Nationaløkonomisk Tidsskrift 130 (1992): 338-347

Arbejde er godt - og andre nyere resultater i den klassiske velfærdsteori

Hans Keiding
Økonomisk Institut, Københavns Universitet

SUMMARY: *Serveral recent results in general equilibrium theory have their roots in a modern counterpart of the traditional marginal analysis, using a notion of generalized tangent directions which can be defined also for non-smooth functions. In the paper we consider examples taken from the theory of voluntary allocations, implementation of fair net trades, and the core of a large economy.*

1. Indledning

Den klassiske velfærdsteori beskæftiger sig med sammenhængen mellem optimalitet og ligevægte. Med en aktuel sprogbrug behandler den *markedsmekanismens* optimalitetsegenskaber.

Teorien er gammel og veletableret som lærebogsstof. Ikke desto mindre er der liv i den; dens hovedbudskaber kan stadig bruges til at give ny indsigt, endda af og til om forhold, der – omend formuleret lidt anderledes – er oppe i den almindelige debat.

I de følgende afsnit ser vi lidt nærmere på et udvalg af nyere resultater, som alle er mere eller mindre direkte afledt af velfærdsteoriens "gode, gamle" hovedsætninger.

2. Det grundlæggende begrebsappparat

Vi betragter en økonomi $\mathscr{E}$ med l varer, m forbrugere og n producenter. Forbruger i karakteriseres ved sit forbrugsmulighedsområde $X_i \subset \mathbf{R}^l_+$ og sine præferencer, givet ved en korrespondance $P_i : X_i \to X_i$, som til hvert bundt $x_i \in X_i$ angiver en delmængde $P_i(x_i)$ af X_i fortolket som bundterne foretrukket for x_i. Denne beskrivelse af forbrugernes præferencer (indført af Gale og Mas-Colell (1975)), Shafer og Sonnenschein (1975) er lidt mere generel end lærebogsversionen, og den er bekvem i mange anvendelser. Endelig er der for hver forbruger en initialbeholdning $\omega_i \in \mathbf{R}^l$, som antages at tilhøre X_i.

Producenterne $j = 1,..., n$ er givet ved produktionsmulighedsområder $Y_j \subset \mathbf{R}^l$.

Vi skal gøre følgende antagelser:

Nationaløkonomisk Tidsskrift 130 (1992): 338-347

Arbejde er godt - og andre nyere resultater i den klassiske velfærdsteori

Hans Keiding
Økonomisk Institut, Københavns Universitet

SUMMARY: *Serveral recent results in general equilibrium theory have their roots in a modern counterpart of the traditional marginal analysis, using a notion of generalized tangent directions which can be defined also for non-smooth functions. In the paper we consider examples taken from the theory of voluntary allocations, implementation of fair net trades, and the core of a large economy.*

1. Indledning

Den klassiske velfærdsteori beskæftiger sig med sammenhængen mellem optimalitet og ligevægte. Med en aktuel sprogbrug behandler den *markedsmekanismens* optimalitetsegenskaber.

Teorien er gammel og veletableret som lærebogsstof. Ikke desto mindre er der liv i den; dens hovedbudskaber kan stadig bruges til at give ny indsigt, endda af og til om forhold, der – omend formuleret lidt anderledes – er oppe i den almindelige debat.

I de følgende afsnit ser vi lidt nærmere på et udvalg af nyere resultater, som alle er mere eller mindre direkte afledt af velfærdsteoriens "gode, gamle" hovedsætninger.

2. Det grundlæggende begrebsappparat

Vi betragter en økonomi $\mathscr{E}$ med l varer, m forbrugere og n producenter. Forbruger i karakteriseres ved sit forbrugsmulighedsområde $X_i \subset \mathbf{R}^l_+$ og sine præferencer, givet ved en korrespondance $P_i : X_i \to X_i$, som til hvert bundt $x_i \in X_i$ angiver en delmængde $P_i(x_i)$ af X_i fortolket som bundterne foretrukket for x_i. Denne beskrivelse af forbrugernes præferencer (indført af Gale og Mas-Colell (1975)), Shafer og Sonnenschein (1975) er lidt mere generel end lærebogsversionen, og den er bekvem i mange anvendelser. Endelig er der for hver forbruger en initialbeholdning $\omega_i \in \mathbf{R}^l$, som antages at tilhøre X_i.

Producenterne $j = 1,..., n$ er givet ved produktionsmulighedsområder $Y_j \subset \mathbf{R}^l$.

Vi skal gøre følgende antagelser:

- for hver forbruger i er mængden X_i afsluttet, konveks og opfylder $X_i + \mathbf{R}^l_+ \subset X_i$,
- for hver forbruger i og hvert bundt $x_i \in X_i$ er $P_i(x_i)$ konveks, $x_i \in clP_i(x_i) \setminus P_i(x_i)$, og $P_i(x_i) + [\mathbf{R}^l_+ \setminus \{0\}] \subset P_i(x_i)$.
- for hvert j er Y_j afsluttet og konveks.

Disse antagelser er ret særvanlige; for en nærmere kommentar kan der henvises til lærebøgerne (f. eks. Blad og Keiding (1990)). En *allokation* i økonomien $\mathscr{E}$ er et par

$$(x,y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

hvor $x_i \in X_i$, $i = 1,\dots, m$, $y_j \in Y_j$, $j = 1,\dots,n$. Allokationen (x, y) er *opnåelig* hvis

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_i .$$

Et *prissystem* er en vektor $p \in \mathbf{R}^l_+$, $p \neq 0$. Et trippel (x,y,p), hvor (x,y) er en allokation og p et prissystem, er en *markeds-quasiligevægt,* hvis

(i) (x,y) er opnåelig,
(ii) for hver forbruger i gælder, at x_i minimerer linearformen $p \cdot x$ på $\mathrm{cl}P_i(x_i)$,
(iii) for hver producent j gælder, at y_j maksimerer linearformen $p \cdot y$ på Y_j.

Det besværlige "quasi" i navnet hentyder til, at den enkelte forbrugers bundt er udgiftsminimerende blandt de mindst-lige-så-gode snarere end bedst blandt de højest-lige-så-dyre. Dette lidt svagere begreb er nok til vort formål; ønsker man "rigtige" markedsligevægte, må der suppleres med antagelser om at forbrugeren ikke rammer sin fattigdomsgrænse (såkaldte minimum-wealth betingelser).

En allokation (x,y) er *Pareto-optimal* hvis den er opnåelig, og der findes ikke Pareto-forbedring af (x,y), dvs. en opnåelig allokation (x', y') med $x_i' \in \mathrm{cl}P_i(x_i)$ for alle i og $x_i' \in P_i(x_i)$ for nogle i.

Under visse omstændigheder vil vi have brug for at specificere, hvorledes producenternes profit fordeles blandt forbrugerne. Da fordelingsmetoden ikke vil spille nogen særlig rolle, kan vi antage, at det sker ved en *indkomstfordelingsfunktion* $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : \mathbf{R}^l_+ \to \mathbf{R}^m$ som opfylder betingelsen

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(p) = \sum_{j=1}^{n} \max \{ p \cdot y_j \mid y_j \in Y_j \}$$

for alle p (funktionen er ikke defineret, hvis nogle priser er 0, men det problem er uvæsentligt i vor sammenhæng). En *Walras quasiligevægt* (hvor præfixet "quasi" som tidligere hentyder til den svage ulighed i forbrugernes budgetbetingelse), er en markeds-quasiligevægt (x,y,p) med $p \cdot x_i = p \cdot \omega_i + \gamma_i(p)$ for alle i.

Vi skal i det følgende gentagne gange bruge en antagelse om glathed på randen af mængden af foretrukne bundter eller af produktionsmulighedsområdet. En sådan antagelse kunne formuleres ved at antage præferencer og produktionsmulighedsområder beskrevet ved differentiable funktioner, og sådan gøres det da også som oftest. Der er imidlertid vundet en del ved en mere generel formulering. Vi vil tage udgangspunkt i Clarke (1983):

Lad C være en afsluttet delmængde af $\mathbf{R}^l$, og lad $x \in C$. En vektor $v \in \mathbf{R}^l$, er en *tangent* til C i x hvis der for enhver følge $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, i C, som konvergerer til x, (i det følgende skriver vi kort $x_i \to x$ for denne følge; tilsvarende for andre følger) og enhver talfølge (t_i) fra $\mathbf{R}_+$, som aftager til 0 (kort $t_i \downarrow 0$), findes en følge $v_i \to v$, så $x_i + t_i v_i \in C$ for alle i. Mængden af tangenter til C i x betegnes med $T_C(x)$ og er en afsluttet, konveks kegle.

Hvis C er konveks, og x ligger på randen af C, findes der som bekendt $p \in \mathbf{R}^l$, $p \neq 0$, således at $p \cdot x' \geq p \cdot x$ (hvor $p \cdot x$ er det indre produkt af p og x) for alle $x' \in C$. Det er oplagt, at der må gælde $p \cdot v \geq 0$ for alle $v \in T_C(x)$.

Disse observationer kan vi bruge til en omformulering af velfærdsteoriens anden hovedsætning ("alle Pareto-optimale allokeringer kan fås frem via markedet"):

SÆTNING 1. *Lad (x, y) være en Pareto-optimal allokation i $\mathscr{E}$. Der findes et prissystem $p \in \mathbf{R}_+^l$, så at*

(i) (x, y, p) er en markeds quasi-ligevægt,
(ii) hvis $v_i \in T_{P_i(x_i)}(x_i)$, da er $p \cdot v_i \geq 0$,
(iii) hvis $w_j \in T_{Y_j}(y_j)$, da er $p \cdot w_j \leq 0$.

Bevis: Direkte konsekvens af velfærdsteoriens anden hovedsætning og definitionerne. □

Selvom der egentlig ikke er sket andet end at et velkendt resultat har fået en ny formulering, har vi åbnet op for en del nye anvendelsesmuligheder. Det ser vi på i følgende afsnit.

3. Frivillige allokationer

Lad $l \geq 2$, og lad p være et prissystem. Vi siger at en allokation (x, y) er *frivillig* ved p hvis

(i) (x, y) er opnåelig,
(ii) for hver forbruger i gælder, at $p \cdot (x_i - \omega_i) = \gamma_i(p)$, og x_i er maksimal for P_i i mængden

$$\beta_i(x_i, p) = \{x_i' \in X_i \mid p \cdot (x_i' - \omega_i) = \gamma_i(p),$$
$$\min\{0, x_{ih} - \omega_{ih}\} \leq x_{ih}' - \omega_{ih} \leq \max\{0, x_{ih} - \omega_{ih}\},\ h \neq \ell\},$$

(iii) for hver producent j er y_j maksimal for $p \cdot y$ i mængden

$$\beta_j(y_j, p) = \{y_j' \in Y_j \mid \min\{0, y_{jh}\} \leq y_{jh}' \leq \max\{0, y_{jh}\},\ h \neq \ell\},$$

Det grundlæggende resultat om frivillige allokeringer skyldes Silvestre (1985). Vi kan få dette resultat ved brug af sætning 1 ovenfor.

SÆTNING 2. *Lad (x, y) være en allokation, som er Pareto-optimal og frivillig ved p. Antag at følgende glathedsbetingelse er opfyldt: For hver forbruger i er $T_{P_i(x_i)}(x_i)$ et halvrum, og for hver producent j med $y_j \neq 0$ er $T_{Y_j}(y_j)$ et halvrum. Da findes der p' så (x, y, p') er en Walras quasiligevægt.*

Bevis: Da (x, y) er Pareto-optimal, findes der ifølge sætning 1 et prissystem p', så at (x, y, p') er en markeds-quasiligevægt, ikke blot i $\mathscr{E}$, men også i den økonomi $\mathscr{E}'$, der fremkommer ved at erstatte $P_i(x_i)$ med $\{x_i\} + T_{P_i(x_i)}(x_i)$, alle i, og Y_j med $\{y_j\} + T_{Y_j}(y_j)$. Vi har endvidere, at (x, y) er frivillig ved p også i økonomien $\mathscr{E}'$; det følger at

$$x_i' \in \beta(x_i, p) \Rightarrow p' \cdot x_i \geq p' \cdot x_i'$$
$$y_j' \in \beta(x_j, p) \Rightarrow p' \cdot y_j \geq p' \cdot y_j'$$

For alle h med $x_{ih} - \omega_{ih} \neq 0$ for et vist i, eller $y_{jh} \neq 0$ for et vist j, alle h, får vi dermed, at $p_h'/p_\ell' = p_h/p_\ell$. Det er nu ligetil, at (x, y, p) er en Walras-quasiligevægt. □

En lidt anden udgave af sætningen ovenfor er følgende:

KOROLLAR. *Antag at allokationen (x, y) er frivillig ved prissystemet p, og at glathedsbetingelsen i sætning 2 er opfyldt. Hvis der findes en vare h og en forbruger i, så $x_{ih} - \omega_{ih} < 0$ og $p \cdot v_i < 0$ for en tangent $v_i \in T_{P_i(x_i)}(x_i)$* med $v_{ih} < 0$, *da findes der for hver $\epsilon > 0$ en Pareto-forbedring (x', y') med $x_{ih}' < x_{ih} + \epsilon$.*

Bevis: Erstat $P_i(x_i)$ med

$$\hat{P}_i(x_i) = P_i(x_i) \cap \{x' \mid x_h' \leq x_{ih} + \epsilon\}.$$

og brug sætning 2. □

Det kan godt lade sig gøre at komme af med det lidt tekniske $\mathscr{E}$, men det kræver da et længere bevis.

Resultatet er hentet fra Schultz og Jacobsen (1991), og det er dette resultat, som der – noget kryptisk, må man nok indrømme – refereres til i indledningen: Hvis varen h er en form for arbejdskraft, og tangentbetingelsen fortolkes som at i gerne ville yde mere arbejde, men altså er rationeret, så findes der en Pareto-forbedring, hvor i arbejder mere. Hans ekstra indsats har altså ført til større lykke ikke blot for ham selv, men for samfundet.

I et lidt bredere perspektiv må man nok have med, at der lige så vel kunne fås et resultat om, at mindre arbejde skabte mere lykke (noget der måske taler mere umiddelbart til intuitionen, ihvertfald hos økonomer). Blot skulle "frivillighed" så være udtrykt ved, at man altid kunne købe eller sælge *mere,* men at man kunne være rationeret ned mod 0. En sådan egenskab har dog endnu ikke påkaldt sig opmærksomheden i nogen seriøs sammenhæng.

4. Fair nettohandler og implementering

I dette afsnit vil vi se på en anden situation, hvor kombinationen Pareto-optimalitet og glathedsantagelser giver som resultat, at allokationen kan fås som Walras-ligevægt. Vi skal bruge et par nye begreber:

Vi vil i dette og det næste afsnit nøjes med at betragte en økonomi $\mathscr{E}$ uden produktion. En allokation $x = (x_1,\dots, x_m)$ i en sådan økonomi siges at have *fair nettohandler,* hvis der for hvert i og $j \neq i$ gælder, at

$$\omega_i + (x_j - \omega_j) \notin P_i(x_i),$$

dvs. sige at forbruger i ikke ville blive stillet bedre af at gennemføre forbruger j's markedshandlinger i stedet for sine egne. Fair nettohandler blev indført af Schmeidler og Vind (1974).

En *mekanisme* i økonomien $\mathscr{E}$ er defineret som

$$\Gamma = (\Sigma_1,\dots, \Sigma_m, f),$$

hvor Σ_i, $i = 1,\dots, m$, er mængder (af såkaldte strategier), og $f: \Pi_{i=1}^m \Sigma_i \to \mathrm{R}^l$ er en afbildning, der sender m-tupler af strategivalg $\sigma = (\sigma_1,\dots, \sigma_m)$ ind i opnåelige allokationer i $\mathscr{E}$. En *Nash-ligevægt* i $(\Gamma, \mathscr{E})$ er et sæt strategier $\sigma^* = (\sigma_1^*,\dots, \sigma_m^*)$ således at

$$f(\sigma_i, \sigma^*_{N\setminus\{i\}}) \notin P_i(f(\sigma^*))$$

for hvert i og σ_i (her er $(\sigma_i, \sigma^*_{N\setminus\{i\}})$ det sæt af strategier, der fremkommer fra σ^* ved at bytte σ_i^* ud med σ_i).

SÆTNING 3. *Lad der være givet en klasse E af økonomier således at der for hver økonomi $\mathscr{E}$ i E gælder, at forbrugernes præferencer er glatte i den forstand, at $T_{P_i(x_i)}(x_i)$ er halvrum for alle i og x_i. Antag endvidere, at E indeholder alle økonomier med præferencer beskrevet ved lineære nyttefunktioner.*

Hvis Γ er en mekanisme, som er konveks i den forstand, at $f(\sum_i, \sigma_{N \setminus \{i\}})$ er konveks for hvert σ, og der for alle $\mathscr{E} \in E$ gælder, at Nash-ligevægte i $(\Gamma, \mathscr{E})$ resulterer i Pareto-optimale allokationer, som har fair nettohandler, da vil Nash-ligevægtene resultere i Walras-quasiligevægte for alle $\mathscr{E} \in E$.

Bevis: Lad $\mathscr{E}$ være en vilkårlig økonomi fra E, og lad $x^* = (x^*, \dots, x^*m) = f(\sigma^*)$ være en allokation fremkommet som Nash-ligevægt i $(\Gamma, \mathscr{E})$.

Betragt økonomien $\mathscr{E}'$, der fremkommer ved at erstatte $P_i(x_i)$ med $\{x_i\}$ + int $\Gamma P_i(x_i)$ (x_i) for alle i og x_i. Denne økonomi tilhører E ifølge vore antagelser. Antag først, at σ^* også er Nash-ligevægt i $(\Gamma, \mathscr{E})$, må $f(\sigma^*) = x^*$ være en allokation, som har fair nettohandler i $\mathscr{E}'$. Det er nu umiddelbart, at x^*, som også er Pareto-optimal i $\mathscr{E}'$, må være en Walras-quasiligevægt. Men det betyder, at x^* også er en Walras-quasiligevægt i $\mathscr{E}$.

Hvis σ^* ikke er Nash-ligevægt i $(\Gamma, \mathscr{E})$, findes der i og σ_i, så

$$f(\sigma_i, \sigma^*_{N \setminus \{i\}}) \in int T_{P_i(x_i)}(x_i).$$

På grund af glathedsantagelsen og konveksiteten af Γ vil der derfor også findes σ_i' så

$$f(\sigma_i', \sigma^*_{N \setminus \{i\}}) \in P_i(x_i),$$

i modstrid med at σ^* var en Nash-ligevægt. □

Resultatet (som findes i Keiding og Lindeneg (1988)) er i sig selv ikke særlig chokerende. Det ligger ret tæt op ad tilsvarende resultater om Nash-implementering: Det grundlæggende arbejde er af Hurwicz 1979), der i stedet for fair nettohandler kræver individuel rationalitet (slutbundt mindst lige så godt som initialbundt); en variation af resultatet, som skyldes Thomson (1979) opererer med fair allokationer snarere end fair nettohandler.

I det lidt større perspektiv er budskabet, at allokeringsmekanismer, der resulterer i allokationer med pæne overordnede egenskaber, typisk vil give Walras-ligevægte. Dette kan så igen bruges til at orientere sig indenfor det muliges rammer ved en søgen efter mere effektive eller mere retfærdige allokeringsmetoder. Man kan se dette som en opstramning af den klassiske velfærdsteori: I stedet for blot som tidligere at notere sig, at Pareto-optimalitet helt abstrakt kan fremkomme som en passende markedsligevægt, har man interesseret sig for mekanismer, der frembringer Pareto-optimale allokationer i ligevægtene. Med små yderligere krav er dette så netop, hvad der kan fremkomme via markedet. Med andre ord, selvom man ikke anser den generelle ligevægtsteori for en realistisk beskrivelse af virkeligheden og heller ikke ønsker at realisere fuldkommen konkurrencemarkeder, er teorien alligevel relevant udfra et normativt synspunkt.

5. Den afledte tangentkegle og et resultat om kernen

I de foregående afsnit har vi benyttet os af tangentkeglen $T_C(x)$ til en mængde C i et punkt x. Det ligger lige for at udvide betragtningen til tangentretninger ikke blot for en mængde, men også for en korrespondance, dvs. til en indiceret familie af mængder. Vi skal ikke gå ind på dette i detaljer, men nøjes med et eksempel, der viser anvendeligheden af begrebsapparatet.

Vi starter med den økonomiske model, som drejer sig om sammenhængen mellem kerne og ligevægte i store økonomier. Denne sammenhæng er udførligt behandlet i litteraturen gennem efterhånden adskillige år (se f.eks. Debreu og Scarf (1963), Vind (1964), Hildenbrand (1974), Anderson (1978)): Walras-ligevægte tilhører kernen, og allokationer i kernen i økonomier med mange agenter er Walras-ligevægte. Vi skal se på en særlig variant af dette resultat; vi starter med kort at skitsere de nødvendige detaljer.

For at holde det formelle apparat nede på et minimum vil vi arbejde med replica-økomomier. Vi antager som i afsnit 2, at der er m forskellige slags forbrugere (og som nævnt ingen produktion), men vi vil nu betragte alle de økonomier $\mathscr{E}_r$, som fremkommer, når hver af disse typer af forbrugere er repræsenteret r gange. Vi vil i økonomierne $\mathscr{E}_r$ kun interessere os for allokationer, hvor forbrugere af samme type får samme bundt; dette vil i det følgende være antaget overalt.

Da vi vil se på massefænomener, er det ikke væsentligt, hvor mange forbrugere, der er, blot der er nok af dem. Vi kan angive en gruppe, eller, som det hedder i litteraturen, en koalition af forbrugere, ved at specificere m tal $\mu_1,..., \mu_m$ mellem 0 og 1, hvor μ_i angiver andelen af forbrugere i den betragtede koalition, som er af type i. For to koalitioner S og S' skriver vi $S \subset S'$ hvis $\mu_i \leq \mu_i'$ for alle i.

For at fortolke tallene $\mu_1,..., \mu_m$, noterer vi os, at hvis $(x_1,..., x_m)$ er en allokation, og S er koalitionen givet ved $(\mu_1,..., \mu_m)$, da vil der i en r replica-økonomi (hvor r er et stort tal deleligt med alle μ_i) ialt blive et forbrug $r\,(\mu_1 x_1 +...+\mu_m x_m)$ i koalitionen S, og pr. capita altså $\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i$. Det er derfor naturligt generelt at definere bundtet for koalitionen S på denne måde.

Ser vi dernæst på *foretrukne bundter*, har hver type i i bundtet x_i en mængde $P_i\,(x_i)$ af foretrukne forbrug. Ser vi på koalitionen af samtlige forbrugere af type i, får vi, at alle de gennemsnitlige foretrukne forbrug bliver det konvekse hylster af $P_i\,(x_i)$ (som naturligvis er $P_i\ (x_i)$ selv, hvis denne mængde er konveks, men det behøver den ikke at være i dette afsnit). Tilsvarende vil gennemsnitlige foretrukne forbrug for koalitionen S givet ved $(\mu_1,..., \mu_m)$ være givet ved $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i'$ med $x_i' \in \mathrm{co}(P_i(x_i)),\ i = 1,..., m$. Mængden af sådanne vektorer (der også er konveks), vil vi skrive som $P_S(x_S)$.

Vi kan nu definere *kernen* som mængden af allokationer, der ikke kan *forbedres* af nogen koalition S, idet S kan forbedre x hvis der findes $x_S' = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i'$ med $x_i' \in co(P_i(x_i))$ således at $\sum_{i=1}^m (x_i' - \omega_i) = 0$.

På dette sted vil vi vende tilbage til det gennemgående tema, nemlig glathed formuleret ved tangentretninger. Vi er interesserede i tangentretninger til $P_S(x_S)$ i x_S, men ikke i en forstand, hvori de har været brugt i det foregående; vi vil nemlig udvide definitionen af en tangentretning ved at tillade variation også i S, idet vi definerer tangenter "oppefra" og "nedefra": Antag at der findes en følge (S_i) af koalitioner med $S \subset S_i$, der aftager mod S (skrevet som $S_i \downarrow S$). Hvis w er sådan, at der for alle følger $x_{S_i}' \to x_S$, $t_i \downarrow 0$, $x_{S_i}' \in \mathrm{cl}P_{S_i}\ (x_i)$ findes $w_i \to w$ så $x_{S_i} + t_i w_i \in P_{S_i}\ (x_{S_i})$, da er w en tangent oppefra til $P_S(x_S)$ i (x_S). Vi skriver dette som $w \in T_S^P + (x_S)$. Ved at udskifte $S \subset S_i$ med $S_i \subset S$ og $S_i \downarrow S$ med $S_i \uparrow S$ fås tilsvarende mængden $T_S^P - (x_S)$ af tangenter nedefra.

LEMMA 4. Lad x være en allokation, S en koalition. Da gælder:

(i) $T_S + (x_S)$ og $T_S - (x_S)$ er konvekse kegler,
(ii) $-(x_S - \omega_S) \in T_S^P + (x_S),\ (x_S - \omega_S) \in T_S^P - (x_S)$,
(iii) $T_{P_S(x_S)}(x_S) \subset T_S^P + (x_S) \cap T_S^P - (x_S)$,
(iv) Der findes en koalition S' med $S \subset S'$ $(S' \subset S)$, som kan forbedre x, hvis og kun hvis der er en vektor u med $u_h > 0$, alle h, så at $u - (x_S - \omega_S) \in T_{P_S} + (x_S)$ $((x_S - \omega_S) - u \in T_S^P - (x_S))$.

Det meste af lemmaet (nemlig (ii)-(iv)) fås som ret umiddelbare anvendelser af definitionerne. Del (i) kræver en del notation, men er iøvrigt ligetil; vi udelader beviset.

Vi kan nu vise følgende resultat som nok et korollar til sætning 1:

SÆTNING 5. *Lad* $x = (x_1,...., x_m)$ være en allokering, og lad $\{S_1,..., S_k\}$ være en klassedeling af N med $k \geq \ell + 2$. Antag at ingen generaliseret koalition indeholdt i en forening af $\ell + 1$ mængder fra klassedelingen kan forbedre x, da er x en Walras quasiligevægt i $\mathscr{E}'$.

Bevis: Betragt allokationen $(x_{S_1},..., x_{S_k})$ i en økonomi $\mathscr{E}'$ med k forbrugere, hvor forbruger i har initialbeholdningen ω_{S_i} og har mængden $\{x_i\} + \mathrm{int}T_{S_i}^P - (x_{S_i})$ af foretrukne bundter.

Vi ønsker at vise, at allokeringen er Pareto-optimal. Hvis ikke, gælder der

$$0 \in \text{co}\,((T^{p}_{S_j} - (x_{S_j})^{k}_{j=1}).$$

Af Caratheodory's sætning har vi, at 0 kan skrives som en konveks kombination af punkter fra $\ell + 1$ af disse. Men det betyder igen, at der vil være en mængde indeholdt i foreningsmængden af højest $\ell + 1$ af mængderne $S_1, \ldots, S_k$, som kan forbedre, en modstrid med antagelserne. Vi konkluderer, at $(x_{S_1}, \ldots, x_{S_k})$ er Pareto-optimal.

Lad p være et prissystem, så at $(x_{S_1}, \ldots, x_{S_k}, p)$ er en markeds-quasiligevægt i $\mathscr{E}'$. Ifølge Lemma 3(ii) er $p \cdot (x_{S_i} - \omega_{S_i}) \geq 0$ for alle i. Det følger, at $(x_{S_1}, \ldots, x_{S_k}, p)$ er en Walras-quasiligevægt. □

Resultatet ovenfor skyldes Okuda og Shitovitz (1985) (der dog benytter et lidt andet og mere generelt apparat, ligesom de har $k \geq \ell + 1$ i formuleringen, noget som iøvrigt også kunne vises i vor model). Resultatet er en beskeden udvidelse af tidligere tilsvarende resultater (Schmeidler (1972), Grodal (1972), Vind (1972), og i vor konkrete sammenhæng er det metoden snarere end resultatet, der kan have interesse, her specielt den rolle, som spilles som tangentretninger. Lidt slagordsagtigt går denne metode ud på, at aggregering medfører glathed: Når der er mange agenter, får man glathedsegenskaber, man ikke havde fra starten. Dette er iøvrigt noget, som *ikke* holder, hvis man opfatter glathed som synonymt med differentiabilitet; vi får det fra det udvidede glathedsbegreb hentet fra Clarke.

Litteratur

Anderson, R. 1978. An elementary core equivalence theorem. *Econometrica* 46, 1483-87.

Blad, M. og H. Keiding. 1990. *Microeconomics – institutions, equilibrium and optimality*. Amsterdam.

Clarke, F. H. 1983. *Optimization and nonsmooth analysis*. New York.

Debreu, G. og H. Scarf. 1963. A limit theorem on the core of an economy. *International Economic Review* 4, 235-246.

Gale, D. og A. Mas-Colell. 1975. An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences. *Journal of Mathematical economics* 2, 9-17.

Grodal, B. 1972. A second remark on the core of an atomless economy. *Econometrica* 40, 581-583.

Hildenbrand, W. 1974. Core and equilibria in a large economy. *Amsterdam*.

Hurwicz, L. 1979. On allocations attainable through Nash equilibria, J.-J. Laffont (ed.), *Aggregation and revelation of preferences*. Amsterdam, 397-419.

Keiding, H. og K. Lindeneg. 1988. Fair and implementable allocations. Memo 2/1988, Forskergruppen vedrørende den offentlige sektor og samfundsøkonomien. København.

Okuda, H. og B. Shitovitz. 1985. Core allocations and the dimension of the cone of efficiency price vectors. *Journal of economic Theory* 35, 166-171.

Schmeidler, D. 1972. A remark on the core of an atomless economy. *Econometrica* 40, 579-580.

Schmeidler, D. og K. Vind. 1974. Fair net trades. *Econometrica* 40, 637-642.

Vi ønsker at vise, at allokeringen er Pareto-optimal. Hvis ikke, gælder der

$$0 \in \text{co}\,((T^{p}_{S_j} - (x_{S_j})^{k}_{j=1}).$$

Af Caratheodory's sætning har vi, at 0 kan skrives som en konveks kombination af punkter fra $\ell + 1$ af disse. Men det betyder igen, at der vil være en mængde indeholdt i foreningsmængden af højest $\ell + 1$ af mængderne $S_1, \ldots, S_k$, som kan forbedre, en modstrid med antagelserne. Vi konkluderer, at $(x_{S_1}, \ldots, x_{S_k})$ er Pareto-optimal.

Lad p være et prissystem, så at $(x_{S_1}, \ldots, x_{S_k}, p)$ er en markeds-quasiligevægt i $\mathscr{E}'$. Ifølge Lemma 3(ii) er $p \cdot (x_{S_i} - \omega_{S_i}) \geq 0$ for alle i. Det følger, at $(x_{S_1}, \ldots, x_{S_k}, p)$ er en Walras-quasiligevægt. □

Resultatet ovenfor skyldes Okuda og Shitovitz (1985) (der dog benytter et lidt andet og mere generelt apparat, ligesom de har $k \geq \ell + 1$ i formuleringen, noget som iøvrigt også kunne vises i vor model). Resultatet er en beskeden udvidelse af tidligere tilsvarende resultater (Schmeidler (1972), Grodal (1972), Vind (1972), og i vor konkrete sammenhæng er det metoden snarere end resultatet, der kan have interesse, her specielt den rolle, som spilles som tangentretninger. Lidt slagordsagtigt går denne metode ud på, at aggregering medfører glathed: Når der er mange agenter, får man glathedsegenskaber, man ikke havde fra starten. Dette er iøvrigt noget, som *ikke* holder, hvis man opfatter glathed som synonymt med differentiabilitet; vi får det fra det udvidede glathedsbegreb hentet fra Clarke.

Litteratur

Anderson, R. 1978. An elementary core equivalence theorem. *Econometrica* 46, 1483-87.

Blad, M. og H. Keiding. 1990. *Microeconomics – institutions, equilibrium and optimality.* Amsterdam.

Clarke, F. H. 1983. *Optimization and nonsmooth analysis.* New York.

Debreu, G. og H. Scarf. 1963. A limit theorem on the core of an economy. *International Economic Review* 4, 235-246.

Gale, D. og A. Mas-Colell. 1975. An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences. *Journal of Mathematical economics* 2, 9-17.

Grodal, B. 1972. A second remark on the core of an atomless economy. *Econometrica* 40, 581-583.

Hildenbrand, W. 1974. Core and equilibria in a large economy. *Amsterdam.*

Hurwicz, L. 1979. On allocations attainable through Nash equilibria, J.-J. Laffont (ed.), *Aggregation and revelation of preferences.* Amsterdam, 397-419.

Keiding, H. og K. Lindeneg. 1988. Fair and implementable allocations. Memo 2/1988, Forskergruppen vedrørende den offentlige sektor og samfundsøkonomien. København.

Okuda, H. og B. Shitovitz. 1985. Core allocations and the dimension of the cone of efficiency price vectors. *Journal of economic Theory* 35, 166-171.

Schmeidler, D. 1972. A remark on the core of an atomless economy. *Econometrica* 40, 579-580.

Schmeidler, D. og K. Vind. 1974. Fair net trades. *Econometrica* 40, 637-642.

Schultz, C. og H. J. Jacobsen. 1991. Decreasing unemployment increases welfare. Discussion paper 91-12, Økonomisk Institut, Københavns Universitet.

Shafer, W. og H. Sonnenschein. 1975. Some theorems on the existence of competitive equilibrium. *Journal of Economic Theory* 11, 83-93.

Silvestre, J. 1985. Voluntary and efficient allocations are Walrasian. *Econometrica* 53, 26-58.

Thomson, W. 1979. Comment on: L. Hurwicz, On allocations attainable through Nash-equilibria, I. J.-J. Laffont (ed.), Aggregation and revelation of preferences, 420-431.

Vind, K. 1964. Edgeworth-allocations in an exchange economy with many traders. *International Economic Review 5*, 165-177.

Vind, K. 1972. A third remark on the core of an atomless economy. *Econometrica* 40, 585-586.