) svarer en analytisk opskrivelig omkostningsfunktion, er det langt fra givet, at man kan komme fra omkostningsfunktionen til et analytisk udtryk for produktionsfunktionen. Dette er et problem, når man ønsker at arbejde med træge produktionsfaktorer, for hvorledes findes nu størrelsen af de fleksible faktorer, givet at der »betinges« på den træge faktor?

Imidlertid har man slet ikke brug for den til omkostningsfunktionen svarende produktionsfunktion, for som det vises nedenfor, er det meget simpelt at lave de kortsigtede faktorefterspørgselsfunktioner ud fra de langsigtede faktorefterspørgselsfunktioner – her med én produktionsfaktor givet (træg) på kort sigt (se evt. Neary/Roberts (1980) for detaljer):

1. Løs langsigtsligningen for den træge faktor mht. faktorens egen-pris.
2. Indsæt denne »skyggepris« i langsigtsligningerne for de fleksible faktorer.

De resulterende ligninger for de fleksible produktionsfaktorer angiver de omkostningsminimerende faktorniveauer, *givet* størrelsen af den træge produktionsfaktor. I disse kortsigtede faktorefterspørgselsfunktioner for de fleksible faktorer vil prisen på den træge produktionsfaktor være blevet erstattet af den træge produktionsfaktor selv. Som et eksempel på dette kan man tage de langsigtede CES-faktorefterspørgsler fra før og isolere P_K fra K^*-ligningen (2):

$$\tilde{P}_K = P_L \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left[\frac{1}{\delta}\left(\kappa\frac{K}{Y}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - 1\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} = \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{K}}(Y, K, P_L). \tag{7}$$

Denne »skyggepris«, $\tilde{P}_K$, indsættes nu i ligningen for L^* (3), hvorved L's kortsigtede størrelse fås som

$$L = \left[\frac{1}{1-\delta}\left(\frac{Y}{\kappa}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \frac{\delta}{1-\delta}\, K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \mathrm{L}(Y, K). \tag{8}$$

Udtrykket ovenfor er identisk med CES-produktionsfunktionen (1) løst for L, og i dette konkrete tilfælde kan man naturligvis argumentere for, at det ville være lettere at isolere L direkte fra CES-funktionen. Dette gælder dog ikke generelt, for hvis man *havde* valgt CES-omkostningsfunktionen (4) uden begreb om en eventuel dual CES-produktionsfunktion, så havde skyggeprisvejen været den eneste vej til L's kortsigtede størrelse.

Givet L's kortsigtede størrelse, bliver den kortsigtede CES-omkostningsfunktion følgende:

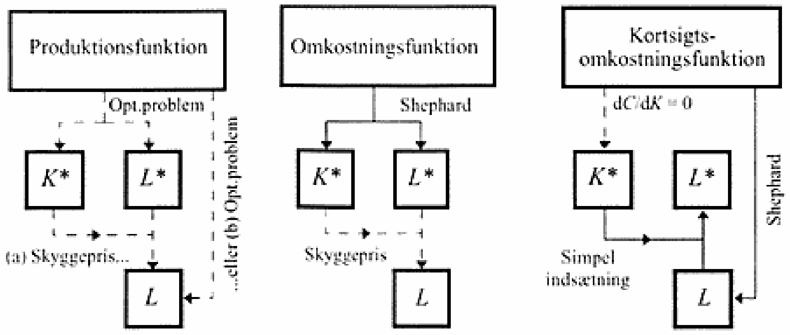
$$C \equiv P_K K + P_L L = P_K K + P_L\left[\frac{1}{1-\delta}\left(\frac{Y}{\kappa}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \frac{\delta}{1-\delta} K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \mathrm{C}(Y, K, P_K, P_L). \tag{9}$$

Det første led i dette udtryk er de *faste* omkostninger, mens det andet led er de *variable* omkostninger. Denne *kortsigtsomkostningsfunktion* er homogen af første grad i faktorpriserne, men den er ikke homogen af første grad i produktionen (som langsigtsomkostningsfunktionen er det). Ydermere vil der gælde, at $C > C^*$, undtagen for $K = K^*$.

Det K som, hvis det kunne vælges frit, minimerer (9), er præcis K^* givet i (2). K^* kan således beregnes vha. kortsigtsomkostningsfunktionen, og desuden vil Shephards Lemma stadig være gyldigt, således at L's kortsigtede størrelse (8) kan fås ved at differentiere C mht. P_L. Sammenfattende er

$$K^* \text{ givet som løsning til } \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}K} = 0, \quad \text{og} \quad L = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}P_L}. \tag{10}$$

Sættes $K = K^*$ i udtrykket for L ovenfor (8), fås ligningen for L^* (3), så kortsigtsomkostningsfunktionen $\mathrm{C}(\cdot)$ rummer lige så vel som (langsigts)omkostningsfunktio-



Figur 1. Sammenhæng mellem produktions-, omkostnings- og kortsigtsomkostnings-funktioner – og kort- og langsigtede faktorefterspørgsler.

nen $C^*(\cdot)$ eller produktionsfunktionen $F(\cdot)$ al den fornødne information til at fremstille både kortsigtede og langsigtede faktorefterspørgsler med, som det er forsøgt illustreret i figur 1.[2]

I figuren betyder stiplede linjer, at der ikke nødvendigvis gives en analytisk løsning på problemet, og som det ses, er der i produktionsfunktionstilfældet to alternative måder at komme til de kortsigtede faktorefterspørgsler på: enten vha. skyggepriser (a) eller ved at løse et nyt optimeringsproblem (b). Med mere end to produktionsfaktorer er den første metode sædvanligvis meget mere fremkommelig end den anden.

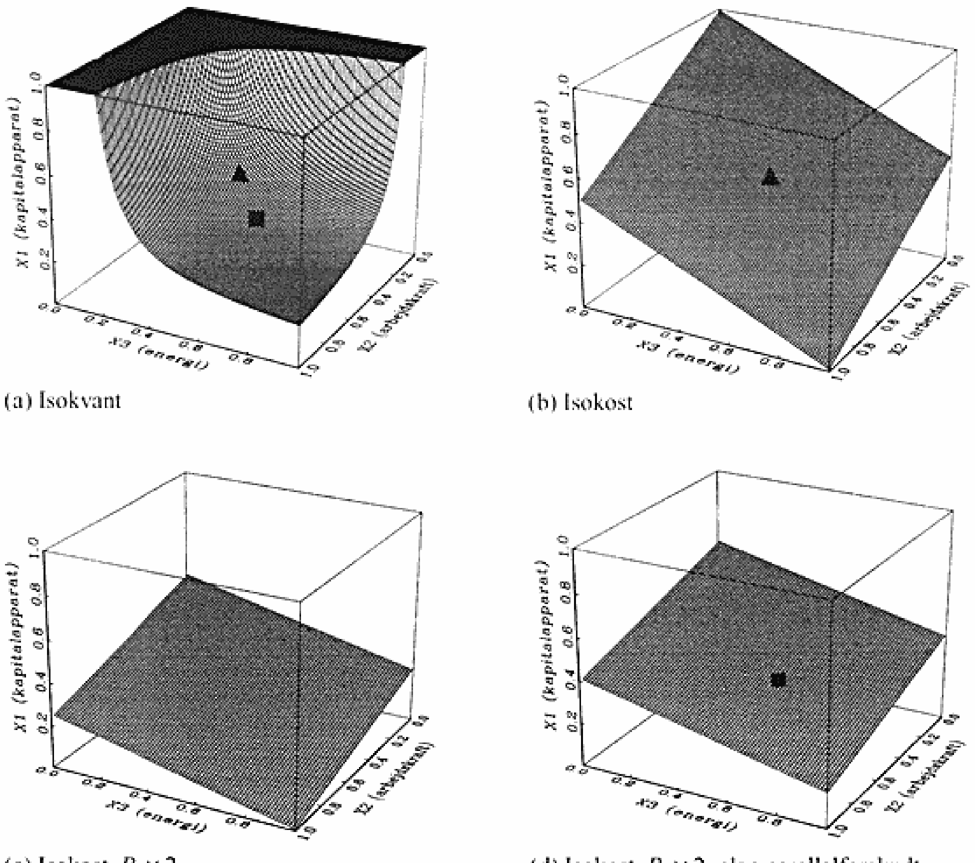
Hvad *marginalomkostninger* angår, vil det med konstant skalaafkast gælde, at hvis skyggeprisen, $\tilde{P}_K$ (7), indsættes i ligningen for de langsigtede gennemsnitsomkostninger, AC^* (5), fås ligningen for de kortsigtede marginalomkostninger, MC:[3]

$$MC \equiv \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Y} = \frac{1}{\kappa} P_L \,(1\text{-}\delta)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left[1\text{-}\delta\left(\kappa \frac{K}{Y}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} = \mathrm{MC}\,(Y, K, P_L)\,. \tag{11}$$

Dette udtryk kunne alternativt findes ved at bruge definitionen på MC (dvs. ved at differentiere kortsigtsomkostningerne (9) mht. Y). I ligevægt, $K = K^*$, er $MC = AC^*$, og således reducerer ligningen for MC ved indsættelse af K^* (2) til ligningen for AC^* (5).

2. Man skal i øvrigt være meget påpasselig med at tage udgangspunkt i en kortsigtsomkostningsfunktion, idet funktionsformen for den til kortsigtsomkostningsfunktionen svarende produktionsfunktion nemt bliver asymmetrisk eller får andre uhensigtsmæssige egenskaber. Dette er f.eks. tilfældet for de hyppigst anvendte udtryk for GL-og translog-kortsigtsomkostningsfunktionerne, jf. evt. Thomsen (1994).

3. Denne sammenhæng skylder jeg Dan Knudsen. Som nævnt er sammenhængen – i modsætning til sammenhængen mellem kort- og langsigtede faktorefterspørgsler – betinget af, at der opereres med konstant skalaafkast.



(a) Isokvant

(b) Isokost

(c) Isokost, $P_K \times 2$

(d) Isokost, $P_K \times 2$, plan parallelforskudt

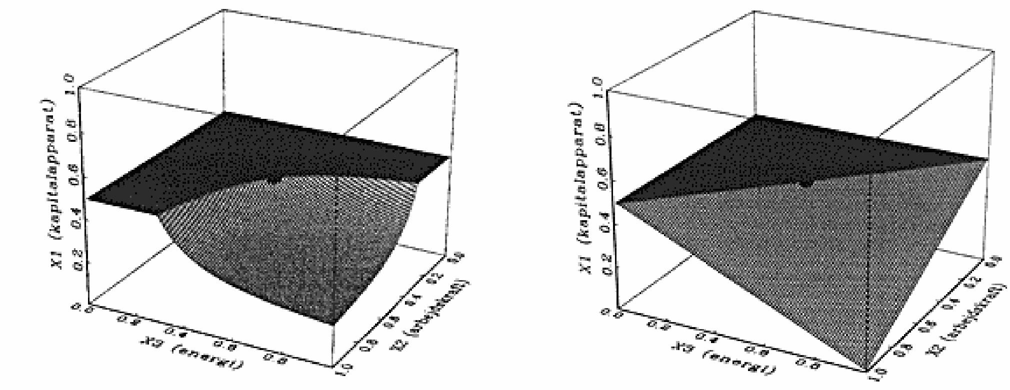
Figur 2. Illustration af virkningen af at fordoble P_K.

Det skal til sidst bemærkes, at opereres der med mere end én træg produktionsfaktor, er fremgangsmåden helt analog: De k langsigtsrelationer for de k træge produktionsfaktorer løses med hensyn til de k egen-priser, og disse udtryk indsættes i de resterende langsigtsligninger for de fleksible faktorer. Og indsættes disse k skyggeprisligninger i udtrykket for de langsigtede gennemsnitsomkostninger, fås de kortsigtede marginalomkostninger.

3. Forsøg på grafisk illustration af skyggeprisresultatet

Skyggeprisresultatet vil nu blive belyst i trefaktor-tilfældet ved hjælp af nogle figurer. Det antages, at der er de tre produktionsfaktorer; kapital, K, arbejdskraft, L, og energi, E. Med tre produktionsfaktorer, $Y = F(K, L, E)$, bliver en isokvant tredimensional, som det ses i figur 2 (a).

I det tredimensionale koordinatsystem er origo placeret i det nederste hjørne længst væk (ikke synligt), og trekanten markerer punktet $(K, L, E) = (1/2, 1/2, 1/2)$ på isokvan-



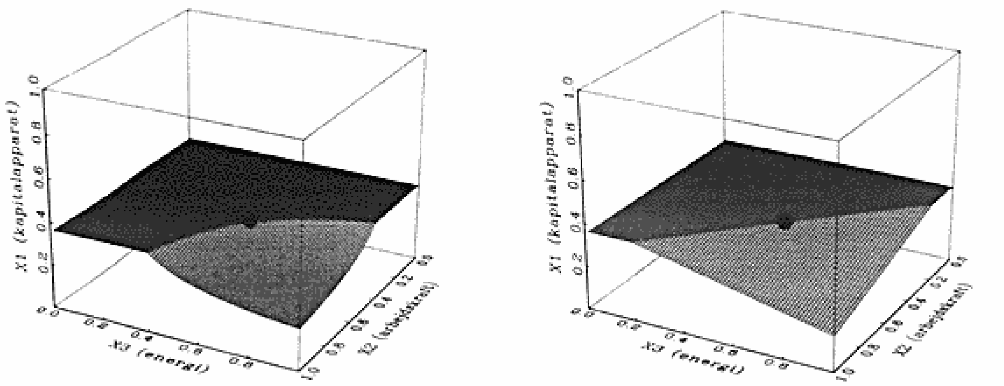
(a) Isokvant (b) Isokost

Figur 3. Initialsituation (trekanten i figur 2 (a)).

ten. I dette punkt tangerer det i (b) viste tredimensionale isokost-plan isokvanten i (a) på præcis samme måde, som at isokostlinjen skal tangere isokvanten i tofaktor-tilfældet, for at der er tale om omkostningsminimering. I (c) er prisen på kapitalapparatet fordoblet, svarende til at planet presses halvvejs ned ad kapital-aksen, så det skærer i $(K, L, E) = (^1/_2, 0, 0)$ i stedet for i $(1, 0, 0)$. Det gør planet »dobbelt så fladt«, og planet i (c) tangerer ikke længere isokvanten. I (d) parallelforskydes omkostningsplanet opad, indtil det igen tangerer isokvanten, og dette nye punkt er markeret med en firkant. Punktet repræsenterer den nye omkostningsminimerende kombination, og på isokvanten ses det, at fordoblingen af prisen på kapitalapparatet har foranlediget et fald i kapitalapparatet (på 0.13 enheder) og en stigning i både arbejdskrafts- og energiforbruget (på 0.09 enheder), uden at produktionen har ændret sig.

Disse figurer kan altså illustrere langsigtede substitutionseffekter, men de kan også illustrere, hvordan de andre produktionsfaktorer reagerer, hvis K antager et på forhånd givet niveau. Antag, at K's omkostningsminimerende (langtsigtede) størrelse er $K = K^* = {}^1/_2$, men at K tvinges 0.13 enheder ned uden at det skyldes ændringer i hverken produktion eller faktorpriser. Hvad er da den omkostningsminimerende størrelse af L og E? Svaret er, at det præcis er den størrelse af L og E, man får ved kunstigt at hæve prisen på kapitalapparatet så meget, at K falder med 0.13 enheder – hvilket altså kræver, at P_K fordobles.

At »betinge« på K svarer til at skære vandrette snit igennem den tredimensionale isokvant i figur 2 (a), hvorved der fremkommer en todimensional isokvant, som angiver, hvad der skal til af L og E for at producere Y givet K (dvs. isokvanten svarende til funktionen $Y = G(L, E)$, som omtaltes i indledningen). Denne isokvant ses som den krumme rand på det sorte vandrette snit i figur 3 (a), og den todimensionale isokostlinje ses tilsvarende som randen i figur 3 (b).



(a) Isokvant (b) Isokost

Figur 4. Kapitalapparatet sænkes med 0.13 enheder (firkanten i figur 2 (a)).

Den todimensionale isokostlinje tangerer naturligvis den todimensionale isokvant, for ellers ville punktet markeret med trekanten i figur 2 (a) ikke minimere omkostningerne. Det samme gælder for punktet markeret med firkanten, for selv om prisen på *K* er blevet fordoblet (planet er blevet fladere i *K*'s retning), påvirker det ikke hældningen på planet i *L*'s og *E*'s retninger. Den omkostningsminimerende indsats af *L* og *E* givet et vilkårligt niveau for *K* kan man således finde ved i sine langsigtede faktorefterspørgselsfunktioner kunstigt at tilpasse prisen på *K*, så man lige præcis får det *K*, som er givet på forhånd.

4. Sammenfatning: et empirisk eksempel

I det følgende vises en estimation af faktorefterspørgslen i den private sektor i Danmark for perioden 1957-89, hvor der er benyttet den såkaldte Generaliserede Leontief omkostningsfunktion, *GL-omkostningsfunktionen* (eller: GLO-funktionen), som sammen med den såkaldte translog-omkostningsfunktion har været de to mest anvendte omkostningsfunktioner siden begyndelsen af 1970erne. Data stammer grundlæggende fra ADAMs databank, og i estimationen opereres med *to* træge produktionsfaktorer, *K* (kapital) og *L* (arbejdskraft), kombineret med to fleksible faktorer, *E* (energi) og *M* (materialer).[4] At *L* nu antages træg, kan måske undre, men der er store omkostninger forbundet med at ansætte og afskedige personale, og tester man hypotesen, tyder tallene entydigt på, at arbejdskraften virkelig *er* træg.

4. Kapitalapparatet er her udelukkende maskinkapital, og det skal understreges, at kapitaltallene er »hjemmelavede« (ud fra brutto-maskininvesteringerne) vha. en antagelse om en fysisk afskrivningsrate på ca. 15%, svarende til en gennemsnitlig levetid på seks år. Kapitalapparatet er i mio. 1980-kr., dvs. *uden* forsøg på at opgøre det i »maskintimer« eller lignende. Arbejdskraften er antal præsterede arbejdstimer inklusive (registreret) overarbejde.

GL-omkostningsfunktionen er med fire produktionsfaktorer givet som (se evt. Diewert (1971)):

$$C^* = Y \sum_i \sum_j \beta_{ij} P_i^{0.5} P_j^{0.5}, \qquad \beta_{ij} = \beta_{ji}, \qquad i,j = K, L, E, M. \tag{12}$$

Det ses, at der antages konstant skalaafkast, idet omkostningsfunktionen er homogen af første grad i produktionen, og desuden er omkostningsfunktionen behageligt nok »født« homogen af første grad i faktorpriserne (uanset værdien af β'erne). Ved at diffentiere mht. faktorpriserne (Shephards Lemma, jf. afsnit 2) fås de langsigtede faktorefterspørgsler til

$$K^* = Y \left[\beta_{KK} + \left(\beta_{KL} P_L^{0.5} + \beta_{KE} P_E^{0.5} + \beta_{KM} P_M^{0.5} \right) P_K^{-0.5} \right], \tag{13}$$

$$L^* = Y \left[\beta_{LL} + \left(\beta_{KL} P_K^{0.5} + \beta_{LE} P_E^{0.5} + \beta_{LM} P_M^{0.5} \right) P_L^{-0.5} \right], \tag{14}$$

$$E^* = Y \left[\beta_{EE} + \left(\beta_{KE} P_K^{0.5} + \beta_{LE} P_L^{0.5} + \beta_{EM} P_M^{0.5} \right) P_E^{-0.5} \right], \tag{15}$$

$$M^* = Y \left[\beta_{MM} + \left(\beta_{KM} P_K^{0.5} + \beta_{LM} P_L^{0.5} + \beta_{EM} P_E^{0.5} \right) P_M^{-0.5} \right]. \tag{16}$$

De to skyggepriser, $\tilde{P}_K$ og $\tilde{P}_L$, findes ved at løse de to første ligninger (13)-(14) mht. P_K og P_L, og de kortsigtede efterspørgselsfunktioner for E og M følger derefter ved at indsætte de fundne skyggepriser i ligningerne for E^* og M^* (15)-(16).[5]

Det skal nævnes, at der i estimationerne opereres med *tekniske fremskridt*, som er specificeret som såkaldte faktorudvidende effektivitetstrends. Som det vises i bl.a. Thomsen (1994), lever disse trends på en måde helt deres eget liv. Trendene fungerer på den måde, at hvis arbejdskraften f.eks. bliver 2% mere effektiv årligt, betyder det, at der kan produceres det samme med 2% mindre arbejdskraft årligt, og sådanne effektivitetstrends er simple at bygge ind på konsistent vis i ethvert sæt af faktorligninger à la (13)-(16).

5. Det bemærkes i øvrigt, at GL-faktorligningerne er lineære i kvadratroden af faktorpriserne, således at man altid vil kunne finde analytiske udtryk for skyggepriserne – og dermed de kortsigtede faktorefterspørgsler – uanset antallet af træge hhv. fleksible produktionsfaktorer.

Tabel 1. Estimationsresultat, GL-omkostningsfunktion, K og L træge, E og M fleksible.

	Langsigtede priselasticiteter				Effektivitetsvækst		Tilpasning				
	P_K	P_L	P_E	P_M	$R(Z)_{1960}$	$R(Z)_{1989}$	λ_1	λ_2	s	DW	JB
K	−0.30	0.22	−0.07	0.14	−3.9%	−1.2%	0.37	0.59	1.1%	1.14	8.7
L	0.05	−0.21	0.02	0.14	5.6%	1.0%	0.76	0.50	1.5%	1.58	0.7
E	−0.27	0.28	−0.14	0.14	−1.4%	2.4%	.	.	4.0%	1.06	1.6
M	0.02	0.09	0.01	−0.11	0.6%	−0.6%	.	.	1.0%	1.00	0.0

Anm.: n = 1957-89 Log likelihood = 371.54 JB er Jarque/Beras normalitetstest.

Kortsigtsdynamikken i K og L antages at være af fejlkorrektionstypen, dvs. for K's vedkommende:

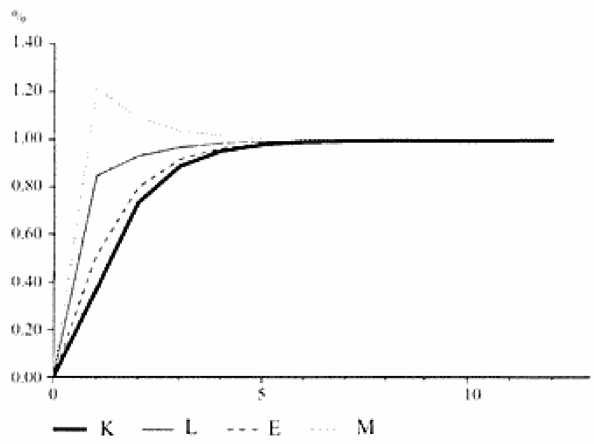
$$\Delta\log(K_t) = \lambda_1\ \Delta\log(K_t^*) + \lambda_2 \left[\log(K_{t-1}^*) - \log(K_{t-1})\right]. \tag{17}$$

Parameteren λ_1 er førsteårseffekten på K af en 1% ændring af K^*, mens λ_2 fortæller, med hvilken hastighed resten af tilpasningen forløber. Estimationsresultatet vises i tabel 1.

De 4×4 tal til venstre i tabellen er de partielle langsigtede priselasticiteter (evalueret i 1989), og tallet −0.30 øverst til venstre i matricen betyder, at K på langt sigt reduceres med 0.30%, hvis P_K hæves med 1%. Tilsvarende ses neden under dette tal, at en sådan stigning i P_K får L til at stige med 0.05%, mens energiforbruget *falder* (med 0.27%), idet K og E i estimationen er såkaldt komplementære (krydspriselasticiteterne e_{KE} og e_{EK} er negative). Når P_M's langsigtede effekt på både K, L og E er den samme, skyldes det en pålagt restriktion om, at den bagvedliggende produktionsfunktion er svagt separabel i M, således at ændringer i P_M ikke påvirker *forholdet* mellem K, L og E. Det bemærkes også, at elasticiteterne summer til nul rækkevis og er symmetriske i fortegn.

De to søjler af tal markeret med $R(Z)_{1960}$ henholdsvis $R(Z)_{1989}$ angiver vækstraten i den pågældende faktors effektivitet i 1960 henholdsvis 1989, idet effektivitetsindeksene kaldes Z_K-Z_M, og $R(\cdot)$ betyder relativ ændring. I tabellen kan man således se, at arbejdskraftens effektivitet årligt steg med 5.6% i 1960, faldende til 1.0% i 1989.

Af tabellen fremgår det yderligere, at kapitalapparatet, K, umiddelbart reagerer med 37% på en ændring i K^*, mens resten af tilpasningen forløber med 59% pr. år. Af rent tekniske grunde tilpasser L sig ikke imod L^*, men mod det L, som ville være optimalt, hvis kun K var træg (og L, E *og* M var fleksible), og denne tilpasning ses at forløbe noget hurtigere end kapitaltilpasningen. (Formuleringen af tilpasningen i L betyder, at hvis λ_1 og λ_2 i L-ligningen sættes til én, svarer det til, at L gøres fleksibel).



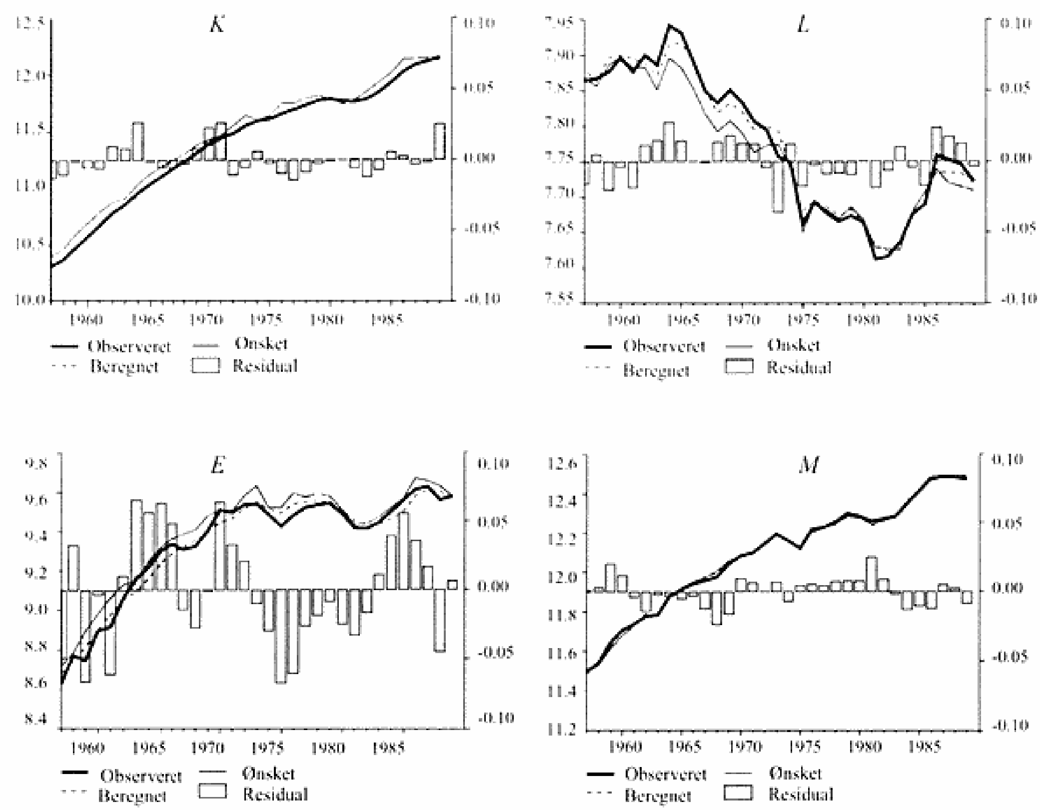
Figur 5. Effekt af en forøgelse af produktionen med én procent.

Hæves produktionen fra en ligevægtssituation med én procent, fås den i figur 5 viste tilpasning for de fire produktionsfaktorer.

På langt sigt er effekten på alle faktorerne 1% som følge af antagelsen om konstant skalaafkast. I det første år reagerer K med 0.37% og L med 0.85%, og denne træghed i K og L foranlediger, at materialeforbruget, M, stiger med 1.21% i det første år. Energien, E, stiger kun med 0.51% i det første år, hvilket skyldes, at K og E er komplementære, således at E er meget tæt på at følge bevægelsen i K. De to skyggepriser på K og L stiger med hhv. 3.37% og 1.59% i det første år, mens marginalomkostningerne stiger med 0.83%. De 0.83% kan fås simpelt ved at vægte skyggeprisændringerne sammen med de respektive (langsigtede) omkostningsandele: 0.83% = 0.085·3.37% + 0.344·1.59%, idet omkostningsandelene for K og L er 0.085 hhv. 0.344.[6]

De langsigtede priselasticiteter ser umiddelbart tilforladelige ud. De er ikke voldsomt store, men egenpriselasticiteter i K på −0.30, i L på −0.21 og i E på −0.14 er i hvert fald ikke så beskedne, at det ikke er til at få øje på. Udviklingen i effektivitetsindeksene er fortolkelig, hvad L angår, idet effektivitetsudviklingen i L har været positiv, men aftagende, fra 5.6% i 1960 til 1.0% i 1989. Effektivitetsudviklingen i kapitalapparatet er straks vanskeligere at fortolke, idet den har været *negativ* igennem hele estimationsperioden, hvilket skyldes, at K/Y-forholdet simpelthen er vokset kraftigere, end faktorpriserne er i stand til at forklare – og dette kan muligvis bero på konstruktionen af data for kapitalapparatet. For E og M bemærkes en tendens til, at energien er blevet

6. Omkostningsandelene er defineret som $s_i^* = P_i X_i^* / C^*$, hvor X_i^* er det langsigtede niveau for den pågældende faktor, og regnestykket følger af, at Shephards Lemma, $dC^*/dP_i = X_i^*$, kan omskrives til, at $d\log(C^*)/d\log(P_i) = s_i^*$. Det skal her bemærkes, at man kan finde nogle relativt simple approksimative sammenhænge mellem kort- og langsigtede faktorefterspørgsler (og marginalomkostninger), alene ud fra matricen af langsigtede priselasticiteter, jf. evt. Thomsen (1994). Dette kan især være nyttigt, hvis de kortsigtede faktorefterspørgsler ikke kan udledes analytisk, jf. evt. figur 1.



Figur 6. Observeret, beregnet, ønsket/langsigtet og residual for de fire produktionsfaktorer, logaritmer.

mere effektiv (energispareforanstaltninger?), mens effektivitetsudviklingen i materialerne er af ret beskeden karakter.

Der er problemer med systematik i residualerne, som det også ses i figur 6, hvor der for de fire produktionsfaktorer vises observerede og beregnede værdier samt residualer – foruden de langsigtede (ønskede) niveauer.

Man må dog holde fast i, at systematikken må siges at være rimelig, når man tager i betragtning, at der kun er anvendt fire kortsigtsparametre (λ'er).

Om estimationen kan sammenfattende siges, at både K og L er træge på kort sigt, og da energien, E, følger kapitalapparatet ret nøje (som følge af komplementariteten), er det materialerne, M, som på kort sigt må kompensere for træghederne ved at stige med 1.21%, når produktionen øges med 1%. Om en sådan effekt er plausibel, eller om det snarere er tredje-generationsmodellen, som »tvinger« materialerne til at overreagere, er så spørgsmålet; men til fordel for effekten taler, at materialerne *også* har en tendens til at »skyde over«, når kortsigtsdynamikken specificeres ad hoc uden krav om, at man »er på produktionsfunktionen« på kort sigt. Dette tyder på, at det ikke er muligt at forklare trægheden i både K og L udelukkende ved at sige, at de ganske vist er træge i *målte* enheder, men at de i *effektive* eller *udnyttelseskorrigerede* enheder (hvor f.eks. skiftehold og temporær løben hurtigere medregnes, jf. fodnote 1 i indledningen) er meget mere – eller helt – fleksible.

Litteratur

Diewert, W.E. 1971. An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function. *Journal of Political Economy* (79), side 481-507.

Neary, J.P. & K.W.S. Roberts. 1980. The Theory of Household Behaviour under Rationing. *European Economic Review* (13), side 25-42.

Thomsen, Thomas. 1994. *Efterspørgslen efter produktionsfaktorer i Danmark.* Hovedopgave, Københavns Universitet, Økonomisk Institut, juni.

klare trægheden i både K og L udelukkende ved at sige, at de ganske vist er træge i *målte* enheder, men at de i *effektive* eller *udnyttelseskorrigerede* enheder (hvor f.eks. skiftehold og temporær løben hurtigere medregnes, jf. fodnote 1 i indledningen) er meget mere – eller helt – fleksible.

Litteratur

Diewert, W.E. 1971. An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function. *Journal of Political Economy* (79), side 481-507.

Neary, J.P. & K.W.S. Roberts. 1980. The Theory of Household Behaviour under Rationing. *European Economic Review* (13), side 25-42.

Thomsen, Thomas. 1994. *Efterspørgslen efter produktionsfaktorer i Danmark.* Hovedopgave, Københavns Universitet, Økonomisk Institut, juni.