

To-parameter porteføljevalgsteori

Henrik Ankjer Jensen
Hafnia Erhvervsbank A/S

SUMMARY: The paper presents a review of the foundation and most important results of the mean-variance capital market theory. The foundation of the theory is the mean-variance model of Markowitz. Sharpe and Lintner completed the theory into an equilibrium theory. The essential characteristics of Sharpe and Lintner's Capital Assets Pricing Model are reviewed together with Black's model. At last in the paper Roll's critique is discussed. Also the KFX portfolio is placed within the context of the mean-variance theory.

1. Indledning

To-parameter porteføljevalgsteorien udgør en konsistent teori under risiko. Teoriens fundamentale forudsætning er, at investorerne kun rangordner på baggrund af to centrale parametre i afkastenes simultane fordelingsfunktion; nemlig forventningsværdien og spredningen på en given porteføljes afkast. Teorien ender i ligevægt op med et lineært udtryk, der angiver sammenhængen mellem det relevante mål for kvantiteten af risiko og det tilhørende forventede afkast (og dermed det pågældende aktivs pris) for de finansielle aktiver. I dette udtryk indgår ikke parametre fra investorerens nyttefunktioner, men udelukkende, i princippet, estimerbare parametre.

To-parameter porteføljevalgsteorien udviser derfor en tilsyneladende operationalitet i forbindelse med en empirisk konfrontation. Det er imidlertid væsentligt at gøre sig klart på hvilke præmisser, en eventuel operationalitet er funderet. I modsat fald vil man kunne drage fejlagtige konklusioner, enten ved at forkaste teoriens udsagn på trods af, at de rent faktisk er sande (type 1 fejl) eller ved at acceptere teoriens udsagn på trods af, at de er falske (type 2 fejl).

I denne artikel skitseres forudsætningerne bag to-parameter porteføljevalgsteorien, samt teoriens væsentligste resultater. Der vil ligeledes blive diskuteret hvor testbar teorien fremstår. I denne sidstnævnte diskussion vil Rolls kritik have en central placering. Sidst i artiklen vil nogle af to-parameter porteføljevalgsteoriens resultater blive anvendt på *KFX* aktivporteføljen, hvor *KFX*-indekset er det indeks, der benyttes som underliggende aktiv i forbindelse med futures- og optionshandel på aktier på Københavns Fondsbørs.

Artiklen er belønnet med Zeuthen-prisen. Jeg ønsker at takke Peter Erling Nielsen, Københavns Universitet, der har bidraget med værdifulde kommentarer, samt Leif Hasager, Handelshøjskolen, København, der har gennemlæst afsnittet vedrørende nytte teorien.

To-parameter porteføljevalgsteori

Henrik Ankjer Jensen
Hafnia Erhvervsbank A/S

SUMMARY: The paper presents a review of the foundation and most important results of the mean-variance capital market theory. The foundation of the theory is the mean-variance model of Markowitz. Sharpe and Lintner completed the theory into an equilibrium theory. The essential characteristics of Sharpe and Lintner's Capital Assets Pricing Model are reviewed together with Black's model. At last in the paper Roll's critique is discussed. Also the KFX portfolio is placed within the context of the mean-variance theory.

1. Indledning

To-parameter porteføljevalgsteorien udgør en konsistent teori under risiko. Teoriens fundamentale forudsætning er, at investorerne kun rangordner på baggrund af to centrale parametre i afkastenes simultane fordelingsfunktion; nemlig forventningsværdien og spredningen på en given porteføljes afkast. Teorien ender i ligevægt op med et lineært udtryk, der angiver sammenhængen mellem det relevante mål for kvantiteten af risiko og det tilhørende forventede afkast (og dermed det pågældende aktivs pris) for de finansielle aktiver. I dette udtryk indgår ikke parametre fra investorerens nyttefunktioner, men udelukkende, i princippet, estimerbare parametre.

To-parameter porteføljevalgsteorien udviser derfor en tilsyneladende operationalitet i forbindelse med en empirisk konfrontation. Det er imidlertid væsentligt at gøre sig klart på hvilke præmisser, en eventuel operationalitet er funderet. I modsat fald vil man kunne drage fejlagtige konklusioner, enten ved at forkaste teoriens udsagn på trods af, at de rent faktisk er sande (type 1 fejl) eller ved at acceptere teoriens udsagn på trods af, at de er falske (type 2 fejl).

I denne artikel skitseres forudsætningerne bag to-parameter porteføljevalgsteorien, samt teoriens væsentligste resultater. Der vil ligeledes blive diskuteret hvor testbar teorien fremstår. I denne sidstnævnte diskussion vil Rolls kritik have en central placering. Sidst i artiklen vil nogle af to-parameter porteføljevalgsteoriens resultater blive anvendt på *KFX* aktivporteføljen, hvor *KFX*-indekset er det indeks, der benyttes som underliggende aktiv i forbindelse med futures- og optionshandel på aktier på Københavns Fondsbørs.

Artiklen er belønnet med Zeuthen-prisen. Jeg ønsker at takke Peter Erling Nielsen, Københavns Universitet, der har bidraget med værdifulde kommentarer, samt Leif Hasager, Handelshøjskolen, København, der har gennemlæst afsnittet vedrørende nytte teorien.

2. To-parameter porteføljevalgspøblem

Markedsdeltagerne på kapitalmarkedet udgøres af k investorer. Disse k investorer møder primo perioden¹ op på kapitalmarkedet med deres initialbeholdninger af finansielle aktiver, deres nyttefunktioner, samt deres forventninger til de finansielle aktivers forventede afkast, og til co- og egenvariansen mellem aktivernes afkast. To-parameter porteføljevalgspøblem opstår således ved, at investorerne ikke forbruger hele deres respektive velfærd i perioden, men ønsker at overføre noget velfærd til de næste perioder. Følgelig vil en given investor placere sin investeringsvelfærd på kapitalmarkedet i en eller anden portefølje bestående af finansielle aktiver. Den (relative) andel det i -te finansielle aktiv, $i = 1, \dots, n$, indgår med i den P -te portefølje benævnes x_{ip} , f.eks. $x_{ip} = 0,02$, og kan passende kaldes det i -te aktives vægt i P . $n \times 1$ vægt-vektoren, X_p , defineres herefter ved

$$X_p = \begin{bmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Det er dog ikke enhver kombination af x_{1p}, \dots, x_{np} der er opnåelig. Mængden af de opnåelige porteføljer for den j -te investor, $j = 1, \dots, k$, udgøres af de porteføljer investoren kan vælge primo perioden. Denne mængde er for en given investor bestemt af investorens forventninger til parameterne i den simultane fordelingsfunktion, E^j og V^j (disse defineres nedenfor), samt investorens investeringsvelfærd. Det vil fremgå nedenfor, at hvis investorerne har homogene forventninger vil mængden af de opnåelige porteføljer være indentisk for alle investorerne (denne observation benyttes nedenfor). Denne mængde vil herefter blive benævnt $\Omega_n^o(\tilde{R}_p)$.² I afsnit 4 vil $\Omega_n^o(\tilde{R}_p)$ blandt andet ved hjælp af et koordinatsystem med spredningen på en given porteføljes afkast ud af 1. akse og det forventede afkast på en given portefølje ud af 2. akse (et $\sigma_p - E_p$ -diagram), blive opdelt i de efficiente og de inefficente porteføljer.

To-parameter porteføljevalgspøblem for en given investor kan herefter opsummeres ved, at investoren maksimerer sin nytte på $\Omega_n^o(\tilde{R}_p)$. Dette er ligeledes illustreret i figur 1.

3. Forudsætningerne bag to-parameter porteføljevalgsteoriens ligevægtsmodeller

Indledning

Der vil i dette afsnit blive skitseret teoriens forudsætninger. Disse kan groft set todeles. Nemlig dels i de forudsætninger der vedrører markedsdeltagenes respektive nyttefunk-

1. I denne artikel behandles kun en-periode to-parameter teorien.

2. Et \sim angiver, at afkastet på den P -te portefølje, \tilde{R}_p , er en stokastisk variabel.

tioner, det vil sige markedsdeltagernes respektive portefølje-”rangordningsredskaber”, og dels i de forudsætninger der karakteriserer rammebetingelserne for det marked, på hvilket markedsdeltagerne agerer³.

Homogene forventninger

Investorerne forudsættes at have homogene forventninger med hensyn til de finansielle aktivers forventede afkast, hvilket kan udtrykkes ved $E^1 = \dots = E^k = E$, hvor E er $n \times 1$ -vektoren indeholdende det forventede afkast på de finansielle aktiver i sine elementer, dvs.

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Ligeledes antages investorerne at have homogene forventninger med hensyn til co- og egenvariansen af aktivernes afkast. Dette kan også udtrykkes ved $V^1 = \dots = V^k = V$, hvor $n \times n$ matricen V indeholder covariansen σ_{il} for $i = 1, \dots, n$ og $l = 1, \dots, n$ i sine elementer, dvs.

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \sigma_{ii} & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Forudsætningen vedrørende homogene forventninger etableres for at sikre, at alle investorer har og oplever samme efficiente rand (den efficiente rand defineres i næste afsnit). På denne måde etableres der tilstrækkelige betingelser for, at vi kan gå fra mikro- til makroniveauet; forstået på den måde, at samtlige k investorerers to-parameter porteføljevalg herefter kan analyseres i (kun) et $\sigma_p - E_p$ -diagram.

Homogene forventninger kan introduceres enten definatorisk ved at forudsætte objektiv risiko, det vil sige ved at forudsætte at investorerne kender fordelingsfunktionerne eksakt, eller ved at postulere, at dette følger af forudsætningen om det perfekte kapitalmarked.

Investorerens nyttefunktioner under risiko

Investorerens nyttefunktioner er defineret på afkastet af en given portefølje, \tilde{R}_p , dvs.

3. Det skal bemærkes, at to-parameter porteføljevalgsteorien ikke indeholder den forudsætning, at kapitalmarkedet er effektivt med hensyn til den betragtede ligevægtssammenhæng. På grund af forudsætningerne der er pålagt kapitalmarkedet og de k investorerers nyttefunktioner fremstår denne forudsætning nemlig som værende redundant.

$$U^j = U^j(\tilde{R}_p), \text{ for } j = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Det forudsættes, at investorerne udviser "grådighed", $\frac{\partial U^j}{\partial R_p} > 0$, for \tilde{R}_p givet for $j = 1, \dots, k$, og risikoaversion, $\frac{\partial^2 U^j}{\partial R_p^2} < 0$, for \tilde{R}_p givet for $j = 1, \dots, k$.

Det ses umiddelbart af (4), at det ikke giver mening at maksimere U^j , som under deterministisk udfald, idet \tilde{R}_p er en stokastisk variabel. I to-parameter porteføljevalgteorien benyttes von Neumann og Morgenstern's forventede nytte kriterium⁴. Dette kan for den j -te investor udtrykkes ved

$$\begin{aligned} \max. \{ E(U^j(\tilde{R}_p)) \} \text{ for } j = 1, \dots, k \\ \text{når } \Omega \in \Omega_n^o(\tilde{R}_p) \end{aligned} \quad (5)$$

Markowitz fremsatte i 1952 sit forventningsværdi-spredning-kriterium, hvilket giver anledning til følgende sætning

S. 1: For $\Omega \in \Omega_n^o(\tilde{R}_p)$ rangordner investorerne *ex. ante* kun på baggrund af E_p og σ_p . Således at a) for en given σ_p foretrækkes den portefølje med den største E_p , og b) for en given E_p foretrækkes den portefølje med den mindste σ_p .

S. 1 implicerer, at kriteriefunktionen i (5) kan omformuleres til

$$E(U^j(\tilde{R}_p)) = \bar{U}^j(E_p, \sigma_p) \text{ for } j = 1, \dots, k, \quad (6)$$

\bar{U}^j benævnes den j -te investors forventningsværdi-spredning-ækvivalente nyttefunktion. Fordelingsfunktionen for stokastiske variable kan beskrives ved en eller flere momenter. At postulere at vore rationelle kapitalmarkedsdeltagere, de k investorer, kun inddrager det første moment og det andet centrale moment i sit porteføljevalg må derfor opfattes som en tilnærmelse af investorenes faktiske adfærd. Således indgår for eksempel skævheden i fordelingen, hvor topstejl henholdsvis topflad fordelingen er, ikke i investorenes porteføljerangordning. Hvis kriteriefunktionen i (5) formuleres explicit fås, under kontinuerligt udfaldsrum,

$$\int_{R_p} U^j(\tilde{R}_p) f(\tilde{R}_p) \partial R_p, \quad (7)$$

hvorfor der må pålægges nogle forudsætninger på $U^j(\tilde{R}_p)$ for $j = 1, \dots, k$ og/eller $f(\tilde{R}_p)$ førend Markowitz' postulat, S.1, er opfyldt. Tobin (1958) giver tilstrækkelige⁵ betingelser

4. Det skal dog understreges, at der i litteraturen findes nogen belæg for, at investorerne afviger systematisk fra von Neumann og Morgensterns forventede nytte kriterium, jævnfør f.eks. Gærdenfors og Sahlin (1988).

for S.1, hvilke kan formuleres ved

S.2 Hvis a) investorerne har kvadratiske ⁶ nyttefunktioner og/eller b) afkastene er multivariat normalfordelt ⁷ vil investorernes nyttefunktioner kunne repræsenteres ved $E_p - \sigma_p$ - ækvivalente nyttefunktioner givet ved (6).

Fama(1965;1971) viser, at den stabile Paretofordeling, introduceret i forbindelse med kapitalmarkedsstudier af Mandelbrot (1963), ligeledes udgør en tilstrækkelig betingelse for, at investorerne har to-parameter-ækvivalente nyttefunktioner. Den stabile Paretofordeling er den eneste fordeling, der er invariant overfor addition. Således vil summen af Paretofordelte stokastiske variable ligeledes være Paretofordelt. Denne fordeling har normalfordelingen som et specialtilfælde; nemlig i det tilfælde hvor variansen er endelig. I alle andre tilfælde eksisterer variansen ikke. I disse tilfælde er risikoparameteren approksimativt givet ved semiinterkvartilen. Fama (1971) ender op med en anden ligevægtssammenhæng end f.eks. Sharpe (1964) og Lintner (1965a, 1965b), omend forskellen er af mere fortolkningsmæssig karakter.

Det perfekte kapitalmarked

De k investorers adfærd vil udfoldes indenfor rammerne af forudsætningen om det perfekte kapitalmarked, hvormed menes:

Alle investorerne har lige og gratis adgang til al relevant information. Der eksisterer ingen transaktionsomkostninger, skatter eller kvantitative restriktioner på kapitalmarkedet. Ligeledes forudsættes, at alle n kapitalmarkedsaktiver er fuldkommen delelige og perfekt handelbare.

Der eksisterer fuldkommen konkurrence på kapitalmarkedet, hvilket vil sige, at investorerne antager, at de frit kan købe og sælge- og tillige short-sælge – til de givne kapitalmarkedspriser, og ingen investor antager, han kan påvirke priserne.

Det skal ligeledes forudsættes, at udbuddet af de n kapitalmarkedsaktiver er givet i perioden, samt at alle aktiverne er defineret i samme valutaenhed.

5. Nedenfor vil det blive fremført, at også den stabile Paretofordeling udgør en tilstrækkelig betingelse for S.1. I litteraturen er der givet både nødvendige og tilstrækkelige betingelser for S.1. Således har Ross (1978) udledt nødvendige og tilstrækkelige betingelser med hensyn til fordelingsfunktionen, og Cass og Stiglitz (1970) har givet nødvendige og tilstrækkelige betingelser med hensyn til investorernes nyttefunktioner.

6. Hvis investorerne har nyttefunktioner beskrevet ved et 3. grads polynomium, vil det normalt være opfyldt, at forventningsværdien, spredningen og skævheden i fordelingen indgår i et relevant risikomål.

7. Tobin (1958) formulerer sig lidt bredere end angivet i S.2. Således fremfører han, at enhver fordelingsfunktion, der er beskrevet med to parametre vil udgøre en tilstrækkelig betingelse for S.1. Imidlertid viser Feldstein (1969), at den logaritmisk transformerede normalfordeling ikke udgør en tilstrækkelig betingelse for S.1.

4. Nogle matematiske betragtninger vedrørende de efficiente porteføljer

Ovenfor blev diskuteret investors kriterium under risiko, to-parameter porteføljevælgsproblemet. I dette afsnit vil vi se på porteføljerne tilhørende mængden $\Omega_n^o(\tilde{R}_p)$, det vil sige de porteføljer, der udgør investorernes valggrundlag. I afsnit 5 vil de matematiske resultater, der fremkommer i dette afsnit, blive placeret i en ligvægtssammenhæng.

$\Omega_n^o(\tilde{R}_p)$ kan opdeles i to komplementære mængder, de efficiente og de inefficente porteføljer, via følgende sætning, først fremsat af Markowitz (1952).

S.3: De $E_p - \sigma_p$ -efficiente porteføljer defineres ved mængden af de opnåelige porteføljer der opfylder betingelserne a) for en given σ_p at have den største E_p og b) for en given E_p at have den mindste σ_p .

Det ses, at strukturen i S.3 er analog med den i S.1 – hvor S.1 beskæftiger sig med investorernes præferencer under risiko, beskæftiger S.3 sig med hvad der rent faktisk er muligt at vælge, når investorerne gør deres respektive valg under risiko. De efficiente porteføljer opfyldende S.3 udgør mængden $\Omega_p^e(\tilde{R}_p)$, omvendt er de porteføljer der ikke er efficiente inefficente. Ved i første omgang at betragte minimum varians porteføljerne, dvs. porteføljerne opfyldende S.3 b), fås følgende programmeringsproblem⁸

$$\begin{aligned} \min. \quad & \{X_p^t V X_p\} \\ \text{når} \quad & X_p^t E = E_p \\ \text{og} \quad & X_p^t I = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Løsningen til (8) er givet ved det entydige minimumspunkt X_p , givet ved

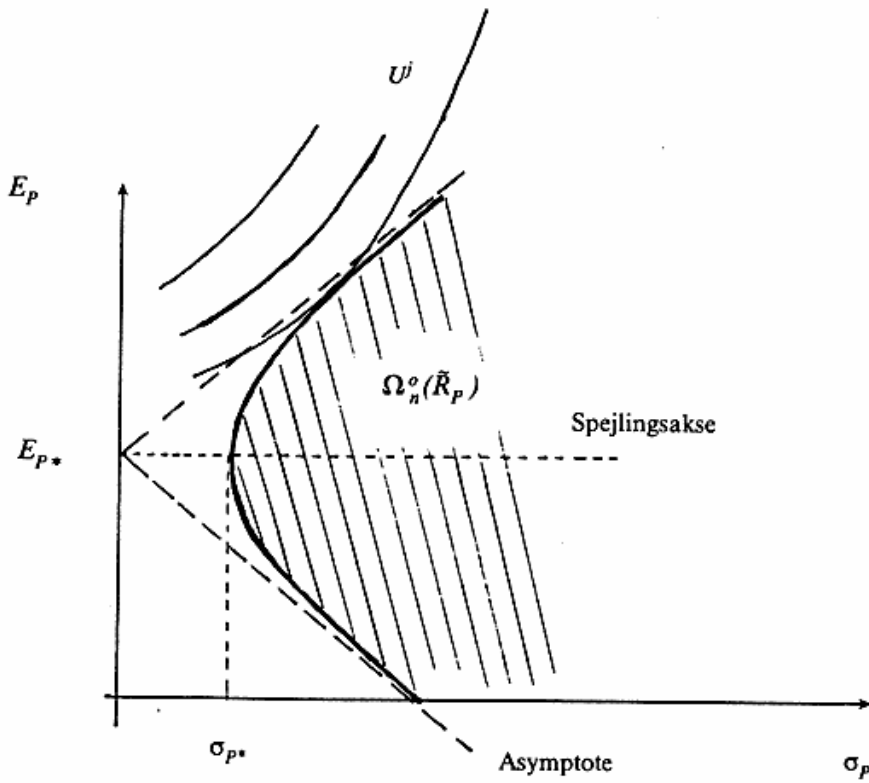
$$X_p = V^{-1}(EI)A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ E_p \end{bmatrix}, \quad (9)$$

hvor $A = (EI) V^{-1}(EI)$.⁹

Merton (1972) udleder E_p som en explicit funktion af σ_p . Merton viser, at der eksisterer et globalt minimumspunkt for denne funktion ((σ_{p^*}, E_{p^*}) i figur 1). Ligeledes er funktionen symmetrisk omkring E_{p^*} , samt begrænset af to asymptoter. Det ses af figuren, at de efficiente porteføljer simpelt kan identificeres, som de minimum varians porteføljer, hvor det er opfyldt, at $E_p > E_{p^*}$. Da det omvendt er opfyldt, at de porteføljer der ikke er efficiente er inefficente, kan todelingen introduceret via S.3 indentificeres i figur 1. Porteføljer der er orthogonale, dvs. ukorreleerede, med P benævnes Z_p . Vægtene til Z_p opfylder følgende ligning

8. Et t-toptegn angiver, at den pågældende vektor er transponeret.

9. En udledning er givet i Jensen (1990).



Figur 1. Minimum varians porteføljerne, under forudsætning af kun positive varians aktiver.

$$X_p^T V X_{z_p} = 0. \quad (10)$$

Det kan simpelt vises, at for enhver minimum varians portefølje, P , vil det nødvendigvis samtidig være opfyldt, at $E_p \geq E_{p^*}$ og $E_{z_p} \leq E_{p^*}$. Nedenfor diskuteres kun det tilfælde hvor referenceporteføljen, P , er efficient, dvs. hvor $E_p > E_{p^*}$ og $E_{z_p} < E_{p^*}$.

Beta for det enkelte aktiv i den P -te portefølje defineres ved

$$\beta_{iP} = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_p^2}. \quad (11)$$

Tilsvarende defineres den P -te porteføljes $n \times 1$ β -vektor ved

$$\beta_p = \frac{V X_p}{\sigma_p^2} = (E I) A^{-1} \begin{bmatrix} E_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ved omrokering fås

$$E = E_{z_P} I + (E_P - E_{z_P}) \beta_P \quad (13)$$

Det enkelte element i E kan specificeres ud ved

$$E_i = E_{z_P} + (E_P - E_{z_P}) \beta_{iP}, \text{ for } i = 1, \dots, n. \quad (13a)$$

På baggrund af udledningen fra (8) til (13a) kan det konkluderes

S.4: Hvis og kun hvis P er efficient vil E_i være en lineær funktion af β_{iP} givet ved (13a), for $i = 1, \dots, n$ ¹⁰

S.4 udgør, som det vil blive fremført nedenfor, grundpillen i Roll's kritik. I tråd med Roll (1977) kan vi konkludere, at den lineære sammenhæng (13a) udelukkende er en matematisk sammenhæng. Således vil det for et vilkårligt n , f.eks. $n = 5, 17$ eller 1000 aktiver, være muligt, at ende op med den lineære sammenhæng (13a). Dette, fremfører Roll (1977), må implicere, at vi må være meget på vagt ved tests af to-parameter ligevægtsmodellernes lineær struktur, idet der for ethvert n (dvs. for ethvert testmateriale) vil kunne identificeres en lineær struktur - uafhængigt af om den pågældende to-parameter ligevægtsmodel er sand eller ej. Det er netop de to "oprindelige" to-parameter ligevægtsmodeller, nemlig Sharpe-Lintner - og Black-modellen, der er emnet i næste afsnit.

5. To-parameter porteføljevalgsligevægtsmodeller

Fra (13a) til en ligevægtssammenhæng er der imidlertid ikke langt. Det skal blot vises, at summen af de k investorers respektive efficiente porteføljer (dvs. markedsporteføljen) er efficient, hvorefter (13a) vil udgøre den relevante ligevægtssammenhæng. Lidt anderledes udtrykt skal det vises, at summen af efficiente porteføljer ligeledes er efficient. Til dette formål skal følgende sætning fremføres

*S.5: Enhver minimum varians portefølje kan fås som en lineær kombination af to andre vilkårligt valgt minimum varians porteføljer med forskellige forventede afkast.*¹¹

Det er herefter ligetil at vise, at når den j -te investors, $j = 1, \dots, k$, efficiente portefølje er en lineær kombination af de samme to minimum varians porteføljer, vil markedsporteføljen ligeledes være en lineær kombination af disse to porteføljer og efficient. Følgelig vil (13a) give ligevægtssammenhængen på kapitalmarkedet for $P = M$. Ligevægtssammenhængen i Blacks model er herefter givet ved

10. Selvom sætningen har ligget implicit i to-parameter porteføljevalgsteorien, skal den krediteres Fama (1976), Roll (1977) og Ross (1977).

11. Sætningen findes i Roll (1977).

$$E_i = E_{z_M} + (E_M - E_{z_M}) \beta_{iM}, \text{ for } i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Z_M benævner Black (1972) nul-beta (eng. zero-beta) porteføljer, hvoraf kun en af disse er en minimum varians portefølje. Blacks model benævnes også to-faktor modellen på grund af de to orthogonale faktorer \tilde{R}_{Z_M} og \tilde{R}_M . (14) kaldes også kapitalmarkedslinien eller Security Market Line (SML) i Blacks model. Som det ses indgår parametre fra de k investorers nyttefunktioner ikke i ligevægtsudtrykket (14). Således indgår der kun (i princippet) estimerbare parametre. Dette resultat er udtryk for separation i to-parameter porteføljevalgsteorien. Separation kan henføres til en trindeling i investorenes porteføljevalg. Denne trindeling kan illustreres ved omskrivning af (5) – thi enhver rationel investor vil i sit porteføljevalg kun vælge blandt porteføljer tilhørende mængden $\Omega_n^e(\tilde{R}_p)$. (5) kan herefter omformuleres til

$$\begin{aligned} & \max. \{ \bar{U}^j(E_p, \sigma_p) \}, \text{ for } j = 1, \dots, k. \\ & \text{når } \Omega \in \Omega_n^e(\tilde{R}_p) \end{aligned} \quad (15)$$

To mutual fund¹² separation opstår når investorerne er indifferente mellem at vælge blandt de n oprindelige aktiver og de betragtede to mutual funds μ_1 og μ_2 , idet disse to udspænder $\Omega_n^e(\tilde{R}_p)$. Ved hjælp af S.5 er det simpelt at vise, at der eksisterer to mutual fund separation. Trindelingen i (15) eksisterer således ved, at investorerne først a) vælger to mutual funds der udspænder $\Omega_n^e(\tilde{R}_p)$ og dernæst b) foretager deres respektive porteføljevalg. Det er opfyldt, at a) er uafhængig af b), mens det modsatte ikke er tilfældet.

Det ses af (14), at egenvariansen for det pågældende aktiv ikke indgår i det resulterende ligevægtsudtryk. Derimod prisfastsættes det i -te aktiv ud fra dets covariation med den relevante referenceportefølje, nemlig markedsporteføljen; dvs. aktiverne prisfastsættes ud fra deres respektive bidrag til kapitalmarkedets totale risiko, nemlig risikoen i markedsporteføljen. Sharpe (1964) og Lintner (1965a; 1965b) er de første der ender op med en ligevægtssammenhæng analogt til (14). De kan således siges at afslutte den neoklasiske analyse under risiko. Sharpe og Lintners modelforudsætninger er identiske med Blacks – med den ene forskel, at der i førstnævnte model desuden eksisterer et risikofrit aktiv, f , der frit kan sælges short. Alternativt kan dette risikofrie aktiv fortolkes som pengeinstitut ind- henholdsvis udlån. Denne rente, r_f , er exogent givet på mikroniveauet og endogent bestemt på makroniveauet, som den rente der clearer "lånemarkedet". Det skal dog nævnes, at Sharpe (1964) udleder sin ligevægtssammenhæng, på elegant vis, uden en forudsætning om at de positive varians aktiver kan sælges short (dog kan der frit ind- henholdsvis udlånes). I Sharpe-Lintner-modellen er de to mutual funds

12. En mutual fund kan opfattes som en portefølje bestående af porteføljer.

naturligt givet ved f og M , hvor markedsporteføljen kun indeholder positive varians aktiver. I denne model kan der etableres følgende separation/trindeling af investorenes investeringsovervejelser.

S.6.1) Først foretager en given investor sit optimale porteføljevalg blandt kun positive varians aktiver, 2) dernæst vælges den portefølje bestående af M og f , der er optimal i henhold til hans præferencer. Det er opfyldt, at 1) er uafhængig af 2), mens det modsatte ikke er tilfældet.

S.6 kan henføres til Tobin (1958). Markedsporteføljen i Sharpe-Lintner-modellen vil ligeledes være efficient, hvorfor der i M vil eksistere en lineær struktur givet ved (13a) med $P = M$ og $E_{Z_P} = r_f$. SML i Sharpe-Lintner-modellen er herefter givet ved

$$E_i = r_f + (E_M - r_f) \beta_{iM}, \text{ for } i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Sharpe-Lintner-modellen kaldes også Capital Asset Pricing Model (CAPM). Modellen blev, fra teoretisk side af, kritiseret for sin forudsætning vedrørende den risikofrie rente, fordi denne forudsætning kan siges at være inkonsistent med en forudsætning vedrørende det effektive lånemarked - thi på et sådant marked vil pengeinstitutterne ved en høj lånefinansiering kræve en risikopræmie, hvilket de ikke får i Sharpe-Lintner-modellen. Ligeledes kan forudsætningen om eksistensen af en risikofri rente være vanskelig at opretholde ved tilstedeværelsen af stokastisk inflation. Derudover har investorerne i Sharpe-Lintner-modellen enten alle n aktiver eller kun f i deres respektive porteføljer, hvilket empirien ikke synes at understøtte.

Ved sammenligning af (14) og (16) ses det, at eneste forskel er, at skæringen for $\beta_{iM} = 0$, og dermed r_f og \tilde{R}_{Z_M} , kan fortolkes forskelligt. Det kan derfor konkluderes, at validiteten af den lineære sammenhæng (14) henholdsvis (16) impliceres af, at investorerne agerer konsistent med, at markedsporteføljen er efficient. Og omvendt kan den identificerede forskel henføres til den forskellige specifikation af markedsporteføljen.

I velfærdsteoretisk lys skal det bemærkes, at etableringen af et kapitalmarked, således (i hvert fald i to-parameter porteføljevalgsteorien) implicerer en risiko-pooling, hvorfor økonomiens totale risiko mindskes. Dermed skulle der være en god mulighed for at opnå en velfærdsgevinst.

Inden Sharpes systematiske risiko teorem diskuteres, skal det sluttelig fremføres, at der således *eksisterer* en ligevægt (et sæt af ligevægtspriser), samt at denne ligevægt er *entydig*. Det er desuden opfyldt, at denne ligevægt er *stabil*. Hvis således det i -te aktiv giver et forventet afkast E'_i , hvor $E'_i > E_i$ og E_i er det forventede ligevægtsafkast for det i -te aktiv, vil dette aktiv være billigt i forhold til dets risiko, hvorfor øget efterspørgsel efter aktivitet vil øge prisen og dermed mindske det forventede afkast, indtil det forventede afkast opfylder (14). Omvendt for overvurderede aktiver. Ved eksogene chocks, som ændringer

i investorenes (homogene) forventninger, vil kapitalmarkedet finde sin nye ligevægt givet ved (14). Imidlertid ligger der i to-parameter porteføljevælgsteorien intet om den hastighed hvormed kapitalmarkedet vil indfinde sig i ny ligevægt. A priori må det dog forventes, at tilpasningshastigheden på de finansielle markeder er meget hurtig i forhold til på de reale markeder.

6. Sharpes systematiske risiko teorem

I Sharpe (1964) fremsættes det systematiske risiko teorem. Selv om teoremet består, er det imidlertid først i begyndelsen af 1970'erne det er blevet alment accepteret. Dette skyldes, at Sharpe (1964) indeholder en enkelt modstrid. Sharpe introducerer markedsmodellen

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + b_i \tilde{R}_M + \tilde{\varepsilon}_i, \quad \text{for } i = 1, \dots, n; \text{ hvor} \quad (17)$$

$$\text{cov}(\tilde{R}_M, \tilde{\varepsilon}_i) = 0, \text{ dvs. } \tilde{R}_M \text{ og } \tilde{\varepsilon}_i \text{ er orthogonale, og} \quad (18)$$

$$E(\tilde{R}_i | R_M) = \alpha_i + b_i R_M. \quad (19)$$

Markedsmodellen beskriver \tilde{R}_i i to orthogonale argumenter. Nemlig dels ved det systematiske element $\alpha_i + b_i \tilde{R}_M$, der afhænger af markedsporteføljens udvikling, og dels ved det usystematiske element $\tilde{\varepsilon}_i$. Sharpes systematiske risiko teorem kan formuleres som følger:

S.7: Antag Sharpe-Lintner- (eller Black-) modellen angiver ligevægtssammenhængen mellem aktivernes forventede afkast (og priser) og relevante risikomål β_{iM} , $i = 1, \dots, n$, på kapitalmarkedet. Definer dernæst de n aktiver ved markedsmodellen (17)-(19). Det vil herefter være opfyldt

$$E_i = r_f + (E_M - r_f) b_i, \text{ for } i = 1, \dots, n. \\ (\text{Og i Blacks model } E_i = E_{Z_M} + (E_M + E_{Z_M}) b_i, \text{ for } i = 1, \dots, n).$$

Fortolkningsbidraget i S.7 ligger i, at det i ligevægt kun er den systematiske risiko, b_i , der er det relevante risikomål. De usystematiske risici "netter" ud/diversificeres bort i markedsporteføljen. En anden indfaldsvinkel i fortolkningen af S.7 fås ved at tage variansen på \tilde{R}_i i markedsmodellen. Der fås (idet $\text{cov}(\tilde{R}_M, \tilde{\varepsilon}_i) = 0$)

$$\sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_M^2 + \text{var}(\tilde{\varepsilon}_i) \quad (20)$$

hvilket også kan skrives som

$$100(\%) = \left(\frac{b_i^2 \sigma_M^2}{\sigma_i^2} + \frac{\text{var}(\xi_i)}{\sigma_i^2} \right) \times 100(\%), \quad (21)$$

hvor det, som sagt, haves, at variansen af \tilde{R}_i kan opdeles i den procentandel, der kan henføres til den generelle markedsudvikling, og den procentandel der er aktivspecifik. Selv om det sidstnævnte argument kan udgøre en større eller mindre procentandel af det enkelte aktivs varians, er det imidlertid kun den andel der er systematisk, dvs. ikke kan diversificeres (yderligere) væk i markedsporteføljen, der er relevant i ligevægt.

7. Rolls kritik

Rolls kritik er fremsat i Roll (1977; 1978; 1980)¹³, hvoraf Roll (1977) er væsentligst. Rolls kritik er i første omgang rettet imod datidens empiriske tests af to-parameter teorien. Da imidlertid konstruktionen af empiriske tests af to-parameter teorien og de af testets resultater dragne konklusioner også må opfattes som empirikerens fortolkning af to-parameter teorien, fremstår Rolls kritik derfor også som en meget explicit fortolkning af to-parameter teorien. Ligeledes kan Rolls kritik også læses som en radikal fortolkning af de inefficente portefølgers matematik – en fortolkning der i flere tilfælde følges op af en explicit matematisk udledning (før Roll var to-parameter teorien i høj grad baseret på de efficiente portefølgers matematik). Rolls kritik af datidens empiriske tests var så markant, at to-parameter teoriudviklingen efter Roll i høj grad drejes over mod den empirisk orienterede to-parameter teori. Denne teoriudvikling har således i høj grad taget fat på de løse ender, der eksisterer i særligt Roll (1977), for at undersøge hvor robust Rolls kritik er.

Grundpillen i Rolls kritik er S.4, fortolket indenfor to-parameter porteføljevalgs ligevægtsteoriens rammer, dvs. at der eksisterer et »hvis og kun hvis« mellem den lineære SML-sammenhæng og at markedsporteføljen er efficient. Roll konkluderer på baggrund af denne observation, at eneste korrekte test af Blacks (og Sharpe-Lintners) model er et test af, om markedsporteføljen er efficient. De øvrige nulhypoteser der kan udledes af modellen er udelukkende implikationer af denne biimplikation. Roll konkluderer heraf, at identifikationen af markedsporteføljen bliver *den* overordnede problematik i forbindelse med konstruktionen af tests af Blacks (og Sharpe-Lintners) model. Roll konkluderer endvidere, at Blacks (eller Sharpe-Lintners) model vil blive *forkastet*, hvis enten markedsporteføljen ikke er efficient, dvs. hvis Blacks (eller Sharpe-Lintners) model ikke er korrekt, eller hvis der benyttes en inefficent proxy for markedsporteføljen. Roll

13. Roll har desuden diskuteret økonometriske problematikker i forbindelse med tests af to-parameter teorien. Disse bidrag er desværre ikke publiceret.

underbygger det sidste udsagn med en konkret udregning af korrelationskoefficienten mellem den valgte proxy for markedsporteføljen i det empiriske arbejde foretaget af Black, Jensen og Scholes (1972), og Sharpe-Lintner tangentporteføljen i deres datamateriale. Denne udregnes til 0,9. Da der i Black, Jensen og Scholes (1972) foretoges en accept af Blacks model og omvendt en forkastelse af Sharpe-Lintner-modellen, tager Roll denne høje korrelationskoefficient som et generelt bevis for, at to alternative proxy for markedsporteføljen udmærket kan have høj korrelation og samtidig give forskellig inference – eller formuleret lidt anderledes: »even a small mis-specifikation of the proxy's composition can lead to wrong conclusion« (Roll 1977).

Omvendt vil Blacks (eller Sharpe-Lintners) model blive *accepteret*, hvis der benyttes en efficient proxy for markedsporteføljen. Dette uanset den sande markedsportefølje er efficient eller ej. Roll fremfører, at der a priori må antages, at være stor sandsynlighed for sidstnævnte type fejl – thi i ethvert datamateriale vil Black- (eller Sharpe-Lintner-) modellens matematiske struktur altid kunne identificeres, hvis blot den valgte proxy er (tilstrækkelig) efficient, dvs. ligger tilstrækkelig tæt på den efficiente rand i figur 1.

Et radikalt element ved Rolls kritik er, at han »projekterer« de matematiske sammenhænge, der vil være opfyldt for ex. ante afkastene over på et givet (ex. post) datamateriale. Roll fremfører således, hvis der vælges et ex. post efficient index som proxy for markedsporteføljen, vil aktiverne alle være givet ved en eksakt lineær sammenhæng i et $\hat{E}_i - \hat{\beta}_i e$ - diagram, hvor $\hat{\cdot}$ indikerer, der er tale om realiserede data og I^e er det valgte index (e -toptegnet indikerer I er efficient). Dette vil selv sagt være opfyldt for ethvert referenceindex langs den ex post efficiente rand. Hvis der tillige vælges et ex post efficient index der ligger "længere ude" af den ex post efficiente rand end Sharpe-Lintner-tangentporteføljen, vil denne model blive forkastet. Da den generelle holdning før Roll (1977) var, at Black-modellen var i god overensstemmelse med data, mens Sharpe-Lintner-modellen ikke syntes at være dette, konkluderer Roll (1977): "... This was a critical oversight, for it led to a professional consensus that the Sharpe-Lintner theory was false. It seems probable (at least to me) that such an opinion would have been held less widely if the market index' composition had been correctly perceived as *the* critical variable in understanding the tests results; that is, if we had realized that a readjustment of the market portfolio' proportions might have reconciled the test results as well to Sharpe's and Lintner's theory as to Black's" (Rolls fremhævelse).

Roll benytter ligeledes de ovenfor gennemgåede ræsonnementer i forbindelse med en kritisk gennemgang af den portefølje performance måling der benytter netop SML som rangordnings redskab¹⁴. I dette tilfælde bedømmes porteføljer liggende over SML som "vinderporteføljer", og omvendt porteføljer liggende under SML som "taberporteføl-

14. Dette performancemål kaldes også Jensens performancemål efter Jensen (1969).

jer". Det vil, som sagt, være opfyldt, hvis den valgte referenceportefølje er efficient, at den lineære SML sammenhæng er givet eksakt for de aktiver og, såvel in- som efficiente, porteføljer. Eller formuleret lidt anderledes, "If the index is ex. ante mean/variance efficient, the [SML] will be unable to discriminate between winners and losers [porteføljer]"¹⁵. Omvendt må det være opfyldt "if the index is not ex. ante efficient, the [SML] criterion will designate winners and losers..."¹⁶. I Roll (1978), Dybvig og Ross (1985) og Green (1986) er udtømmende beskrevet, hvad en vilkårlig placering af referenceporteføljen i $\Omega_n^o(\tilde{R}_p)$ implicerer for vilkårligt valgte aktiver og porteføljers placering i forhold til SML.

8. KFX og to-parameterteorien

Den aktive *KFX*-portefølje består af 25 toneangivende danske aktier noteret på Københavns Fondsbørs. Denne portefølje danner baggrund for udregningen af *KFX*-indekset. Dette kursindeks udgør herefter det underliggende instrument i forbindelse med futures- og optionshandel på aktier på Københavns Fondsbørs. Ved etablering af et futuresmarked på *KFX*-indekset er der ligeledes født en legitim referenceportefølje til brug ved performance-måling. Empiri af Bentzen (1985) med danske aktiedata viser, at β for forskellige porteføljer med totalindekset som referenceportefølje ikke ligger på en ret linie i et β -afkast-diagram. Dette tyder således på, at totalindekset ikke har været efficient (det har i hvert fald ikke været ex post efficient), hvorfor den aktive *KFX* portefølje endnu mindre sandsynligt kan være efficient. Ved SML performance-måling af forskellige porteføljer med den aktive *KFX* portefølje som referenceportefølje vil der derfor med stor sandsynlighed kunne identificeres vinder- og taberporteføljer. Denne inddeling er imidlertid tilfældig. Således viser Roll (1978), at der eksisterer en anden inefficent referenceportefølje, der vil give præcis den modsatte rangordning, dvs. at vinderporteføljerne bliver taberporteføljer og omvendt.

Et fremført argument for benyttelsen af *KFX*-futures er, at det vha. dette instrument er muligt at foretage "stock"-picking. Argumentet herfor lyder, at man skal sælge *KFX*-futures (dvs. sælge en proxy for den generelle markedsudvikling) og samtidig købe et af de selskaber der indgår i *KFX* indekset (dvs. købe et aktiv, hvis kursudvikling afhænger af dels den del der skyldes den generelle markedsudvikling og dels den del der er selskabsspecifik, som det fremgik af markedsmodellen). Herefter vil man opsamle den selskabsspecifikke risiko, og eliminere den risiko der generelt kan henføres til markedet. Dette argument er imidlertid ukorrekt. Argumentet herfor følger simpelt ved brug af Sharpes systematiske risiko teorem, idet den aktive *KFX*-portefølje er en ukorrekt proxy

15. Roll (1978).

16. Ibid.

for markedsporteføljen, da sidstnævnte jo indeholder et bredt udsnit af finansielle (og sandsynligvis reale) aktiver. I tråd med dette resultat kan det konstateres, at summen af betaerne i *KFX* aktivporteføljen er lig med 1, $\sum_{KFX} \beta_{KFX} = 1$, dvs. at betaerne i den aktive *KFX* portefølje summer op til den totale risiko på den aktive *KFX* portefølje. Imidlertid er variansen på den aktive *KFX*-portefølje et for omfattende risikomål i ligevægt, idet noget af denne diversificeres væk i ligevægt. Således siger betaerne i den aktive *KFX* portefølje intet om hvor risikofyldt den enkelte aktie er (i forhold til dens pris).

9. En status over de empiriske resultater¹⁷

Etableringen af Center of Research in Security Prices (CRSP) filen i midten af 1960'erne, der indeholdt New York Stock Exchange-data, medførte, at empirikerne havde data at arbejde med. Empirikerne før Roll (1977) undervurderede imidlertid markedsporteføljens centrale placering ved tests af to-parameter ligevægtsmodeller. Empirikere efter Roll (1977) har været mere fokuserende på efficiensproblematikker. Empiri af Kandel og Stambaugh (1987) viser, at det værdivejede indeks for et givet datamateriale, generelt set ikke er efficient. Jobson og Korkie (1982) kan omvendt ikke forkaste Blacks model. Ligeledes finder Stambaugh (1982), at forskellige indeks som proxy for markedsporteføljen giver stort set samme inferens. Således er de empiriske resultater indenfor to-parameter teorien ikke entydige. På tværs af denne ad hoc empiri, er den empiri og empirisk teori, der beskæftiger sig med alternative teststørrelses styrkemæssige egenskaber, selv sagt, centralt placeret.

10. Konklusion

I denne artikel er skitseret forudsætningerne bag to-parameter porteføljevalgsteorien og dens væsentligste resultater. Teoriens resultater er intuitivt appellerende. Således er det opfyldt, at investorerne ikke kan få "i både pose og i sæk", men må vælge. Følgelig må den pågældende investor vælge *enten* en portefølje der har et stort forventet afkast og en stor spredning (risiko) *eller* en portefølje der har et mindre forventet afkast og en mindre spredning (risiko). Dette Markowitz'ske udsagn reducerer således von Neumann og Morgensterns forventede nytte kriterium, til at investorerne kun inddrager disse to centrale/repræsentative parametre i deres porteføljevalg, på bekostning af hele fordelingsfunktionen. I afsnit 5 blev de "oprindelige" to-parameter ligevægtsmodeller udledt, og det blev konstateret at det relevante risikobegreb i ligevægt er beta. Roll foretager en meget explicit fortolkning af to-parameter porteføljevalgsteorien. Dette gør Roll i stand

17. I Jensen (1990) er der foretaget en mere systematisk gennemgang af de empiriske resultater både før og efter Roll (1977). Ligeledes er der foretaget en diskussion af de observerede systematiske afvigelser fra de to "oprindelige" ligevægtsmodeller.

til at kritisere datidens empiriske arbejder. Samtidig er Rolls kritik så markant, at to-parameter teoriudviklingen efter Roll i høj grad drejes over mod den empirisk orienterede to-parameter teori. Den empiriske tests har ikke på overbevisende måde accepteret to-parameter ligevægtsmodellerne. Formuleret i en positiv tone kan man så omvendt sige, at de empiriske tests på den anden side ikke har forkastet disse ligevægtsmodeller.

Litteratur

- Bentzen, E. 1985. Diversifikation på det danske aktiemarked. *Finans/Invest*, pp. 32-34.
- Black, F. 1972. Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. *Journal of Business* 45: 444-454.
- Black, F., Jensen, M.C. og Sholes M. 1972. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. Optrykt i Jensen, M.C. (ed.) *Studies in the Theory of Capital Markets*, New York.
- Cass, D. og Stiglitz, J. 1970. The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds. *Journal of Economic Theory*. 2: 122-160.
- Dybvig, P.H. og Ross, S.A. 1985. The Analytics of Performance Measurement Using a Security Market Line. *Journal of Finance*: 401-416.
- Fama, E.F. 1965. Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market. *Management Science*. 11: 404-419.
- Fama, E.F. Return and Equilibrium. *Journal of Political Economy*. 79: 30-55.
- Fama, E.F. 1976. *Foundations of Finance*. Oxford.
- Feldstein, M.S. 1969. Liquidity Preference and Portfolio Selection. *Review of Economic Studies*. 36: 5-12.
- Green, R.C. 1986. Benchmark Portfolio Inefficiency and Deviations from the Security Market Line. *Journal of Finance*, pp. 295-312.
- Gårdenfors, P. og Sahlin N.-E. 1988. *Decision, Probability and Utility*. Cambridge.
- Jensen, Henrik Ankjer. 1990. *To-parameter porteføljevalgsteori*. Afhandling afleveret til Økonomisk Institut, Københavns Universitet.
- Jensen, M.C. 1969. Risk, the Pricing of Capital Assets, and the Evaluation of Investment Portfolios. *Journal of Business*, 42.
- Lintner, J. 1965a. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*. 47: 13-37.
- Lintner, J. 1965b. Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. *Journal of Finance*. 20: 587-616.
- Mandelbrot, B. 1963. The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Finance*.
- Markowitz, H. 1952. Portfolio Selection. *Journal of finance*. 7: 77-91.
- Markowitz, H. 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York.
- Merton, R.C. 1972. An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 7: 1851-1872.
- Mossin, J. 1966. Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*. 34: 768-783.
- Roll, R. 1977. A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests; Part I: On Past and Potential Testability of the Theory. *Journal of Financial Economics*. 4: 129-176.
- Roll, R. 1978. Ambiguity when Performance is Measured by Securities Market Line. *Journal of Finance*. 33: 1051-1067.
- Roll, R. 1980. Orthogonal Portfolios. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 15: 1005-1023.
- Ross, S.A. 1977. The Capital Asset Pricing Model (CAPM), Short-sale Restrictions and Related Issues. *Journal of Finance*. 32: 177-184.
- Ross, S.A. 1978. Mutual Fund Separation in Financial Theory - The Separating Distributions. *Journal of Economic Theory*. 17: 254-286.
- Sharpe, W.F. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*. 19: 425-442.
- Tobin, J. 1958. Liquidity Preference as Behavior Toward Risk. *Review of Economic Studies*. 25: 65-86.

til at kritisere datidens empiriske arbejder. Samtidig er Rolls kritik så markant, at to-parameter teoriudviklingen efter Roll i høj grad drejes over mod den empirisk orienterede to-parameter teori. Den empiriske tests har ikke på overbevisende måde accepteret to-parameter ligevægtsmodellerne. Formuleret i en positiv tone kan man så omvendt sige, at de empiriske tests på den anden side ikke har forkastet disse ligevægtsmodeller.

Litteratur

- Bentzen, E. 1985. Diversifikation på det danske aktiemarked. *Finans/Invest*, pp. 32-34.
- Black, F. 1972. Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. *Journal of Business* 45: 444-454.
- Black, F., Jensen, M.C. og Sholes M. 1972. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. Optrykt i Jensen, M.C. (ed.) *Studies in the Theory of Capital Markets*, New York.
- Cass, D. og Stiglitz, J. 1970. The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds. *Journal of Economic Theory*. 2: 122-160.
- Dybvig, P.H. og Ross, S.A. 1985. The Analytics of Performance Measurement Using a Security Market Line. *Journal of Finance*: 401-416.
- Fama, E.F. 1965. Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market. *Management Science*. 11: 404-419.
- Fama, E.F. Return and Equilibrium. *Journal of Political Economy*. 79: 30-55.
- Fama, E.F. 1976. *Foundations of Finance*. Oxford.
- Feldstein, M.S. 1969. Liquidity Preference and Portfolio Selection. *Review of Economic Studies*. 36: 5-12.
- Green, R.C. 1986. Benchmark Portfolio Inefficiency and Deviations from the Security Market Line. *Journal of Finance*, pp. 295-312.
- Gårdenfors, P. og Sahlin N.-E. 1988. *Decision, Probability and Utility*. Cambridge.
- Jensen, Henrik Ankjer. 1990. *To-parameter porteføljevalgsteori*. Afhandling afleveret til Økonomisk Institut, Københavns Universitet.
- Jensen, M.C. 1969. Risk, the Pricing of Capital Assets, and the Evaluation of Investment Portfolios. *Journal of Business*, 42.
- Lintner, J. 1965a. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*. 47: 13-37.
- Lintner, J. 1965b. Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. *Journal of Finance*. 20: 587-616.
- Mandelbrot, B. 1963. The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Finance*.
- Markowitz, H. 1952. Portfolio Selection. *Journal of finance*. 7: 77-91.
- Markowitz, H. 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York.
- Merton, R.C. 1972. An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 7: 1851-1872.
- Mossin, J. 1966. Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*. 34: 768-783.
- Roll, R. 1977. A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests; Part I: On Past and Potential Testability of the Theory. *Journal of Financial Economics*. 4: 129-176.
- Roll, R. 1978. Ambiguity when Performance is Measured by Securities Market Line. *Journal of Finance*. 33: 1051-1067.
- Roll, R. 1980. Orthogonal Portfolios. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 15: 1005-1023.
- Ross, S.A. 1977. The Capital Asset Pricing Model (CAPM), Short-sale Restrictions and Related Issues. *Journal of Finance*. 32: 177-184.
- Ross, S.A. 1978. Mutual Fund Separation in Financial Theory - The Separating Distributions. *Journal of Economic Theory*. 17: 254-286.
- Sharpe, W.F. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*. 19: 425-442.
- Tobin, J. 1958. Liquidity Preference as Behavior Toward Risk. *Review of Economic Studies*. 25: 65-86.