

Anvendelse af en porteføljemodel

Janne Dyrlev

Danmarks Nationalbank

SUMMARY: This article intends to systematize the necessary information for an agent to diversify her portfolio through international capital markets. Focus is on a Danish investor. An optimal portfolio is found, presuming prices can be described by Brownian motions, to which the Random Walk processes are the discreet version. Empirical solutions are found for stockmarkets and moneymarkets in six countries. It seems prices can be described by Random Walk models, but ARIMA-models improve the description. Those models are used to forecast prices, and the results are promising.

1. Indledning

Denne artikel søger at systematisere den information, som en agent må inddrage i sine overvejelser om at sprede sin portefølje på internationale markeder. I forhold til udelukkende at placere sin portefølje på det indenlandske marked giver adgang til internationale markeder større muligheder for agenten. For at drage fordel af dette potentiale må imidlertid kræves, at agenten dels har kendskab til prisudviklingen på de enkelte markeder og samvariationen mellem markederne, dels er i stand til at udnytte dette kendskab på konsistent vis.

Ved at anvende en porteføljemodel søges agentens nytte maksimeret ved at afveje det forventede reale afkast i danske kroner mod den forventede risiko. Løsningen på dette optimeringsproblem bliver en portefølje spredt på markeder, der tager hensyn til afkast og risiko; men hvor agentens endelige porteføljevalg beror på agentens risikoaversion.

Porteføljemodellen er kun anvendelig, hvis agenten har kendskab til aktivernes prisudvikling. I artiklen efterprøves de fordelinger, der ligger bag den betragtede porteføljemodel, på aktie- og pengemarkeder i seks lande. Fordelingsantagelserne er rimeligt opfyldt.

Agenten må søge at forudsige prisudviklingen på markederne for på baggrund af disse estimater at danne sin portefølje. Til disse forudsigelser benyttes den systematiske statistiske sammenhæng i egenprisudviklingen, som er estimeret. Eftersom der er langt flere forhold end egenprisudviklingen, der influerer på et aktivs prisdannelse, kan udnyttel-

Artiklen er baseret på min afsluttende opgave »Aspekter af internationalt porteføljevalg« og har derfor ingen forbindelse med mit nuværende arbejde i Danmarks Nationalbank. Jeg ønsker at takke professor Niels Thygesen, lektor Niels Erik Jensen, prokurist Ib Hansen samt fuldmægtig Jan Giehm Mikkelsen for værdifulde kommentarer. Artiklen er tildelt Zeuthen-prisen.

Anvendelse af en porteføljemodel

Janne Dyrlev

Danmarks Nationalbank

SUMMARY: This article intends to systematize the necessary information for an agent to diversify her portfolio through international capital markets. Focus is on a Danish investor. An optimal portfolio is found, presuming prices can be described by Brownian motions, to which the Random Walk processes are the discreet version. Empirical solutions are found for stockmarkets and moneymarkets in six countries. It seems prices can be described by Random Walk models, but ARIMA-models improve the description. Those models are used to forecast prices, and the results are promising.

1. Indledning

Denne artikel søger at systematisere den information, som en agent må inddrage i sine overvejelser om at sprede sin portefølje på internationale markeder. I forhold til udelukkende at placere sin portefølje på det indenlandske marked giver adgang til internationale markeder større muligheder for agenten. For at drage fordel af dette potentiale må imidlertid kræves, at agenten dels har kendskab til prisudviklingen på de enkelte markeder og samvariationen mellem markederne, dels er i stand til at udnytte dette kendskab på konsistent vis.

Ved at anvende en porteføljemodel søges agentens nytte maksimeret ved at afveje det forventede reale afkast i danske kroner mod den forventede risiko. Løsningen på dette optimeringsproblem bliver en portefølje spredt på markeder, der tager hensyn til afkast og risiko; men hvor agentens endelige porteføljevalg beror på agentens risikoaversion.

Porteføljemodellen er kun anvendelig, hvis agenten har kendskab til aktivernes prisudvikling. I artiklen efterprøves de fordelinger, der ligger bag den betragtede porteføljemodel, på aktie- og pengemarkeder i seks lande. Fordelingsantagelserne er rimeligt opfyldt.

Agenten må søge at forudsige prisudviklingen på markederne for på baggrund af disse estimater at danne sin portefølje. Til disse forudsigelser benyttes den systematiske statistiske sammenhæng i egenprisudviklingen, som er estimeret. Eftersom der er langt flere forhold end egenprisudviklingen, der influerer på et aktivs prisdannelse, kan udnyttel-

Artiklen er baseret på min afsluttende opgave »Aspekter af internationalt porteføljevalg« og har derfor ingen forbindelse med mit nuværende arbejde i Danmarks Nationalbank. Jeg ønsker at takke professor Niels Thygesen, lektor Niels Erik Jensen, prokurist Ib Hansen samt fuldmægtig Jan Giehm Mikkelsen for værdifulde kommentarer. Artiklen er tildelt Zeuthen-prisen.

se af den statistiske sammenhæng ikke være dækkende; men ved at udnytte den danske prisudviklings sammenhæng med den udenlandske forbedres modellernes forudsigelsessevne nævneværdigt.

Dersom agenten beskattes af sit afkast, må denne beskatning inddrages i porteføljeovervejelserne. Dette forhold betragtes sidst i artiklen.

2. En porteføljemodel med Brownske prisbevægelser

Vi vil først finde den optimale porteføljesammensætning for en agent, der maksimerer sin reale fremtidige forbrugsmulighed og anser prisdannelsen for eksogent givet. Modellen er fra Branson & Henderson 1985.

2.1 2-lande model

I første omgang betragtes en 2-lande model, hvorved formuen W opdeles på udenlandske aktiver EF (E angiver valutakursen målt som antal indenlandske enheder for hver udenlandsk valutaenhed, mens F angiver det udenlandske aktiv benævnt i den udenlandske valuta) med andelen λ og på indenlandske B med andelen $(1-\lambda)$.

$$W = B + EF = (1-\lambda)W + \lambda W \quad 2.1$$

Uden valutasikring af de udenlandske beløb er de udenlandske afkast målt i indenlandsk valuta sammensat af et rente- samt et valutakursafkast. Agenten kan frit både låne og placere og kan herved geare sin portefølje i det omfang, hun ønsker. Der ses bort fra andre placeringsmuligheder. Endvidere antages, at der kan placeres og lånes i de respektive aktiver i vilkårlige enheder, ligesom det udenlandske og indenlandske aktiv udover afkastfordelingen er perfekte substitutter.

Den procentvise ændring i aktivpriser, det indenlandske prisindeks Q og valutakursen følger en *geometrisk Brownsk proces med drift*, hvilket giver prisfordelingerne matematiske bekvemme egenskaber. For en diskussion af disse antagelser henvises til Adler & Dumas 1983.

De direkte renteafkast i og i^* på hhv. B og F er ikke-stokastiske.¹

Både afkast og valutakurs forudsættes bestemt uden for modellen, og modellen omtaler intet om agentens forventninger til de fremtidige variable. Det må derfor kræves, at agenten har fuldt kendskab til de underliggende fordelinger. Processen for indenlandske priser og valutakurs antages at kunne beskrives som følger.

1. Der tages ikke eksplicit hensyn til kursgevinster ved placering på rentekurven, idet sådanne gevinster ikke ændrer modellens resultater. Alternativt kan man sige, at vi betragter en horisont, inden for hvilken vi har fuldt overblik over valutakurs- og børskursgevinster/tab.

$$dE/E = \varepsilon dt + \sigma_e dZ_e \quad 1.2a$$

$$dB/B = i dt \quad 2.2b$$

$$dQ/Q = \pi_q dt + \sigma_q dZ_q \quad 2.2c$$

$$dF/F = i^* dt \quad 2.2d$$

hvor ε og π_q er driften i henholdsvis valutakurs og det indenlandske prisniveau, mens σ_e^2 og σ_q^2 er variansen for den stokastiske proces og Z_e og Z_q er den til processen hørende hvid støj (Wienerproces).

Når aktivernes fordeling herved er en stationær logaritmisk normalfordeling, og hvis investor har en homotetisk nyttefunktion med konstant relativ risikoaversion, kan det vises (Merton 1971), at der kan dannes en tidsinvariant porteføljeregulering, der er ækvivalent med periodevist at maksimere en lineær funktion af det gennemsnitlige reale afkast og variansen.

Agentens nyttemaksimering kan derfor beskrives ved en maksimering af en kriteriefunktion, som er en lineær funktion af afkast og varians. Med risikoaversionen R betragter Branson & Henderson følgende kriteriefunktionen V :

$$V = E[dw/w] - 0,5 R \text{ Var}[dw/w] \quad 2.3$$

hvor den reale formue w er givet ved

$$w = W/Q = (B + EF)/Q \quad 2.4$$

Taylor's rækkeudvikling benyttes til at udregne differentialet for w , hvorved porteføljens forventede afkast kan findes til

$$E[dw/w] = (1-\lambda) i + \lambda (i^* + \varepsilon) - \pi_q \lambda \sigma_{qe} + \sigma_q^2 \quad 2.5$$

Det forventede afkast er givet ved det nominelle afkast $(1-\lambda) i + \lambda(i^* + \varepsilon)$, der deflateres med driften for prisudviklingen π_q og iøvrigt korrigeres for samvariationen mellem valutakurs og prisindeks. σ_{qe} angiver covariansen mellem prisudvikling og inflation. På tilsvarende vis findes udtrykket for variansen:

$$\begin{aligned} \text{Var}[dw/w] &= E[(dw/w)^2] - (E[dw/w])^2 \\ &= \lambda^2 \sigma_e^2 - 2\lambda \sigma_{qe} + \sigma_q^2 \end{aligned} \quad 2.6$$

2.5 og 2.6 indsættes i nyttefunktionen 2.3, der maksimeres ved differentiering m.h.t. λ for at finde førsteordensbetingelsen for den optimale porteføljesammensætning. Den optimale nominelle andel for udenlandske aktiver λ^* :

$$\lambda^* = (1/(R\sigma_e^2)) [i^* + \varepsilon - i + (R-1)\sigma_{qe}] \quad 2.7$$

λ^* mindskes ved øget valutakursvariabilitet og risikoaversion, men øges ved en større risikopræmie $i^* + \varepsilon - i$ samt ved større korrelation mellem valutakurs og prisindeks. Øget samvariation mellem valutakurs og prisindeks bevirker, at det udenlandske aktiv er et bedre hedge mod inflation.

Den efficiente rand, der angiver det højst opnåelige forventede afkast for given risiko, fremkommer ved at variere R .

Denne fundne porteføljesammensætning kan dekomponeres på flere måder. I det følgende betragtes en opsplitning på en minimum-varians porteføljeandel samt en logaritmisk porteføljeandel.

Den udenlandske minimumvariansporteføljemodel bestemmes ved at minimere 2.6 m.h.t. λ . Denne porteføljeandel findes til:

$$\lambda^M = \sigma_{qe} / \sigma_e^2$$

Denne porteføljeandel minimerer variansen af ændringen i realformuen og er uafhængig af rentespændet. Afdækning ved international diversifikation sker kun af hensyn til det indenlandske prisniveaus følsomhed overfor ændringer i valutakursen, svarende til betakoefficienten β_{qe} , hvorfor λ^M er det bedste hedge mod inflationsusikkerhed. Eftersom prisindekset indgår, er porteføljen, hvor λ^M er placeret udenlands, afhængig af, i hvilket land investor er bosat.²

Derimod vil den optimale porteføljeandel fra en investor med logaritmisk nyttefunktion være uafhængig af investors domicilland. Eftersom realformuen er defineret ved forholdet mellem den nominelle formue og prisniveauet, vil en investor med logaritmisk nyttefunktion kunne maksimere sin nominelle formue uafhængigt af prisniveauet. Porteføljeandelen vil derfor ikke afhænge af de indenlandske forbrugerpriser.

Med logaritmisk nyttefunktion er den relative risikoaversion R lig med 1. Indsættes dette i udtrykket for λ^* fås:

$$\lambda^L = (1/\sigma_e^2) (i^* + \varepsilon - i)$$

Porteføljen, som har λ^L placeret i udenlandske fordringer, kaldes den logaritmiske eller »international investor's rule«-portefølje. Porteføljen er uafhængig af investors nationalitet, da den kun afhænger af den nominelle risikopræmie og valutakursvolatiliteten, og dersom hvert land har sin Markowitz' efficiente rand, vil disse tangere i dette fælles punkt.

2. Ved opfyldelse af købekraftsparitetsteoremet er minimum-varians porteføljeandelen dog uafhængig af investors nationalitet. Med opfyldelse af købekraftsparitetsteoremet er det dog heller ikke relevant at afdække inflationsusikkerhed via udenlandsk placering/låntagning.

Ifølge to-funds separationsteoremet er enhver efficient portefølje en sammenvægtning af to efficiente porteføljer. Derfor kan også den optimale porteføljeandel beskrives ved den logaritmiske og minimumvarians porteføljen:

$$\lambda^* = [(R-1)/R]\lambda^M + (1/R)\lambda^L \quad 2.8$$

For R gående mod uendelig approksimerer det optimale porteføljevalg minimumvariansstrategien, mens den logaritmiske regel dominerer for R gående mod 1. Hensynet til at afdække det fremtidige reale forbrug øges ved stigende risikoaversion.

2.2 Fler-lande model

Med flere lande og aktiver vil de enkelte aktiver ikke nødvendigvis være bruttosubstitutter, ligesom der nu indgår en varians-covarians matrice i stedet for variansen på valutakursen i den optimale porteføljeandel. Adler & Dumas 1983 opstiller en tilsvarende fler-lande porteføljemodel, der forudsætter en risikofri rente r , men iøvrigt tillader stokastiske direkte afkast, som f.eks. aktieafkast.³ Vægtningen mellem minimumvarians og den logaritmiske porteføljeandel er uændret i forhold til Branson & Hendersons model, hvor λ^M og λ^L dog er matricer.

Minimumvariansporteføljen er givet ved:

$$\lambda^M = \begin{pmatrix} \Omega^{-1}\omega \\ 1 - \mathbf{1}'\Omega^{-1}\omega \end{pmatrix} \quad 2.10$$

Ω er en $N \times N$ covarians-variens matrice med covarianser mellem aktivernes nominelle afkast, mens ω er en $N \times 1$ vektor med covarianser mellem de N aktiver og investors inflationsrate. Denne investorspecifikke porteføljeandel er således fortsat bestemt ved korrelationen mellem aktiverne samt aktivernes inflationssikrende evne. Den sidste række i matricen angiver andelen i indenlandsk risikofri placering.

Den logaritmiske portefølje er givet ved:

$$\lambda^L = \begin{pmatrix} \Omega^{-1}(\mu - r\mathbf{1}) \\ 1 - \mathbf{1}'\Omega^{-1}(\mu - r\mathbf{1}) \end{pmatrix} \quad 2.9$$

μ er en vektor med de nominelt forventede afkast, mens r angiver det risikofri afkast, og $\mathbf{1}$ er en $N \times 1$ søjlevektor med 1-taller og $\mathbf{1}'$ dens transponerede. Den logaritmiske porte-

3. En udvidelse af Branson & Hendersons 2-lande model, hvor der tillades stokastiske direkte afkast kan ses hos Dyrlev (1992).

følge er fortsat bestemt ved risikopræmier samt covarianser. Prisindeks indgår ikke, hvorved denne porteføljeandel er uafhængig af investors hjemland.

3. Empiriske undersøgelser vedrørende porteføljemodeller

For at få en ide om det praktisk implementerbare af modellerne søges de benyttet på observerede data. For i første omgang at komme så tæt på modellernes verden som muligt, antages ukritisk opfyldelse af modellernes forudsætninger. Dette gælder i særdeleshed de antagede prisfordelinger, hvor det kræves, at tidsrækken af første differenser for de logaritmiske data er stationære. Ved et plot af prisernes logaritmiske førstedifferenser virker dette plausibelt.

Der benyttes daglige data, hvilket forudsætter, at investor foretager daglige porteføljevalg. Dagene opfattes herved som mindste tidsenhed for fortsat at kunne opfatte porteføljevalget som kontinuert. Data er fra Danmark, Vesttyskland, Storbritannien, Sverige, Japan og USA.

Som proxy for stationære afkast i forskellige lande benyttes tremåneders-renter (eurorenten for pågældende valutaindsud). Tre-månedersrenten er valgt frem for dag-til-dag renten, idet dag-til-dag renten i langt højere grad influeres af kreditpolitikken og den daglige nettovalutastilling over for udlandet. Man må derfor a priori vente, at udviklingen i dag-til-dag renten i mindre grad er stokastisk end tre-måneders renten. For alle lande er standardafvigelsen således cirka fem gange højere for dag-til-dag markedet. Vi vil antage, at 3 mdr. renten er relevant for investor, og i det følgende vil vi betegne den danske 3 mdr. rente som den »risikofri« rente. Der er data for 3-mdr. renten siden september 1988 for Storbritannien og april 1983 for Sverige mod juni 1981 for øvrige lande. Ved at betragte de lange tidsserier tages intet hensyn til, at kapitalmarkedsintegrationen er øget i den betragtede periode, idet den fuldstændige kapitalliberalisering blev gennemført i 1988 med lempelser i årene forinden.

Som udtryk for stokastiske direkte afkast benyttes data om aktieindekset i de enkelte lande siden januar 1986. De benyttede indeks er Totalindekset på Københavns Fondsbørs for Danmark, Frankfurt for Tyskland, London FT-100 for England, Nikkei for Japan, Stockholm for Sverige og Dow Jones for USA. Selvsagt vil det være muligt i de forskellige lande at finde enkeltaktier, der indbyrdes har langt lavere (eller højere) korrelation end den mellem indeksene gældende. Derfor vil indeks ikke kunne illustrere de potentielle diversifikationsmuligheder, der er på de enkelte markeder. Imidlertid har nationale faktorer større effekt for prisdannelsen på enkeltaktier end branchemæssige, hvorfor det kan have mening først at vælge porteføljeandele i forskellige lande før udvælgelsen af enkeltaktier. Endvidere har investor jo mulighed for at investere i de enkelte indeks, hvorved aktieindeksene kan være en dækkende beskrivelse af investors investeringsvalg.

Dog er der sammenlignelighedsproblemer mellem indeksene, der kan have forskellig udvikling udelukkende qua forskellig branchesammensætning. Ligeledes kan udbyttekorrektionen være forskellig for de enkelte indeks. Dersom denne forskel er konstant, er dette mindre væsentligt ved udregning af korrelationsgrader m.v., eftersom der tages differenser til indeksudviklingen; men til gengæld skal man være varsom med direkte at sammenligne afkast beregnet ud fra indeksudviklingen. Endelig kan volatilitetsforskelle tillægges likviditetsforskelle. Specielt indeholder det danske indeks flere illikvide aktier, hvorved indekset med denne »døde tonnage« bliver mindre volatilt.

Prisindekset offentliggøres kun månedligt. En måneds prisstigning kunne fordeles på dage for at opnå samme tidsenhed som for de øvrige observationer; men en sådan allokering vil altid være arbitrær. Ved udregning af prisudviklingens korrelation med øvrige data beregnes derfor månedlige afkast for øvrige observationer i den betragtede periode. Idet variansen for Brownske processer øges proportionalt med tiden, vil covariansen målt på månedlige afkast ligeledes øges med antallet af dage i måneden i forhold til covariansen mellem daglige observationer. I formler for optimale porteføljeandele divideres de fundne covarianser med prisindekset derfor med 21, hvor 21 approksimativt er det gennemsnitlige antal børsdage pr. måned.

Eftersom der ikke tages hensyn til skatteforhold i modellen, betragtes konsistent hermed nettoprisindekset som udtryk for inflationsudviklingen.

Ved udregning af udviklingen for renter og valutakurser benyttes det gennemsnitlige daglige udkast over hele perioden. Herved modificeres porteføljemodellen fra at lade prisdannelsen være givet ved drift (dvs. muliggøre lokale trends) til at være givet ved en gennemsnitlig trend over hele perioden. Samtidig antages korrelationsstrukturen konstant.

Ved udregning af korrelationer og covarianser har jeg valgt ikke at tage hensyn til desynkron handel. Dersom markederne var effektive, ville kausaliteten mellem de enkelte markeder ikke være entydig. Hvis ny information offentliggøres i den danske fondsbørs' åbningstid, mens f.eks. det amerikanske er lukket, vil aktiekursudviklingen i Danmark skulle påvirke aktiekursudviklingen i USA, når dette marked åbner. Selvom empiri indikerer, at det amerikanske marked er det ledende marked, har jeg derfor alligevel valgt ikke at lagge de amerikanske data.

Jeg vil kort opsummere resultatet for de fundne optimale porteføljeandele for Adler & Dumas' fler-lande model, idet resultater for to-lande modellen kan findes hos Dyrlev 1992.

Tabel 1 angiver de fundne værdier. Det fremgår, at det danske afkast på alle aktiemarkeder har været større end den »risikofri« rente r , mens det danske afkast på det engelske, svenske og amerikanske pengemarked har været negativt over den betragtede periode. Kun afkastet på det danske aktiemarked og det engelske pengemarked har været positivt korreleret med prisudviklingen. Disse afkast sammensættes med covarians-varians

Tabel 1. Realiseret afkast og risiko i DKK for markeder, målt i pct. pa. porteføljeandele.

	I	II	III	IV	V	VI
Aktieindeks						
DKK	11,6	10,0	0,06	28,2	6,2	3,6
DEM	2,6	1,0	-0,07	32,3	3,6	-0,8
GBP	11,7	10,1	-0,02	14,7	3,6	-0,6
JPY	19,0	17,4	-0,02	26,0	-0,6	-0,2
SEK	18,2	16,6	-0,08	29,2	2,3	-1,9
USD	10,9	9,3	-0,02	25,8	0,7	-0,4
3 mdr. rente						
DEM	19,4	17,8	-0,01	15,7	1,9	-0,9
GBP	-6,6	-8,2	0,01	33,1	3,9	-0,8
JPY	5,5	3,9	-0,01	23,3	3,4	0,7
SEK	-6,5	-8,1	-0,03	27,7	0,1	-0,6
USD	-11,9	-13,5	-0,07	27,8	-7,2	1,1
DKK	1,6	0,0	—	—	16,0	1,7
PF-Andele						
MIN-VAR	-24,9	-26,5		31,9		
LOG.PF	249,3	247,7		541,5		
"NAIV" PF	5,9	4,3		9,4		

I: Gennemsnitligt nominelt afkast i pct. pa.

II: Gennemsnitligt nominelt afkast minus "risikofri" rente (dkk 3 mdr. rente)

III: Covarians med inflationsrate

IV: Standardafvigelse for nominelle afkast

V: Logaritmisk porteføljeandel på marked *i*VI: Minimum-variants porteføljeandel på marked *i*

matricen, hvorved minimum-variants og den logaritmiske porteføljeandel findes som angivet i tabellen.

Minimum-variants porteføljeandelen domineres af negative porteføljeandele for pengemarkederne, hvilket skyldes den generelt negative korrelation med prisudviklingen. Det betydeligste fald i renten for hovedparten af pengemarkederne skete således frem til 1983, mens inflationsraten har fortsat sit fald frem til 1987, hvilket giver en negativ korrelation i perioden efter 1986. Den negative korrelation kan skyldes, at den forventede inflation, der indgår i rentedannelsen, var tilknyttet historisk højere inflationsrater. Det bemærkes dog, at det japanske pengemarked indgår med negativ vækst i porteføljen på trods af en positiv korrelation, hvilket skyldes kompleksiteten i covarians-variants matricen. Blandt aktiemarkederne indgår kun det danske aktiemarked med en positiv vægt. Den betydelige vægt for det danske marked skyldes en lavere variabilitet for det danske indeks. Denne lavere variabilitet kan som nævnt delvist tillægges en relativ illikviditet på det danske marked.

I den *logaritmiske porteføljeandel* indgår hovedparten af aktiemarkeder positivt, eftersom afkastet i forhold til den indenlandsk »risikofri« rente har været positiv, også kor-

rigeret for valutakursudviklingen. Bortset fra USD gør det sig også gældende for penge-markederne, hvorfor det indenlandske pengemarked indgår med en betydelig negativ andel. Det bemærkes, at der er tale om en betydelig gearing. Forudsætningen om, at investor kan låne i det omfang, hun ønsker, er således væsentlig.

Afkast og variabilitet for en portefølje sammensat efter de fundne vægte kan sammenlignes med resultater på de enkelte markeder samt med »naivt« specificerede porteføljer, hvor sidstnævnte er defineret som porteføljer med lige vægt på de enkelte markeder. Med den kun månedlige offentliggørelse af prisdata er denne primitive performancemåling foretaget for de nominelle afkast, selvom vi jo faktisk har maksimeret det reale afkast.

Det viser sig, at de logaritmiske porteføljeandele har været i stand til at generere et langt højere afkast end de øvrige porteføljesammensætninger og de enkelte aktiver, hvilket til gengæld er forbundet med en vis højere variabilitet. Afkastet for minimum-varians porteføljen har været negativt over den betragtede periode.

Resultaterne dækker perioden 1. januar 1986 til 31. juli 1991.

4. Empiri vedrørende prisdannelsen på finansmarkederne

Vi vil i det efterfølgende forsøge at vurdere, hvorvidt modellens forudsætninger om prisdannelsen på markederne kan siges at være opfyldt. Dernæst vil vi søge at forbedre beskrivelsen af prisudviklingen for at benytte denne beskrivelse til forudsigelser. For at investor kan realisere de potentielle diversifikationsgevinster, må hun være i stand til at forudsige markedernes prisudvikling og derved danne ex ante porteføljer. Prisudviklingens afvigelse fra modelantagelsen er således essentiel.

Optegnes den inverse standardiserede fordelingsfunktion mod-logaritmen til de respektive variable, vil punkterne følge en ret linie, dersom de stokastiske variable er logaritmisk normalfordelte. Bortset fra nettoprisindekset synes dette rimeligvist at være opfyldt, dog med afvigelser i fordelingernes hale. Med det store antal observationer må denne afvigelse tillægges større betydning.⁴ I det følgende antages dog, at de stokastiske variable er approksimativt normalfordelte.

Dersom en tidsrække følger en *Random Walk proces*, $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$, vil variationen for differenserne være lineær med tidsintervallets længde;

Ved successiv substitution ved et givet X_t til X_0 fås:

$$X_t = X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} \quad 4.1$$

Antag $X_0 = 0$. Herved følger resultatet om en tidsinvariant middelværdi (på 0), men en tidsafhængig varians;

4. Empiri indikerer, at der kan opnås en bedre tilnærmelse til normalfordelingen ved at anvende ugentlige data.

$$E[X_t] = E[\sum \varepsilon_{ti}] = 0 \quad 4.2$$

$$\text{Var}[X_t] = E[\sum \varepsilon_{ti} \sum \varepsilon_{ti}] = E[(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_t)(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_t)] = t\sigma_\varepsilon^2 \quad 4.3$$

(eftersom $E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0, i \neq j$)

eller;

$$dX(t) = \sigma dW(t) \quad 4.4$$

Her angiver $dW(t)$ Wienerdifferentialet, og det fremgår, at Random Walk er en diskret tidsversion af Wienerprocessen. Den drift, der medtages i modellerne, angiver en afvigelse fra Random Walk modellen, idet både middelværdi og varians øges proportionalt med tiden for geometriske Brownske processer med drift. Imidlertid kan Brownske processer med drift opfattes som grænsen for en Random Walk med drift:

$$\begin{aligned} \ln X_t - \ln X_{t-1} &= \mu + \varepsilon_t \\ \Rightarrow X_t/X_{t-1} &= \mu^* e^{\varepsilon_t}, \mu^* = \exp(\mu) \end{aligned}$$

heraf;

$$E[X_t] \approx \mu^* X_{t-1}$$

Modellernes forudsætning om prisfordelingen kan derfor accepteres, dersom fordelingerne kan beskrives ved Random Walk (med drift). Informationsmæssigt (svagt) effiente markeder er konsistente med, at prisudviklingen følger en Random Walk proces, hvorfor forudsætningen forekommer rimelig. Imidlertid kan afvigelser fra Random Walk modellen for aktiemarkederne bl.a. tilskrives, at totalindekset som nævnt inkluderer en del illikvide aktier, hvorved prisudviklingen er mere springende og derfor eventuelt bedre kan beskrives ved en Poisson Proces. Tilsvarende vil valutakurser under intervention ikke kunne variere frit. Endvidere har andre faktorer end egenprisudviklingen betydning.

For aktiemarkederne kan man for det danske, tyske og amerikanske marked ikke afvise Random Walk med drift modellen. For valutakurserne kan DKK/DEM og DKK/GBP ikke beskrives ved Random Walk, mens Random Walk kun er signifikant for det tyske og engelske pengemarked

Beskrivelsen af prisudviklingen forbedres, dersom støjprocessen beskrives ved ARI-MA-modeller; men modellen bliver generelt kun signifikant bedre,⁵ dersom der desuden »renses« for større eksogene begivenheder i forhold til den generelle prisudvikling.

5. Modelforbedringen måles ved et kvotienttest.

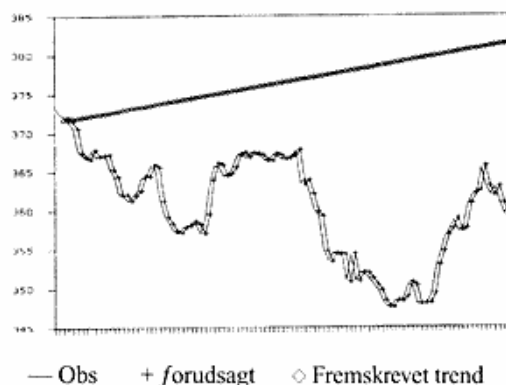
Sådanne isolerede begivenheder beskrives via interventionsmodeller. For aktiemarkedene må der således oplagt tages hensyn til kursskredet i oktober 1987. Jeg vælger at antage, at begivenheden har en midlertidig, og ikke permanent, effekt på markederne. For valutakurserne opstilles interventionskomponenter for større valutakursinterventioner via permanente interventionsfunktioner. Endelig kan transferfunktionsmodeller illustrere, hvorledes de danske markeder influeres af udviklingen på de udenlandske markeder. Den gradvise modeludbygning kan ses hos Dyrlev 1992. Her illustreres kun den endelige modelbeskrivelse af udviklingen på det danske aktiemarked, hvor samtlige markeder indgår i beskrivelsen af det danske marked. Den logaritmiske førstedifferens for det danske totalindeks til tiden t benævnes X_t , og t -værdierne for de enkelte parametre angives i parentes;

$$\begin{aligned}
 X_t = & -0,24 \sum (-0,452)^i OKT_{t-i} + 0,093 DEM_t + 0,020 DEM_{t-1} + 0,014 GBP_t \\
 & \quad (-4,21) \quad (-3,03) \quad (5,77) \quad (1,29) \quad (0,65) \\
 & + 0,039 GBP_{t-1} + 0,048 JPY_t + 0,045 SEK_t + 0,053 SEK_{t-1} + 0,019 USD_t \\
 & \quad (1,80) \quad (2,78) \quad (2,86) \quad (3,49) \quad (1,17) \\
 & + 0,106 USD_{t-1} + \gamma_t \\
 & \quad (5,09) \\
 \gamma_t = & 0,054 \gamma_{t-1} + 0,056 \gamma_{t-2} + 0,15 \cdot 10^{-3} + \varepsilon_t \\
 & \quad (2,02) \quad (2,11) \quad (0,79)
 \end{aligned}$$

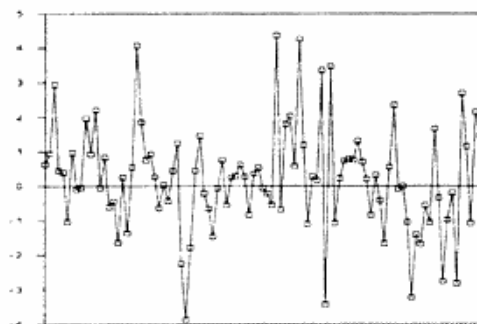
OKT angiver interventionskomponenten for kursskredet, der herved indikerer en førstedagseffekt på et 2,4% fald i indekset mod et observeret fald på 7,5%. Denne åbenbare afvigelse skyldes, at en væsentlig del af det observerede fald tillægges en reaktion på udviklingen på især det amerikanske marked. Den negative tilpasningsparameter, estimeret til -0,452, angiver, at den efterfølgende reaktion kan karakteriseres ved gradvist aftagende svingninger.

Det amerikanske marked er særegent ved, at påvirkningen af det danske marked lagget med en dag er stærkere end den simultane. Den empiriske krydskorrelation med den laggede udvikling er således estimeret til 0,35 mod 0,13 med den simultane, hvilket skyldes den desynkrone handel. Hvis man anvender en model, hvor det ikke er muligt at inddrage både den simultane og laggede udvikling, vil det derfor være mest naturligt at lagge de amerikanske data. Det engelske markedes påvirkning af det danske er ikke signifikant i denne simultane model, hvilket skyldes en forholdsvis betydelig korrelation mellem det engelske og amerikanske marked.

Støjprocessen γ beskrives ved en autoregressiv model af anden orden, hvor den deterministiske komponent ikke er signifikant, men forbedrer modelbeskrivelsen, ligesom det er rimeligt at antage et vist løbende afkast, selvom dividender er fratrukket indeksud-



Figur 1. Fremskrivning DKKAKT.
Endimensionel autoregressiv model.



Figur 2. Residualafvigelse.
Endimensionel autoregressiv model.

viklingen.⁶ Restleddet kan med 18,3% signifikanssandsynlighed ved lag 36 beskrives ved hvid støj,⁷ hvilket må betegnes som tilfredsstillende, når antallet af observationer i hver tidsserie for aktiemarkedet er over 1400.

I en tilsvarende simultan model for *pengemarkedet* er påvirkningen fra de udenlandske markeder mindre, og modellen forbedres ikke ved også at inddrage valutakursudviklingen. Det er i den forbindelse vigtigt at huske det skift i de institutionelle rammer, der er sket i perioden siden 1982, i hvilket modellerne for *pengemarkedet* er estimeret.

5. Forudsigelser af prisudviklingen

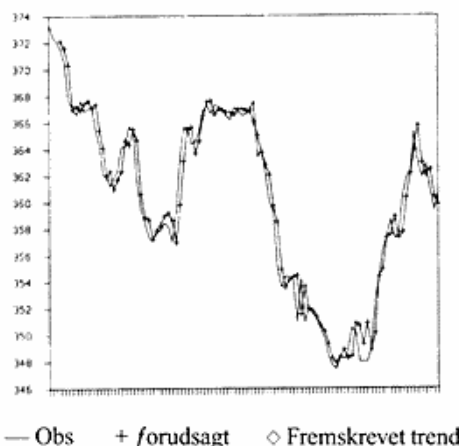
En ex ante dannet portefølje kræver overblik dels over korrelationen mellem markederne, dels over prisudviklingen på de enkelte markeder og variationen i denne. Mens den daglige korrelation mellem markeder er relativt svingende, er korrelationen over en længere tidshorisont mere stabil. Herved kan historiske korrelationsdata anvendes ved forudsigelser, selvom der dagligt kan forekomme afvigelser.

Valutakursudviklingen kan bedst beskrives ved Random Walk eller ved glidende gennemsnitsmodeller af 3. orden, hvorved valutakursudviklingen for sidstnævnte modeller kan forudsiges tre dage frem.

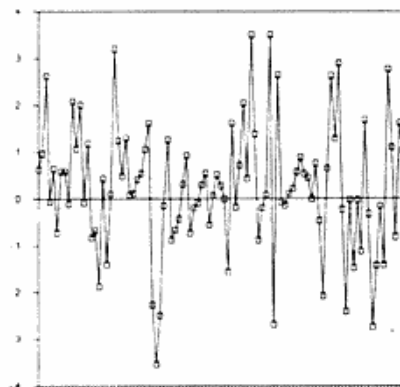
Tilbage står forudsigelsen af afkastet i lokal valuta. Jeg har benyttet de estimerede ARIMA-modeller til at fremskrive udviklingen i det danske Totalindeks i perioden uge 37 i 1991 til uge 4 i 1992, idet modellerne for det danske aktiemarked er estimeret på data til og med uge 36 i 1991. Figur 1 viser dels den fremskrevne udvikling for det danske

6. Jeg antager således ikke-transversalitet.

7. Der anvendes et Ljung-Box test.



Figur 3. *Fremskrivning DKKAKT.*
Transfermodel, observerede amrk. data.



Figur 4. *Residualafvigelse*
Transfermodel, observerede amrk. data.

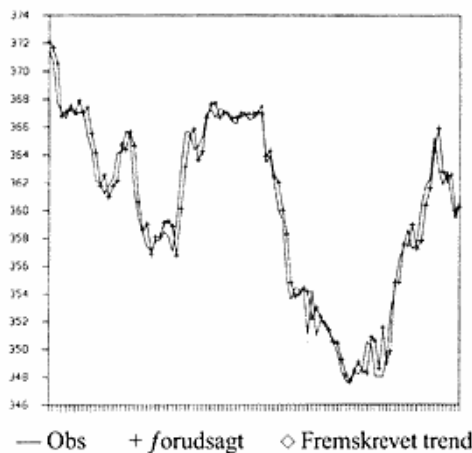
marked,⁸ dels den forudsagte værdi fra den endimensionale ARIMA (2,1,0) model, hvor jeg løbende medtager de sidste historiske observationer.

Det fremgår, hvorledes den faktiske udvikling har afvejet kraftigt fra den forudsagte udvikling ved begyndelsen af fremskrivningsperioden. Denne afvigelse illustrerer den betydelige indflydelse fra andre faktorer end egenprisudviklingen. Når de faktiske observationer løbende medtages, er overensstemmelsen med den faktiske indeksudvikling bedre, men tilknyttet udviklingen de to foregående dage, hvorved forudsigelserne først opfanger skift i indeksudviklingen med op til to dages forsinkelse. Dette ses tydeligt i midten af perioden, hvor aktiemarkedet i efteråret oplevede fald i forbindelse med indlandske amerikanske forhold (nedsatte forventninger til indtjeningen i bio-tech og banksektoren). Interventionskomponenter kan kun inddrages ex post.

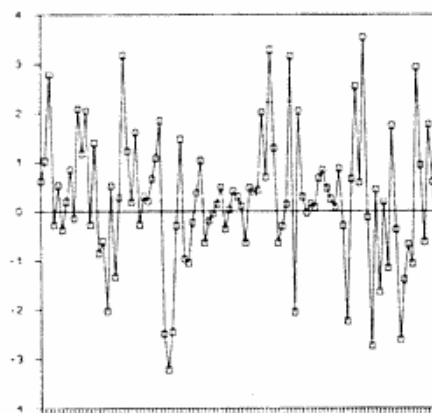
Det forekommer derfor naturligt at lade det amerikanske marked indgå i de løbende forudsigelser. Eftersom netop den laggede effekt fra det amerikanske marked er stærkest, vil man kunne udnytte informationen om den amerikanske indeksudvikling til forudsigelse af den danske og derved opfange skift tidligere i forløbet. Dette forudsætter dog, at korrelationen med det amerikanske marked er nogenlunde konstant.

Jeg har løbende fremskrevet den danske udvikling, hvor forklaringsbidraget fra den amerikanske indeksudvikling medtages. Som det fremgår af figur 3, er forudsigelserne her generelt mere sammenfaldende i forhold til benyttelse af den endimensionale ARIMA model. Det er nu endda muligt at forudsige skift i den danske indeksudvikling. Dette ses specielt i forbindelse med faldet på aktiemarkedet i efteråret.

8. Idet de logaritmiske førstedifferenser X_t kan beskrives ved en autoregressiv proces af anden orden, har jeg løst en anden ordens differensligning til at finde X_t som funktion af tiden t . X_t kan da udtrykkes som funktion af tiden t ved: $X_t = 0,00087(-0,204)^t - 0,00368 \cdot 0,279^t + 0,301 \cdot 10^{-3}$ med $X_1 = \ln(372,13/372,48)$ og $X_0 = \ln(372,48/373,43)$.



Figur 5. *Fremskrivning DKKAKT.*
Transfermodel, fremskrevne amrk. data.



Figur 6. *Residualafvigelse*
Transfermodel, fremskrevne amrk. data.

Den amerikanske indekssværdi fra samme dag er imidlertid ikke observerbar. I figur 5 benytter jeg derfor den forudsagte amerikanske indekssværdi ud fra den estimerede Random Walk modellen med drift for det amerikanske marked i den simultane vekselvirkning. Forudsigelserne bliver ikke væsentligt forskellige fra tilfældet, hvor de amerikanske data antages kendte. Dette bekræfter Random Walk modellen for det amerikanske aktiemarked.

Den kvadrerede residualafvigelsessum fra de tre forudsigelsesfunktioner er hhv. 236,4, 188,4 og 181,2. Generelt forbedres forudsigelserne således ved medtagelse af amerikanske data som forklaringsfaktor. Dette tyder på en rimelig stabilitet i dependensen til det amerikanske marked, også med kort tidshorisont.

For investorer med kort tidshorisont vil man derfor med fordel kunne anvende de estimerede ARIMA-modeller til forudsigelse af den umiddelbare indeksudvikling. Ved at benytte ARIMA modellerne for alle markeder til at forudsige indeksudviklingen en dag frem, vil investor dagligt kunne danne sin optimale ex ante portefølje, eftersom man ud fra forudsigelserne vil kunne skønne over den umiddelbare trendudvikling.

Data for *prisudviklingen* er mere problematisk. For det første findes kun proxyer for prisudviklingen for investors forbrugskurv, og for det andet offentliggøres prisindeks kun månedligt. Dette bevirker, at det er mere vanskeligt at danne ex ante minimumvariansporteføljer på det kort sigt. Korrelation med prisudviklingen synes mere stabil i forhold til mellem markederne, hvorved man umiddelbart bedre vil kunne danne ex ante minimum-varians porteføljer frem for de logaritmiske. Med frekvensen for offentliggørelse af prisudviklingen er det imidlertid kun muligt for den logaritmiske portefølje at danne mere kortvarige ex ante porteføljer. Det må dog også huskes, at hyppige porteføljeomlægninger implicerer transaktionsomkostninger, som der ikke er taget hensyn til.

6. Inddragelse af imperfektioner

Ved praktisk anvendelse af porteføljemodellerne er det væsentligt at tage hensyn til eksisterende imperfektioner. Disse kan bl.a. bevirke, at det er nødvendigt at inddrage pengehold i investors portefølje, ligesom det kan være relevant at foretage afdækning på virksomhedsniveau. Endvidere vil ligevægtspriser ikke være fuldt afslørende, dersom signalrummets dimension er større end det observerede antal markedsclearende priser. Herved vil agenter fejlagtigt reagere på transmitterede markedsspecifikke faktorer, hvilket kan øge samvariationen mellem markeder, ligesom den fundamentale skelnen mellem systematisk og usystematisk risiko bliver mindre klar. Transaktionsomkostninger bevirker principielt en vis interti i porteføljeomlægningen; men disse omkostninger er dog minimale på de finansielle markeder.⁹ I det følgende vil vi koncentrere os om konsekvensen af *skattebetalinger*.

I praksis beskattes den enkelte agent, både for udbytter og andet udenlandsk kapitalafkast, efter den indenlandske skattesats af personlig kapitalindkomst, idet udlandslempelsen praktiseres efter maksimal credit metoden. Det vil sige, at agenter samlet beskattes med den indenlandske skattesats, så længe denne overstiger udlandets.

Dette forudsætter imidlertid, at kontrollen med de udenlandske kapitalindtægter er effektiv. I modsat fald vil den endelige beskatning udelukkende være den aconto kupon-skat, der opkræves i de respektive lande.

Hvis investor alene beskattes af acontoskatten, modificeres det effektive afkast i Branson og Hendersons model til:

$$dB/B = i(1-t)dt \quad 6.1a$$

$$dF/F = i^*(1-t^*)dt \quad 6.1b$$

hvor t er den indenlandske marginale skattesats og t^* den udenlandsk opkrævede acontoskat. Udviklingen for valutakurs og prisindeks er uændret. Den optimale porteføljeandel finder jeg herved til:

$$\lambda^* = 1/(R\sigma_e^2) (i^*(1-t^*) + \varepsilon - i(1-t) + (R-1)\sigma_{qe}) \quad 6.2$$

Minimumvariansporteføljen er uændret, idet de direkte afkast forudsættes at være stationære, hvorved skattesatsen er uden betydning for det reale afkasts variabilitet. Til gengæld korrigeres risikopræmien som ovenfor i den logaritmiske portefølje. Dette implicerer, at den logaritmiske porteføljeandel *ikke* kan opfattes som »international investor's rule«, idet risikopræmien afhænger af landenes skattesatser. Disse indgår, hvad

9. Se eventuelt Dyrlev 1992 for inddragelse af de nævnte aspekter.

enten investor opfylder sin oplysningspligt eller ej, hvorved den logaritmiske porteføljeandel altid vil divergere mellem investorer fra lande med forskellige skattesatser.

Med opfyldelse af oplysningspligten beskattes både det indenlandske og det udenlandske afkast med skattesatsen t . I modsætning til ikke-oplyst udenlandsk afkast vil beskatningen nu finde sted af det udenlandske afkast benævnt i indenlandsk valuta. Den optimale udenlandske porteføljeandel finder jeg da til;

$$\lambda^* = [(i^* + \varepsilon - i)/(1-t) + (R-1/(1-t))\sigma_{qe}]/(R\sigma_e^2) \quad 6.3$$

Effekten af en øget skattesats er usikker m.h.t. den udenlandske porteføljeandel. På den ene side medfører en større skattesats en reduktion af den nominelle risikopræmie, hvilket mindsker den optimale udenlandske porteføljeandel. Til gengæld implicerer en stigende skattesats en mindre korrelation mellem prisindeks og valutakurs, hvorved udenlandsk placering er mindre egnet som inflationssikring.

Idet variabiliteten mindskes med kvadratet på t , mens det nominelle rentespænd alene mindskes med t , får rentespændet større betydning relativt til variabiliteten ved stigende skattesats. Beskatningen virker som et »skjold« mod en del af valutakursrisikoen, hvorfor den nødvendige afdækning mindskes ved stigende skattesats.

Den logaritmiske porteføljeandel finder jeg til

$$\lambda^L = (i^* + \varepsilon - i) - t\sigma_{qe} / ((1-t)\sigma_e^2) \quad 6.4$$

Udover domicillandets skattesats indgår nu også det indenlandske prisindeks kovariation med valutakursen, eftersom en del af valutakursgevinsten/tabet udsættes for beskatning.

Idet beskatningen kun har indflydelse på *niveauet* for variansen på det reale forbrug, er minimumvariansporteføljen uændret i forhold til tilfældet uden beskatning.

I Dyrlev (1992) er fundet empirisk optimale porteføljeandele, der er dannet ex post med hensyntagen til skatteindbetalingen.

Konklusion

En agents evne til at drage fordel af muligheden for at sprede sin portefølje internationalt må bero på, hvorvidt agenten er i stand til at systematisere den nødvendige information. Anvendelsen af en porteføljemodel sikrer, at valget bliver konsistent; men modellen kan umiddelbart virke vel meget matematisk og restriktiv i sine forudsætninger. Det er derfor lovende, at artiklens resultater viser, at modellen synes anvendelig i praksis.

En væsentlig forudsætning for at anvende modellen er kvalificerede estimater over den fremtidige prisudvikling. Selvom prismodellernes forudsigelsesevne forbedres, når udenlandske markeder inddrages til beskrivelse af priserne på det danske marked, er det

alligevel ønskeligt at forbedre modellernes forudsigelsesevne. Beskrivelsen af prisudviklingen kan uden tvivl forbedres ved at kombinere den statistiske model for egenprisudviklingen med andre faktorer, der også indgår i den samlede beskrivelse af prisudviklingen.

Modellen angiver ikke, hvorledes afvejningen mellem forventet afkast og risiko bør finde sted. Den relative risikoaversion er noget uhåndterbar; men alternativt må agenten specificere det maksimale risikoniveau eller angive det afkast, som porteføljen minimum skal generere. Det sidste aspekt indgår i begrebet »downside risk«, hvor risiko ikke opfattes som symmetrisk, men hvor kun tab tillægges risiko.

Litteratur

- Adler, M. & B. Dumas. 1983. International Portfolio Choice and Corporate Finance. A Synthesis. *Journal of Finance* no. 3, June, 925-976.
- Branson, W. H. & D. W. Henderson. 1985. The Specification and Influence of Asset Markets. I R. W. Jones & P. K. Kenen, red.: *Handbook of International Economics* vol. 2, 782-800.
- Dyrlev, J. 1992. Aspekter af internationalt Porteføljevalg. Afsluttende opgave, Københavns Universitet, feb. VII 689.
- Merton, R. C. 1971. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory* 3, 373-413.
- Milhøj, A. 1986. *Tidsrækkeanalyse for Økonomer*, København.

alligevel ønskeligt at forbedre modellernes forudsigelsesevne. Beskrivelsen af prisudviklingen kan uden tvivl forbedres ved at kombinere den statistiske model for egenprisudviklingen med andre faktorer, der også indgår i den samlede beskrivelse af prisudviklingen.

Modellen angiver ikke, hvorledes afvejningen mellem forventet afkast og risiko bør finde sted. Den relative risikoaversion er noget uhåndterbar; men alternativt må agenten specificere det maksimale risikoniveau eller angive det afkast, som porteføljen minimum skal generere. Det sidste aspekt indgår i begrebet »downside risk«, hvor risiko ikke opfattes som symmetrisk, men hvor kun tab tillægges risiko.

Litteratur

- Adler, M. & B. Dumas. 1983. International Portfolio Choice and Corporate Finance. A Synthesis. *Journal of Finance* no. 3, June, 925-976.
- Branson, W. H. & D. W. Henderson. 1985. The Specification and Influence of Asset Markets. I R. W. Jones & P. K. Kenen, red.: *Handbook of International Economics* vol. 2, 782-800.
- Dyrlev, J. 1992. Aspekter af internationalt Porteføljevalg. Afsluttende opgave, Københavns Universitet, feb. VII 689.
- Merton, R. C. 1971. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory* 3, 373-413.
- Milhøj, A. 1986. *Tidsrækkeanalyse for Økonomer*, København.