

Rentestruktur og implicitte forward-renter

Leif Hasager og Michael Møller

Institut for Finansiering, Handelshøjskolen i København

SUMMARY: Traditional analyses of the future return on bonds have focused on the term structure of interest rates. Even though this contains the relevant information, it does so in a very obscure fashion. Calculations of the forward rates of return implicit in the term structure of interest rate yield the required information. This article demonstrates that in general there is no simple relation between the term structure of interest rates and the implicit forward interest rates. The paper considers mainly two types of bonds, namely discount bonds and annuities.

1. Indledning

Formålet med denne artikel er at tilvejebringe et bedre beslutningsgrundlag for investorer med hensyn til valg mellem obligationer med forskellig restløbetid, afdragsprofil og nominel rente. Vægten lægges på investorer, der beskattes både af rente og kursgevinst (eller ikke beskattes), men det anvendte modelapparat kan udbygges til også at omfatte asymmetrisk beskattede.

Valget mellem obligationer med forskellig restløbetid træffes i høj grad ud fra, hvorledes den *horisontale rentestruktur* ser ud. Den horisontale rentestruktur er forskellig for forskellige obligationstyper. Figur 1 viser rentestrukturen tegnet dels på basis af annuitetsobligationer, dels på basis af stående obligationer.¹ Spørgsmålet er, hvordan man beregner, om rentestrukturen på forskellige obligationstyper er rimelig, og om markedet er i ligevægt, eller om der kan opnås en overnormal profit ved at investere i bestemte obligationer.

Rentestrukturkurverne *indeholder* den information, investor har brug for, nemlig de implicitte forward-renter. Problemet er imidlertid, at de indeholder denne information på en særdeles uigennemskuelig måde. De implicitte forward-renter er defineret ved de

1. Hvis renterne var ens for stående lån og annuitetslån med samme restløbetid (d.v.s. ens rentestruktur), ville der være arbitragegevinster at hente, idet det kan vises, at med en voksende rentestrukturkurve, vil de implicitte forward-renter da være størst for annuitetsobligationerne.

Rentestruktur og implicitte forward-renter

Leif Hasager og Michael Møller

Institut for Finansiering, Handelshøjskolen i København

SUMMARY: Traditional analyses of the future return on bonds have focused on the term structure of interest rates. Even though this contains the relevant information, it does so in a very obscure fashion. Calculations of the forward rates of return implicit in the term structure of interest rate yield the required information. This article demonstrates that in general there is no simple relation between the term structure of interest rates and the implicit forward interest rates. The paper considers mainly two types of bonds, namely discount bonds and annuities.

1. Indledning

Formålet med denne artikel er at tilvejebringe et bedre beslutningsgrundlag for investorer med hensyn til valg mellem obligationer med forskellig restløbetid, afdragsprofil og nominel rente. Vægten lægges på investorer, der beskattes både af rente og kursgevinst (eller ikke beskattes), men det anvendte modelapparat kan udbygges til også at omfatte asymmetrisk beskattede.

Valget mellem obligationer med forskellig restløbetid træffes i høj grad ud fra, hvorledes den *horisontale rentestruktur* ser ud. Den horisontale rentestruktur er forskellig for forskellige obligationstyper. Figur 1 viser rentestrukturen tegnet dels på basis af annuitetsobligationer, dels på basis af stående obligationer.¹ Spørgsmålet er, hvordan man beregner, om rentestrukturen på forskellige obligationstyper er rimelig, og om markedet er i ligevægt, eller om der kan opnås en overnormal profit ved at investere i bestemte obligationer.

Rentestrukturkurverne *indeholder* den information, investor har brug for, nemlig de implicitte forward-renter. Problemet er imidlertid, at de indeholder denne information på en særdeles uigennemskuelig måde. De implicitte forward-renter er defineret ved de

1. Hvis renterne var ens for stående lån og annuitetslån med samme restløbetid (d.v.s. ens rentestruktur), ville der være arbitragegevinster at hente, idet det kan vises, at med en voksende rentestrukturkurve, vil de implicitte forward-renter da være størst for annuitetsobligationerne.

én-periode afkast, investor kan opnå i fremtiden via transaktioner med fordringer fra en bestemt rentestrukturkurve.

Et meget simpelt eksempel kan belyse forholdet: Antag, at 3-månedersrenten på pengemarkedet er 2,5% pr. kvartal og at 6-månedersrenten er 2,75% pr. kvartal. Så kan vi beregne den ligevægtsrente, der skal gælde for at indgå kontrakt om at låne et givet beløb om 3 måneder i 3 måneder fra:

$$(1 + 0,0275)^2 = (1 + 0,025)(1 + x)$$

hvilket giver $x = 3,0006\%$ pr. kvartal.

Långiver vil være indifferent mellem at låne ud i 6 måneder til 2,75% pr. kvartal og mellem at låne ud i 3 måneder til 2,5% rente pr. kvartal samtidig med, at der indgås kontrakt om at udlåne om 3 måneder i 3 måneder til 3,0006% pr. kvartal — den implicite forward-rente.

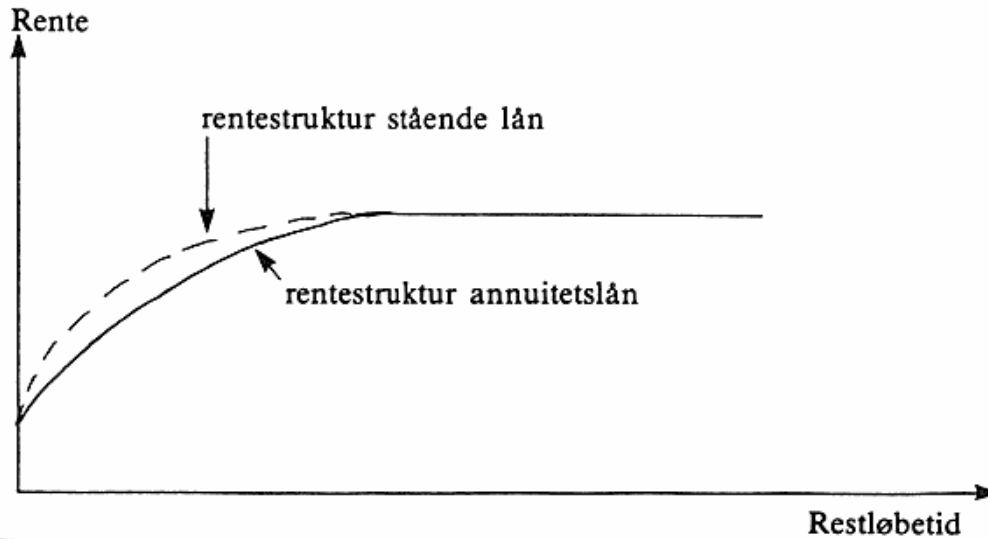
Sådanne forward-kontrakter indgås p.t. kun over forholdsvis korte perioder. Men bag valget mellem at investere i obligationer med forskellig restløbetid må ikke desto mindre ligge overvejelser over, om de implicite forward-renter er rimelige eller ej, jf. afsnit 2. Imidlertid er i praksis alle forsøg på at udlede intuitive sammenhænge mellem rentestrukturkurver og implicite forward-renter dømt til at mislykkes!

Det er f.eks. ikke let at afgøre, om de viste rentestrukturkurver i figur 1 afspejler samme implicite forward-renter eller ej.

Dispositionen i denne artikel er følgende:²

I afsnit 2 vises ved eksempler, at der ikke er nogen simpel sammenhæng mellem horisontal rentestruktur og implicite forward-renter for de i Danmark eksisterende obligationstyper, og hvorledes forward-renter beregnes ud fra rentestrukturen. *I afsnit 3* diskuteres kort spørgsmålet om, i hvilket omfang det er nødvendigt med fuldkomne markeder, for at rentestrukturen skal være »rimelig«, d.v.s. ikke må afspejle uendelige eller negative forward-renter. *I afsnit 4-6* diskuteres mere nøjagtigt sammenhængen mellem rentestruktur og forward-renter for forskellige obligationstyper. Kun for 0%-obligationer eksisterer der en simpel sammenhæng. For serieobligationer og stående obligationer kommer forward-renten for et givet år til at afhænge af de effektive renter for alle lån med kortere restløbetider. For annuitetsobligationer afhænger forward-renten derimod »kun« af de effektive renter for lån med samme slutår og ét og to år kortere slutår. *I afsnit 7* diskuteres beregning af forward-renter i praksis, ligesom spørgsmålet om skat inddrages. *Afsnit 8* indeholder en kort konklusion.

2. I Hasager & Møller (1985) diskuteres yderligere løbetidspræferencespørgsmålet. Samme sted findes også formler for de 4 omtalte obligationstyper samt en analyse af forward-renterne herfor.



Figur 1. Hypotetiske rentestrukturkurver

2. Rentestruktur og implicitte forward-renter: introduktion

Den generelle og eneste praktisk anvendelige metode til udregning af implicitte forward-renter er en trinvis periode for periode algoritme:

$$i_T = \frac{V_T}{V_{T-1}} - 1 \quad (1)$$

hvor V_T angiver værdien af et lån med nutidsværdi 1 med T terminers restløbetid opgjort i T med betalinger, der falder før T , forrentet med de implicitte forward-renter (i_1 ... i_T).

Figur 2 viser de implicitte forward-renter, der kan udledes af en simpel rentestrukturkurve for annuitetsobligationer med én årlig termin.

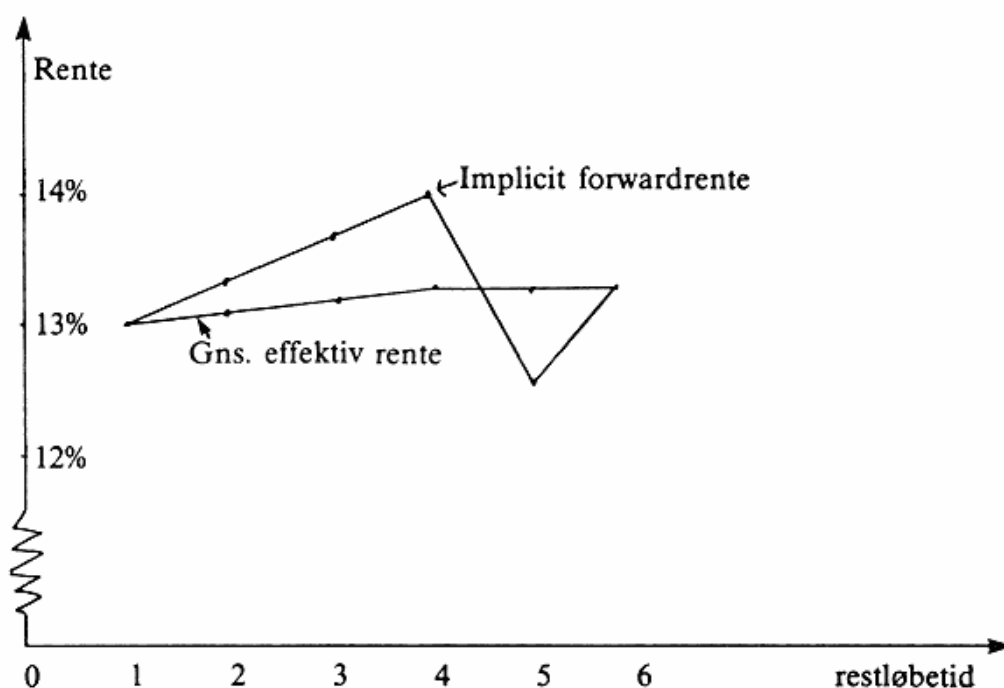
Denne sammenhæng kan ikke udledes intuitivt, jf. Hasager & Møller (1985).

I eksemplet er betragtet en rentestruktur med meget små forskelle i de effektive renter. Det er let at forestille sig tilsyneladende »rimelige« rentestrukturkurver, der indebærer, at forward-renterne i visse år enten bliver *uendelige* eller *negative*, specielt hvis vi betragter lidt længere løbetider.

3. Fuldkomne obligationsmarkeder og implicitte forward-renter

I et fuldkomment marked vil de enkelte agenter både kunne udbyde og efterspørge obligationslån til de gældende markedsrenter.

Agenterne vil derfor ved kombination af at optage obligationslån med visse løbetider og købe obligationer med andre løbetider kunne indgå forward-kontrakter til de implicitte forward-renter.



Figur 2. Rentestruktur og implicitte forward-renter.

I et sådant fuldkomment marked er der selvfølgelig grænser for, hvor høje og hvor lave forward-renterne kan blive, set dels ud fra det aktuelle renteniveau og dels i relation til renterne i omkringliggende år.

I det danske marked er det *ikke* muligt at indgå sådanne kontrakter, og det kan slet ikke gøres *omkostningsfrit*. Investorer og låntagere må købe »pakker« af forskellige lån. Betragt f.eks. en investor, der synes, at den implicitte forward-rente ved udlån fra år 2001 til 2002 er urimelig høj, men at den implicitte forward-rente ved udlån fra år 1995 til 1996 er urimelig lav. Denne investor har ikke mulighed for at indgå kontrakt om at udlåne et beløb fra år 2001 til år 2002 uden samtidig at indgå en kontrakt om at udlåne et mindst lige så stort beløb fra år 1995 til 1996 (nemlig ved køb af stående obligationer med kurs omkring pari). Som følge heraf kan vi ikke udelukke ganske urimelige forward-renter.

Dog kan store institutionelle investorer med brede porteføljer reelt indgå de for forward-renterne nødvendige kontrakter ved simpelthen både at købe samt at sælge fra den bestående portefølje. Ligeledes er forward-renterne opnåelige ved marginal løbetidsvalg.

4. 0%-obligationer, rentestruktur og forward-renter

0%-obligationer er stående obligationer uden kupon-rente, d.v.s. med én udbetaling nu og én indbetaling om n terminer. Obligationernes restløbetid bliver derfor lig deres varighed.

Det er let at indse, at ved på samme tid at:

- investere i en 0%-obligation med løbetid T
- optage et 0%-obligationslån med løbetid $(T-1)$

har man indgået en kontrakt om at udlåne et beløb fra tidspunkt $(T-1)$ til T .

Den rente, der opnås ved dette ét-årige udlån, d.v.s. den forward-rente, som ligger implicit i rentestrukturen for 0%-obligationer, bliver:

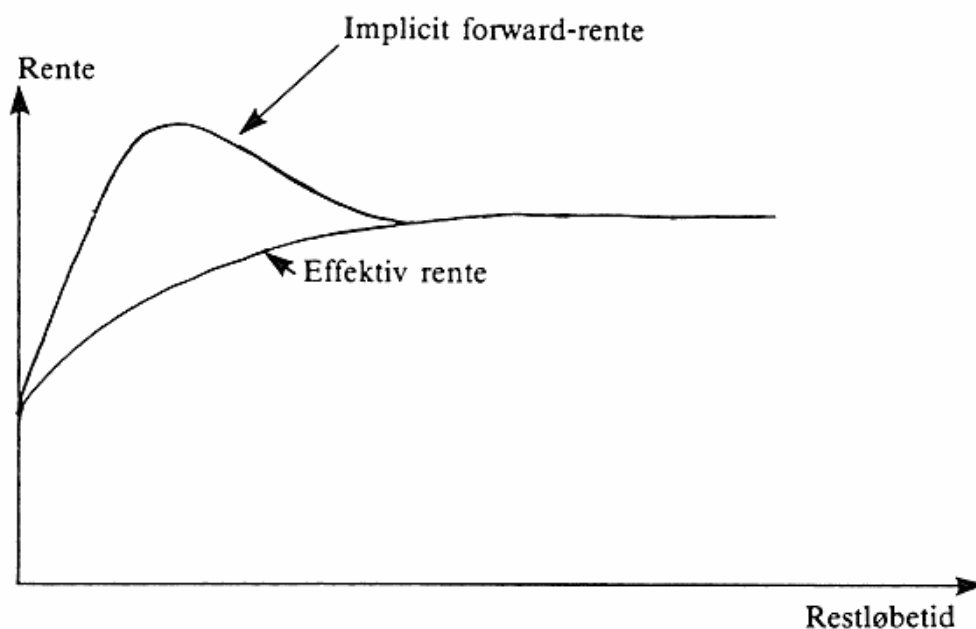
$$(1 + i_T) = \frac{(1 + r_T)^T}{(1 + r_{T-1})^{T-1}} \quad (2)$$

hvor r_T er den gennemsnitlige effektive rente for en obligation med T terminers restløbetid.

Den implicitte forward-rente fra tidspunkt $(T-1)$ til tidspunkt T afhænger således kun af den effektive rente på 0%-obligationer med $(T-1)$ og T års restløbetid.

Vi kan meget let udlede sammenhængen mellem rentestrukturkurven og de heri liggende implicitte forward-renter. Når rentestrukturkurven har et lokalt maksimum, vil kurven for de implicitte forward-renter skære rentestrukturkurven i dette punkt. Og når rentestrukturkurven bliver vandret, bliver den implicitte forward-rente sammenfaldende hermed.³ Der kan dog ikke uden beregning siges noget om, hvorvidt forward-rentekurven er stigende eller faldende. Den kan f.eks. både være stigende og faldende i intervaller, hvor rentestrukturen er stigende, som vist i figur 3. Når der kan være grund til at fremhæve dette, er det selvfølgelig, fordi interessen bør knytte sig til forward-rentestrukturen. D.v.s. hvis der er en risikopræmie for lange udlån, skal den give sig udslag i en stigende *forward-rentestruktur*. I figur 3 er rentestrukturen aldrig aftagende, men forward-rentestrukturen er først stigende og derefter aftagende. *D.v.s. rentestrukturkurven viser slet ikke, at der i den viste situation er en overrente på mellem-lange lån både i forhold til korte og lange lån.*

3. Dette gælder kun eksakt for kontinuert rentetilskrivning, men unøjagtigheden i ovenstående er ubetydelig i det diskrete tilfælde.



Figur 3. Sammenhæng mellem rentestruktur og implicit forward-rentestruktur

5. Rentestruktur og forward-renter for annuitetsobligationer

For annuitetsobligationer kan der findes en rimelig enkel sammenhæng mellem effektive renter og implicitte forward-renter, rent *formelmæssigt*.

Et 0%-obligationslån kan nemlig konstrueres ud fra annuitetslån. Der ydes et n -årigt annuitetslån og der optages et $(n-1)$ -årigt annuitetslån med samme årlige ydelse, idet vi igen regner med én årlig ydelse.

Det er således forholdsvis simpelt at udlede formlen:

$$(1 + i_n) = \frac{\alpha_{n-1} r_{n-1} - \alpha_{n-2} r_{n-2}}{\alpha_n r_n - \alpha_{n-1} r_{n-1}} \quad (3)$$

D.v.s. har man rene annuitetslån, er det meget enkelt at beregne den implicitte forward-rentestruktur.

Men som tidligere vist vil intuitionen som hovedregel lede på vildspor, hvis man søger at skønne over forward-rentestrukturen på basis af den almindelige rentestrukturkurve.

Det er almindeligt at interessere sig for *rentespændet* mellem obligationer med forskellig restløbetid. Der kan være grund til at påpege, at det samme rentespænd kan indebære vidt forskellige forward-rentestrukturkurver afhængig af selve *niveauet* for

Tabel 1. Højest mulige rente på en 31-, 21- og 11-årig annuitetsobligation ved forskellige renter på en 30-, 20- og 10-årig annuitetsobligation

Rente på 10, 20 og 30-årige obligationer.	Maksimal rente på			Forskel		
	11-årig obl.	21-årig obl.	31-årig obl.	11-årig obl.	21-årig obl.	31-årig obl.
10%	11,22%	10,23%	10,065%	1,22%	0,23%	0,07%
14%	15,08%	14,16%	14,037%	1,08%	0,16%	0,04%
18%	18,95%	18,12%	18,020%	0,95%	0,12%	0,02%
22%	22,84%	22,08%	22,010%	0,84%	0,08%	0,01%

renten. Modsat den populære overbevisning er en generel rentestigning ikke forenelig med samme rentestruktur. Vi betragter en stigende rentestrukturkurve:

Jo højere renteniveau, jo fladere skal rentestrukturkurven være, dog spiller renteniveauet en relativt mindre rolle ved korte løbetider.

Dette indses let ved at betragte den størst mulige renteforskel, der kan tænkes i et perfekt marked mellem f.eks. en 30-årig obligation og en 31-årig obligation, afhængig af renten på den 30-årige obligation.

Den effektive rente på den 31-årige obligation kan ikke blive så høj, at der ved investering af samme beløb i en 31-årig obligation og en 30-årig obligation opnås samme årlige ydelse. Det ville være ensbetydende med en uendelig forward-rente fra år 30 til år 31.

Beregningerne i tabel 1 er foretaget ud fra den sædvanlige forudsætning om ét-årige terminer.

Det ses, at de teoretisk mulige renteforskelle er hastigt faldende med renteniveauet, hvilket vil sige, at rentestrukturkurven må blive fladere, jo højere renteniveauet er.

For obligationer med kun 10 eller 20 års restløbetid er de teoretisk mulige renteforskelle i forhold til obligationer med ét års længere restløbetid selvfølgelig væsentlig større. Det er dette, der ligger bag, at *rentestrukturkurverne bliver fladere, jo længere løbetiden er.*

6. Øvrige obligationer

Indtil nu har vi set på 0%-obligationer og annuitetsobligationer, hvor der kunne udledes meget simple formler for sammenhæng mellem rentestruktur og forward-rente.

For andre typer af obligationer bliver formlerne mere komplicerede.

For stående obligationer og serieobligationer kommer også den *nominelle* rente til

at spille en rolle, og der fås særdeles komplicerede sammenhænge, hvor forward-renten for et givet år afhænger af *hele rentestrukturkurven* for så vidt angår alle kortere løbetider.

7. Beregning af forward-renter i praksis

I det foregående har vi betragtet implicitte forward-renter beregnet i situationer med »rene« annuitets- og 0%-obligationer. D.v.s. vi har set bort fra beregningsproblemerne, når vi ikke står primo en termin (vedhængende renter, publikation af udtrækningslister o.s.v.). Vi har endvidere set bort fra, at annuitetsobligationer, p.g.a. at serier er åbne i flere terminer, i virkeligheden ikke afdrages som annuitetslån.

D.v.s. *i praksis* vil vi aldrig kunne beregne forward-renter ud fra renteformler. Vi vil stå over for forskellige ydelsesrækker, på basis af hvilke vi kan beregne implicitte forward-renter. Og blot det at få fat på de korrekte ydelsesrækker er et ikke ubetydeligt problem.

Et yderligere problem er, at kurserne aldrig er i ligevægt. Kurserne bevæger sig hen over noteringen. Vi kan altså ikke uden videre gå ud fra, at markedet ikke er effektivt, blot fordi de registrerede kurser afspejler »bizarre« forward-renter.

8. Sammenfatning og konklusion

I et fuldkomment kreditmarked ville vi kunne undgå kontrakter om fremtidige lån. Kurserne på obligationer med forskellig restløbetid indeholder implicitte renter på sådanne lån, d.v.s. implicitte forward-renter.

Rentestrukturkurver er meget lidt gennemskuelige aggregater af disse forward-renter. En tilsyneladende »rimelig« rentestrukturkurve kan indebære negative eller uendelige implicitte forward-renter, jf. tabel 1.

Det er specielt værd at lægge mærke til, at forudsat, at den implicitte forward-rentestruktur er stigende *i begyndelsen*, vil den almindelige rentestrukturkurve have en ganske stærk indbygget tendens til aldrig at være aftagende (jf. figur 3), d.v.s. først stige og siden flade ud. Det er derfor *ikke* muligt at udtale sig om, hvorvidt den »normale« rentestrukturkurve er udtryk for en risikopræmie for lange lån, således som det ofte gøres. For det er muligt, at rentestrukturkurven er fremkommet gennem en forward-rentestrukturkurve, der først er stigende og siden faldende, hvilket alt andet lige burde fortolkes som en risikopræmie på *mellemlange* lån.

En rentestrukturkurve vil altid have en tendens til at blive asymptotisk vandret med voksende løbetid. Ellers bliver forward-renterne enten negative eller uendelige.

I det foregående har vi ikke betragtet *indkomstskat*.

For investorer, der beskattes efter lagerprincippet (d.v.s. typisk pengeinstitutter), ændrer skatten ikke noget væsentligt. De udledte forward-renter før skat vil blot skulle multipliceres med $(1-s)$, hvor s er den relevante skattesats.

For investorer, der betaler skat af direkte rente, men ikke af kursgevinst, bliver forholdet imidlertid væsentligt mere kompliceret. Der kan ikke udledes enkle formler.

Litteratur

Hasager, Leif og Michael Møller. 1985. *Rentestruktur og implicite forward-renter*. Working Paper 85-5, Institut for Finansiering, Handelshøjskolen i København.

For investorer, der beskattes efter lagerprincippet (d.v.s. typisk pengeinstitutter), ændrer skatten ikke noget væsentligt. De udledte forward-renter før skat vil blot skulle multipliceres med $(1-s)$, hvor s er den relevante skattesats.

For investorer, der betaler skat af direkte rente, men ikke af kursgevinst, bliver forholdet imidlertid væsentligt mere kompliceret. Der kan ikke udledes enkle formler.

Litteratur

Hasager, Leif og Michael Møller. 1985. *Rentestruktur og implicite forward-renter*. Working Paper 85-5, Institut for Finansiering, Handelshøjskolen i København.