Immunisering af porteføljer

Anders Grosen og Peder Fredslund Møller
Institut for finansiering og kreditvæsen/Institut for regnskabsvæsen, Handelshøjskolen i Århus

SUMMARY: *The original investment strategy, developed by Fisher og Weil, to immunize one future obligation towards interest rate changes can be extended to encompass multiple future obligations. The results of this extension emerge also by an extension of a considerably older theory, developed by Redington, about the immunization of investors net capital towards interest rate changes. It is demonstrated that the extended strategy permit immunization of future obligations not immunizable in the original model.*

1. Indledning

Betegnelsen immunisering er introduceret af Redington (1952) som betegnelse for en sikring af en finansiel institutions nettoformue over for renteændringer. Essensen i Redingtons immunisering er, at hvis *varigheden* af aktiverne er lig med *varigheden* af passiverne, vil en renteændring i tidspunkt 0 påvirke passivernes kapitalværdi i tidpunkt 0 på nøjagtig samme måde, som den vil påvirke aktivernes kapitalværdi i tidspunkt 0, hvorfor nettoformuen også vil være upåvirket.

Målet for en fordrings varighed – duration – kan variere med formålet med beregningen. Det simpleste mål er det, som er udviklet af Macauley (1938):

$$V = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot s(t)(1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} s(t)(1+i)^{-t}} \tag{1}$$

hvor V = obligationens varighed
$s(t)$ = obligationens indbetaling i tidspunkt $t = 1, \ldots, n$
i = obligationens interne rente.

I en tidligere artikel i dette tidsskrift har Grosen og Fredslund Møller (1981) introduceret og generaliseret en af Fisher og Weil (1971) udviklet immuniseringsstrategi for én fremtidig udbetaling. Ved hjælp af denne investeringsstrategi kan det under visse forudsætninger med hensyn til rentestrukturskiftenes type opnås, at det realiserede afkast over en horisont som minimum svarer til det, som loves af

Artiklen er et sammendrag af en større rapport, som kan rekvireres hos forfatterne.

Immunisering af porteføljer

Anders Grosen og Peder Fredslund Møller
Institut for finansiering og kreditvæsen/Institut for regnskabsvæsen, Handelshøjskolen i Århus

SUMMARY: *The original investment strategy, developed by Fisher og Weil, to immunize one future obligation towards interest rate changes can be extended to encompass multiple future obligations. The results of this extension emerge also by an extension of a considerably older theory, developed by Redington, about the immunization of investors net capital towards interest rate changes. It is demonstrated that the extended strategy permit immunization of future obligations not immunizable in the original model.*

1. Indledning

Betegnelsen immunisering er introduceret af Redington (1952) som betegnelse for en sikring af en finansiel institutions nettoformue over for renteændringer. Essensen i Redingtons immunisering er, at hvis *varigheden* af aktiverne er lig med *varigheden* af passiverne, vil en renteændring i tidspunkt 0 påvirke passivernes kapitalværdi i tidpunkt 0 på nøjagtig samme måde, som den vil påvirke aktivernes kapitalværdi i tidspunkt 0, hvorfor nettoformuen også vil være upåvirket.

Målet for en fordrings varighed – duration – kan variere med formålet med beregningen. Det simpleste mål er det, som er udviklet af Macauley (1938):

$$V = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot s(t)(1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} s(t)(1+i)^{-t}} \tag{1}$$

hvor V = obligationens varighed
$s(t)$ = obligationens indbetaling i tidspunkt $t = 1, \ldots, n$
i = obligationens interne rente.

I en tidligere artikel i dette tidsskrift har Grosen og Fredslund Møller (1981) introduceret og generaliseret en af Fisher og Weil (1971) udviklet immuniseringsstrategi for én fremtidig udbetaling. Ved hjælp af denne investeringsstrategi kan det under visse forudsætninger med hensyn til rentestrukturskiftenes type opnås, at det realiserede afkast over en horisont som minimum svarer til det, som loves af

Artiklen er et sammendrag af en større rapport, som kan rekvireres hos forfatterne.

rentestrukturen på investeringstidspunktet. Dette afkast garanteres uafhængigt af antallet, retningen og størrelsen af eventuelle renteskift inden for horisonten.

Til immunisering af lange nominelle forpligtelser i eksempelvis livrenteselskaber lider den af Fisher og Weil udviklede immuniseringstrategi imidlertid af to åbenbare begrænsninger. For det første har livrenteselskaberne og de fleste andre investorer i almindelighed en serie af fremtidige udbetalinger og ikke kun én udbetaling, som Fisher og Weil forudsætter. For det andet er den længste investeringshorisont, hvori der kan opnås immunisering, begrænset til varigheden af obligationsmarkedets længste papir jfr. Grosen og Fredslund Møller (1981), pp. 112-113. Sidstnævnte institutionelle hindring er eksplicit erkendt af Fisher og Weil (1971), p. 418, hvor de skriver:

> In reality, immunized investments for distant horizons T may not be achievable because there may be no bond or note whose duration is large enough – equal to or larger than T.

Begræsningen forøges betydeligt med rentens højde. De senere års høje renteniveau har derfor bevirket, at begrænsningen er blevet aktuel for eksempelvis livrenteselskaber med en betydelig nytegning af opsatte livrenter.

2. Formål og forudsætninger

Formålet med denne artikel er for det første at bevise den snævre sammenhæng mellem en udvidet Fisher og Weil strategi og Redingtons oprindelige immunisering. For det andet skal det påvises, at i en sådan strategi, hvor der inddrages flere udbetalingstidspunkter, er immuniseringsperioden ikke begrænset til varigheden af obligationsmarkedets længste papir.

Som der er tradition for, ses også her bort fra udtrækningsproblematikken,[1] skat, risiko for mislighholdelse, mulighed for konvertering, transaktionsomkostninger samt sondringen mellem nominel og real renteændring. Det forudsættes desuden, at alle aktiver og passiver i den finansielle institution er fastforrentede.

Med hensyn til renteskiftenes type forudsættes, at renteændringer alene indtræffer som parallelforskydninger af flade rentekurver. Den varighedsstørrelse, der betinger immunisering med denne type renteskift, er netop Macauley's varighed – jfr. evt. nærmere i Grosen og Fredslund Møller (1981). Det forudsættes tillige, at der i løbet af investeringshorisonten kun sker ét renteskift, som indtræffer umiddelbart efter, at porteføljen er fastlagt. Sidstnævnte forudsætning bevirker, at behovet for løbende justering af porteføljen ikke er tilstede.

De anvendte forudsætninger er ikke realistiske, men analysen påvirkes ikke

1. Ramlau-Hansen (1982) har i dette tidsskrift påvist, at varigheden indgår i beskrivelsen af udtrækningssandsynligheden.

fundamentalt af mere realistiske forudsætninger jfr. iøvrigt Grosen og Fredslund Møller herom.

3. Immunisering i to betydninger

Fisher og Weils immuniseringsstrategi og andre forfatteres senere udviklede immuniseringsstrategier er karakteriseret ved

1. et lovet afkast, dvs. afkast-immunisering
2. én udbetalingsforpligtelse
3. en specifik horisont, dvs. en periodebetragtning.

Med geninvestering af alle indbetalinger og en lovet forretning, i, på investeringstidspunktet er betingelserne for sikring af den lovede kapitalværdi i tidspunkt h, $R(h)$,

$$R(h) = \sum_{t=1}^{n} s(t)(1+i)^{h-t}$$

at $\frac{dR(h)}{di} = 0$, og at $\frac{d^2R(h)}{di^2} > 0$.

Disse betingelser er opfyldt, når:

$$h = V \quad \text{og} \quad \sum_{t=1}^{n} (h-t)^2 s(t)(1+i)^{-t} > 0 \,.$$

I figur 1 illustreres forholdet mellem den lovede og realiserede kapitalværdi for den immuniserede portefølje som funktion af renteændringens størrelse.

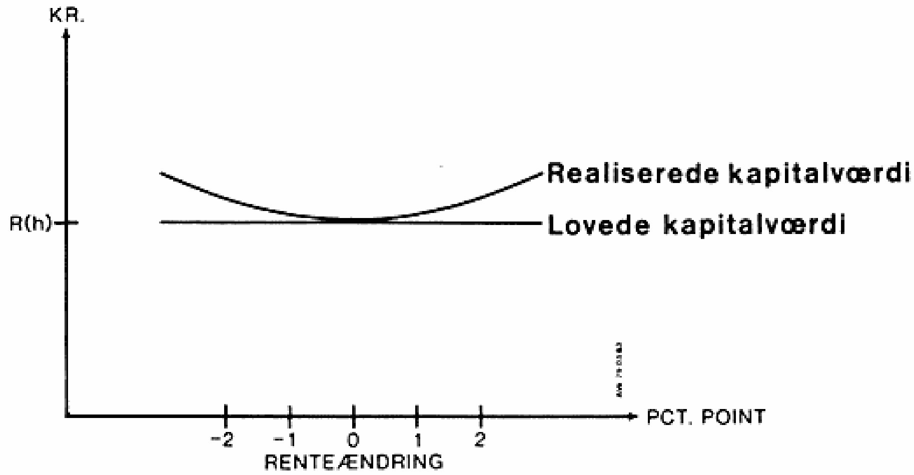
Immunisering i den af Redington introducerede betydning er karakteret ved

1. sikring af nettoformuen i tidspunkt 0, dvs. formue-immunisering
2. flere udbetalinger
3. tidspunktbetragtning

Hvis $s(t)$ og $k(t)$, $t = 1, \ldots, n$ repræsenterer henholdsvis institutionens samlede indbetaling og udbetaling i tidspunkt t, vil betingelserne for sikring af nettoformuen i tidspunkt 0, $(K(A) - K(P))$, hvor

$$K(A) = \sum_{t=1}^{n} s(t)(1+i)^{-t} \tag{3}$$

$$K(P) = \sum_{t=1}^{n} k(t)(1+i)^{-t} \tag{4}$$



Figur 1. Fisher og Weil immunisering: $V=h$.

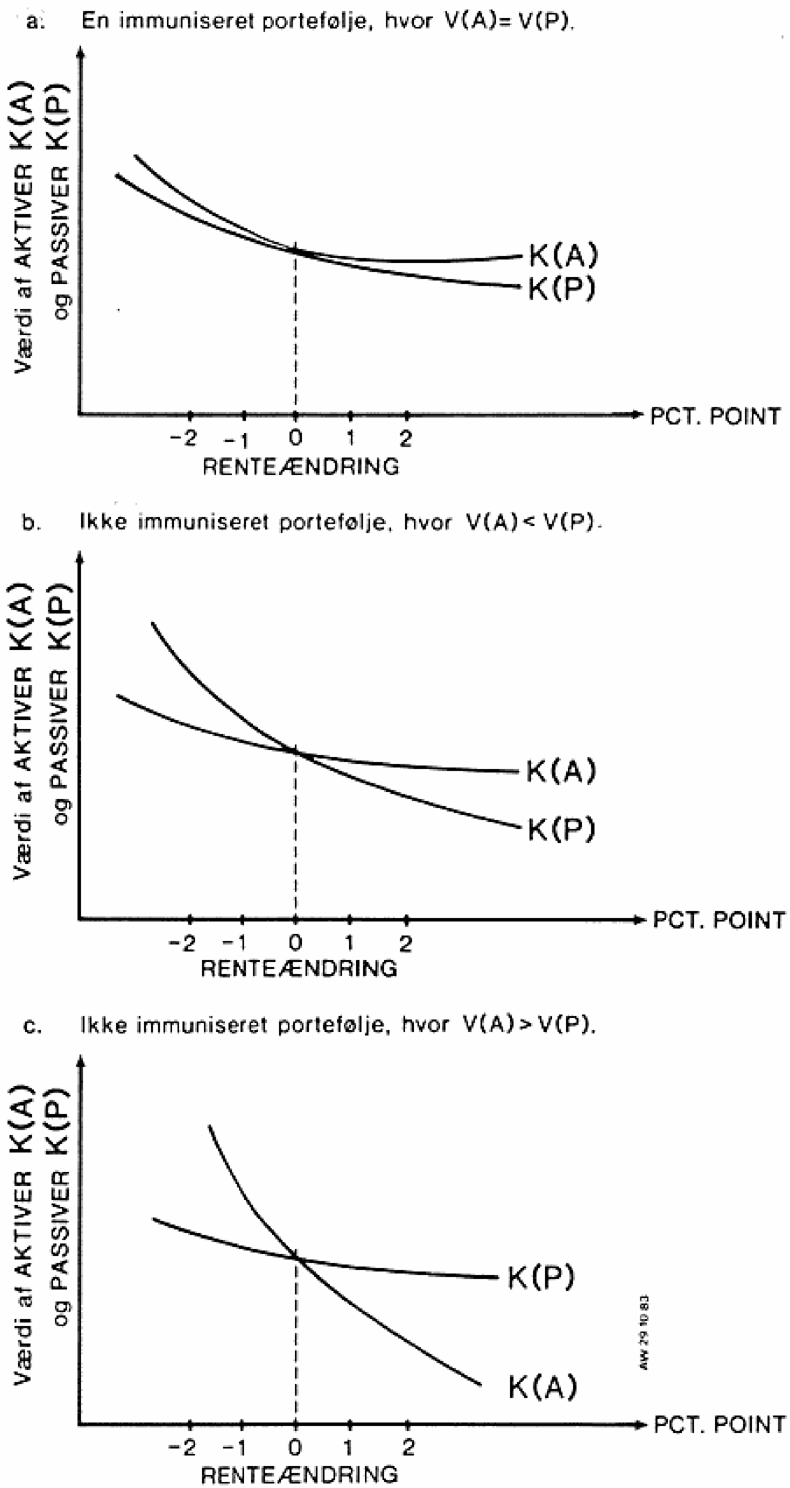
være, at $\frac{d(K(A)-K(P))}{di}=0$, og at $\frac{d^2(K(A)-K(P))}{di^2}>0$, hvilket vil være opfyldt, hvis

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I} & K(A) = K(P) \\ \text{II} & V(A) = V(P)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n} s(t)(1+i)^{-t} = \sum_{t=1}^{n} k(t)(1+i)^{-t} \\ \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n} s(t)t(1+i)^{-t} = \sum_{t=1}^{n} k(t)t(1+i)^{-t}\end{array}$$

$$\text{III} \quad M(A) > M(P) \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n} s(t)t^2(1+i)^{-t} > \sum_{t=1}^{n} k(t)t^2(1+i)^{-t}$$

Redington illustrerede sin analyse med en figur, som er i uoverensstemmelse med analysens forudsætninger. I figur 2 vises en illustration, der er i overensstemmelse med Redingtons forudsætninger og bevis.

Hvis der er flere fremtidige forpligtelser, og der ønskes immunisering i Fisher og Weils betydning, dvs. over en periode, kan hver udbetaling betragtes for sig. Aktivporteføljen kan dernæst opdeles i separate porteføljer, der hver for sig sikrer indfrielsen af et enkelt udbetalingskrav uafhængigt af renteændringer. Immunisering af en given udbetalingsstrøm kræver således ved denne fremgangsmåde en hel serie planlægningshorisonter, hvilket kan give anledning til praktiske problemer. En hensyntagen til disse problemer kræver derfor immunisering af alle udbetalinger simultant. En sådan strategi, der ved hjælp af en enkelt samlet aktivportefølje kan sikre en hel gruppe af udbetalingskrav på forskellige tidspunkter uafhængigt af



Figur 2. Teoretisk korrekt illustration.

renteændringer, er behandlet i papirer af Bierwag, Kaufman og Toevs (1980), Fong og Vasicek (1980) samt Grosen og Fredslund Møller (1979) i forskellige varianter.

I Fong og Vasiceks papir påvises imidlertid, at immuniseringsbetingelserne i Bierwag, Kaufman og Toevs udvidede strategi er for restriktive.

I de nævnte papirer påvises det imidlertid ikke, at en Fisher og Weil strategi, der udvides til flere udbetalinger, er identisk med en udvidelse af Redingtons immuniseringsteori i tilfælde af samme forudsætninger med hensyn til renteskiftenes type.

4. To udgangspunkter – samme resultat

Det skal nu vises, at hvis Redingtons betingelser er opfyldt, undgås ikke blot et nettoformuefald i renteændringstidspunktet, tidpunkt 0. Der opnås også en fiksering af afkastet over en periode, dvs. immunisering i Fisher og Weils betydning.

Lad os forudsætte, at Redingtons immuniseringsbetingelser er opfyldt, dvs. I, II og III gælder.

Det skal nu vises, at disse forudsætninger også betinger, at der opnås et mindsteafkast svarende til udgangsrentefoden, i, frem til et fremtidigt tidspunkt, h, ved geninvestering af alle nettoindbetalinger frem til dette tidspunkt.

En metode til at vise dette er den af Fisher og Weil anvendte, hvor det demonstreres, at selv om der forekommer renteændring, er formuen i h mindst lige så stor som den formue, udgangsrenten tilsiger.

For at tilpasse Fisher og Weil beviset til flere udbetalingsforpligtelser introduceres den reducerede udbetalingsrække

$$c(1), c(2) \ldots c(h-1), 0, c(h+1) \ldots c(n) .$$

For denne gælder, at $c(t) = k(t)$ for alle t, med undtagelse af $t = h$, hvor $c(h) = 0 < k(h)$.

Når I, II og III er opfyldt, indses det, at der gælder følgende:

$$\text{I}' \quad \sum_{t=1}^{n} s(t)(1+i)^{-t} = k(h)(1+i)^{-h} + \sum_{t=1}^{n} c(t)(1+i)^{-t}$$

$$\text{II}' \quad \sum_{t=1}^{n} s(t)t(1+i)^{-t} = k(h)h(1+i)^{-h} + \sum_{t=1}^{n} c(t)t(1+i)^{-t}$$

$$\text{III}' \quad \sum_{t=1}^{n} s(t)t^2(1+i)^{-t} > \sum_{t=1}^{n} k(t)t^2(1+i)^{-t}$$

$$= k(h)h^2(1+i)^{-h} + \sum_{t=1}^{n} c(t)t^2(1+i)^{-t}$$

Nu analyseres virkningen af en renteændring i 0-tidspunktet på den nettokapitalværdi i tidspunkt h, som angiver forskellen mellem aktivporteføljen og den reducerede passivportefølje, dvs. den række udbetalingsforpligtelser, der angives af $c(1), \ldots, c(n)$.

Denne nettoformue betegnes $F(h)$, og uden renteændring vil den – ved geninvestering af nettoindbetalingerne frem til h – være således, jfr. I':

$$F(h) = \sum_{t=1}^{n} (s(t) - c(t))(1+i)^{h-t} = k(h) \tag{5}$$

Beviset gennemføres ved at vise, at $\frac{dF(h)}{di} = 0$, og at $\frac{d^2F(h)}{di^2} > 0$.

Ved udnyttelse af I' og II' kan det nemt vises, at den første betingelse er opfyldt. Med hensyn til 2. ordensbetingelsen fås

$$\frac{d^2F(h)}{di^2} = (1+i)^{h-2}\left(\sum_{t=1}^{n} s(t)t^2(1+i)^{-t} - \sum_{t=1}^{n} k(t)t^2(1+i)^{-t}\right) > 0, \text{ jfr. III} \tag{6}$$

Det er hermed vist, at hvis Redingtons betingelse er opfyldt, opnås også ved reinvestering immunisering af de fremtidige nettoformuer på ethvert af de tidspunkter, hvor der er en udbetalingsforpligtelse.

Med udgangspunkt i Redingtons og Fisher og Weils oprindelige problemstillinger nås altså samme resultat på denne udvidede problemformulering, jfr. tabel 1.

Det er vel ikke så overraskende, at der er en sådan sammenhæng. Det er dog bemærkelsesværdigt, at man ved en generalisering af Redingstons problem tilsyneladende lettere når frem til de mindst restriktive forudsætninger for immuniseringen i det udvidede problem, end man gør med udgangspunkt i Fisher og Weils bevis for immunisering af en enkelt fremtidig udbetalingsforpligtelse.

Et sådant forsøg på generalisering af Fisher og Weils problem er som nævnt gjort af Bierwag, Kaufman og Toevs (1980), og de når frem til meget restriktive betingelser for immunisering af flere udbetalingsforpligtelser – faktisk så restriktive betingelser, at det er indlysende, at de er alt for restriktive.

Et andet tilsvarende forsøg på generalisering af Fisher og Weils problem er som også tidligere nævnt gjort af Fong og Vasicek (1980). Også disse forfattere kommer frem til mere restriktive betingelser for immunisering af flere udbetalinger, end det er nødvendigt. Det må dog bemærkes, at disse forfattere muligvis helt bevidst har erstattet den mindre restriktive 2. ordensbetingelse med et sæt af mere restriktive lineære restriktioner. Dette sæt af lineære restriktioner er – ved anvendelse af de her benyttede symboler – formuleret således:

$$\sum_{t=1}^{n} |t-a|s(1+i)^{-t} > \sum_{t=1}^{m} |t-a|k(t)(1+i)^{-t} \tag{7}$$

Tabel 1. Sammenhængen mellem problemerne hos Redington og Fisher og Weil

	Oprindelig problemformulering	Udvidet problemformulering
Redington	Immunisering på renteændringstidspunktet af nettoformuen, som er forskellen mellem værdien af aktiver og værdien af flere fremtidige udbetalingsforpligtelser	Immunisering af de fremtidige nettoformuer på ethvert af de tidspunkter, hvor der er en udbetalingsforpligtelse
Fisher og Weil	Immunisering af afkast over en periode svarende til tidsafstanden frem til én fremtidig udbetaling, dvs. immunisering af aktivværdien på dette ene fremtidige tidspunkt	

som skal være opfyldt for ethvert a, som angiver tidsafstanden fra 0 til et tidspunkt, hvor der er indbetaling.

Denne restriktions relation til 2. ordensbetingelsen skal efterfølgende belyses, og vi vil da anvende følgende notation:

$$\text{Minimum for alle } a \text{ af} \left(\sum_{t=1}^{n} |t-a| s(t)(1+i)^{-t} - \sum_{t=1}^{n} |t-a| k(t)(1+i)^{-t} \right) = \text{FV-min}$$

Udtrykt herved er Fong og Vasiceks immuniseringsbetingelser, at FV-min. $\geqq 0$.

5. Mere kan immuniseres

Det har givetvis været med henblik på opnåelse af de tidligere omtalte praktiske fordele, at der er foretaget den nævnte generalisering af immunisering af én fremtidig udbetaling.

Derimod tyder de unødvendigt restriktive betingelser for immunisering af tilfældet med flere udbetalinger som de nævnte forfattere angiver, at de ikke har haft øje for, at der opnås en yderligere og væsentlig konsekvens.

Ved immunisering af flere udbetalingsforpligtelser under ét i stedet for immunisering af hver udbetalingsforpligtelse for sig, kan der opnås immunisering af udbetalingsforpligtelser, som det ellers ikke ville være muligt at immunisere. Dette er ikke tidligere påvist, og der skal derfor her foretages en mere dybtgående analyse af denne konsekvens.

Især ved høje renteniveauer er der som omtalt den institutionelle begrænsning af immuniseringsmulighederne, at det ikke er muligt at erhverve fastforrentede fordringer, der har tilstrækkelig lang varighed. En fremtidig udbetalingsforpligtelse $k(T)$ kan – isoleret set – ikke immuniseres, hvis tidsafstanden til dens udbetalingstidspunkt, T, overstiger den maksimale varighed for fastforrentede fordringer, V_{max}.

Hvis udbetalingsforpligtelsen derimod ses i sammenhæng med en række udbetalingsforpligtelser, der er placeret før T, $k(1), k(2), \ldots k(T-1)$, kan immunisering opnås også i dette tilfælde.

Ved anvendelse af de tidligere anvendte symboler, $K(A)$ og $K(P)$, samt $V(A)$ og $V(P)$ og disses relation til kapitalværdien, $K(P')$, og varigheden, $V(P')$, af den reducerede passivportefølje:

$$K(P') = \sum_{t=1}^{n} c(t)(1+i)^{-t} = K(P) - k(h)(1+i)^{-h} \tag{8}$$

$$V(P') = \frac{\sum_{t=1}^{n} c(t)t(1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} c(t)(1+i)^{-t}} \tag{9}$$

kan immuniseringsperiodens længde bestemmes ved indsættelse af $h = T$ i I' og II' og løse II' med hensyn til T, hvorved fås

$$V(A)k(T)(1+i)^{-T} + K(P') = k(T)T(1+i)^{-t} + K(P')V(P') \Leftrightarrow \tag{10}$$

$$T = V(A) + \frac{K(P')}{k(T)(1+i)^{-T}}(V(A) - V(P')) \tag{11}$$

Heraf fremgår, at denne betingelse kan være opfyldt, selv om $T > V(A)_{max} \geqq V(A)$, hvis blot »tillægget« i forhold til tilfælde med én udbetaling, dvs.
$\frac{K(P')}{k(T)(1+i)^{-T}} \cdot (V(A) - V(P'))$ er tilstrækkeligt stort .

Dette »tillæg« kan udgøre en ikke ubetydelig størrelse, hvis de udbetalinger, der er placeret før tidspunkt, T, dvs. $k(1), k(2) \ldots k(T-1)$ $(= c(1), c(2) \ldots c(T-1))$, er store i forhold til $k(T)$ og i forhold til $k(T+1) \ldots k(n)$, fordi dette vil bevirke, at

(a) $\frac{K(P')}{k(T)(1+i)^{-T}}$ bliver stor

(b) $V(A) - V(P')$ bliver positiv (og eventuelt stor).

Hvis (b) er opfyldt kan tillægget blive vilkårligt stort ved forøgelse af $K(P')$, og dette kunne forlede til at tro, at der kan immuniseres vilkårligt langt. Dette er dog ikke tilfældet.

En yderligere betingelse for immunisering er som nævnt, at også 2. ordensbetingelsen er opfyldt, og det vil den ikke være, hvis $K(P')$ øges meget i forhold til et givet $K(A)$.

Essensen er, at der i en passivportefølje, som under ét kan immuniseres, meget vel kan indgå udbetalinger med betydelige varigheder, når blot der også indgår udbetalinger med lav varighed. Herved kan passivporteføljens sammenvejede – eller gennemsnitlige – varighed holdes under den maksimale varighed, som kan fremkomme i aktivporteføljen.

Dette forhold kan i særlig grad udnyttes i det tilfælde, hvor en institution har mulighed for at udstede fordringer. En sådan institution har mulighed for at immunisere givne udbetalingsforpligtelser både ved fordringskøb og – hvilket er væsentligt – ved at skabe yderligere udbetalingsforpligtelser med lav varighed. Herved kan den totale passivporteføljes sammenvejede varighed nedsættes, således at immuniseringsmulighederne opstår. En følge af passivporteføljens forøgelse er naturligvis, at også aktivporteføljen må øges.

Denne mulighed for tilpasning af både aktiv- og passivportefølje illustreres af et eksempel, der udgør hovedparten af næste afsnit.

6. Mere gæld hjælper – et eksempel

Lad os antage, at rentefoden er 10% pr. termin, og at der på markedet kun findes 2 typer af annuitetsobligationer, og at disse ved nyudstedelse har en løbetid på henholdsvis 10 og 60 terminer. Ved den givne rentefod svarer dette til varigheder på henholdsvis 4,73 og 10,80 terminer.

En institution, som har ret til at udstede 10-terminers obligationer, ønsker at immunisere en udbetalingsforpligtelse på 100, der er placeret T terminer fra nultidspunktet.

Spørgsmålene er da, hvor stor T kan blive, og hvad der skal gøres for at opnå immunisering? For $T \leqq 10{,}80$ er det muligt at immunisere betalingsforpligtelsen ved fordringskøb alene. For $T = 10$ kan man f.eks. købe for 33,46 nyudstedte 60-terminers obligationer og for 5,09 nyudstedte 10-terminers obligationer. Herved opnås en tilstrækkelig stor obligationsportefølje med en vægtet varighed på 10, idet det gælder, at $(33{,}46 + 5{,}09)1{,}10^{10} = 100$, og at

$$\frac{33{,}46}{38{,}55} \cdot 10{,}80 + \frac{5{,}09}{38{,}55} \cdot 4{,}73 = 10$$

For $T > 10{,}80$ er det derimod ikke muligt ved fordringskøb alene at opnå immunisering. Ved at udstede 10-terminers fastforrentede fordringer, hvis varighed $V(P')$, er 4,73, kan opnås, at $V(A) - V(P') > 0$. Ved passende fastsættelse af $K(P')$ kan følgeligt opnås, at ligning (11) opfyldes, hvilket udgør en immuniseringsbetingelse. Da 2. ordensbetingelsen også skal være opfyldt, er der dog en begrænsning på forøgelsen af $K(P')$.

Det køb af nyudstedte 60-terminers obligationer og den udstedelse af 10-terminers obligationer – begge dele angivet til kursværdi –, som er nødvendige for at

Tabel 2. Eksemplets immuniseringsrelationer og -betingelser

T terminer	$K(A)$ Kursværdi af købte 60-terminers obligationer	$K(P')$ Kursværdi af udstedte 10-terminers obligationer	$M(A)-M(P)$	FV-min.
11	36,19	1,14	3497,69	$2\cdot10^{-7}$
12	38,14	6,28	3414,22	$-1\cdot10^{-2}$
13	39,44	10,48	3259,87	$5\cdot10^{-7}$
14	40,19	13,86	3052,35	$-2\cdot10^{-6}$
15	40,48	16,54	2807,74	$-4\cdot10^{-6}$
16	40,38	18,61	2538,85	$4\cdot10^{-7}$
17	39,96	20,18	2256,08	$-2\cdot10^{-7}$
18	39,29	21,30	1967,77	$-1\cdot10^{-6}$
19	38,40	22,06	1680,53	$-1\cdot10^{-6}$
20	37,36	22,50	1399,52	$3\cdot10^{-7}$
21	38,19	22,68	1128,69	$-$ 4,60
22	34,92	22,64	870,97	$-13{,}91$
23	33,58	22,42	628,44	$-22{,}55$
24	32,20	22,05	402,51	$-29{,}78$
25	30,79	21,56	194,00	$-36{,}40$
26	29,37	20,98	3,29	$-41{,}67$
27	27,96	20,33	$-169{,}60$	$-46{,}31$
28	26,56	19,62	$-324{,}95$	$-49{,}76$
29	25,18	18,88	$-463{,}26$	$-52{,}74$
30	23,84	18,10	$-585{,}20$	$-54{,}78$

immunisere betalingsforpligtelsen på 100 i tidspunkt T, er angivet i tabel 2. Her er også angivet størrelsen af $M(A)-M(P)$, jfr. III, og FV-min.

2. ordensbetingelsen for immunisering er ensbetydende med, at kravet er: $M(A)-M(P)>0$. Det fremgår derfor af tabellen, at medens det i den oprindelige Fisher og Weil model kun var muligt at immunisere indtil 10,8 terminer, er det ved den udvidede model muligt at immunisere en udbetaling, der ligger indtil 26 terminer ud i fremtiden.

Generelt vil den mulige udvidelse være bestemt både af renteniveau og af hvilke fordringer, der kan købes og sælges, samt disse fastforrentede fordringers løbetider.

Det fremgår af tabellen, at den betingelse for immunisering, der angives af Fong og Vasicek, tilsiger, at der i det her anvendte eksempel »kun« kan immuniseres indtil $T=20$, hvis der tolkes lidt venligt, således at der ses bort fra helt små negative værdier af deres teststørrelse. En afgørende årsag til, at deres betingelse uomtvisteligt ikke er opfyldt for $T>20$, er givetvis, at der i dette eksempel bliver *nettoudbetalinger* i de første 10 terminer, når $T>20$.

Fong og Vasiceks immuniseringsbetingelse er altså også for restriktiv. En alvorligere indvending imod denne betingelse i relation til praktisk anvendelse er dog måske, at den skal beregnes med en meget stor nøjagtighed for ikke at give fejlkonklusioner.

Dette forhold illustreres af udfaldene af Fong og Vasiceks betingelse. Det ses, at deres teststørrelse har en tendens til at bevæge sig tæt ved – og enkelte gange »uforsætligt« at overskride – grænsen for opfyldelse. Den ligger tæt på nul og bliver enkelte gange negativ – omend meget lidt negativ –, når den ikke skulle være det.

Det fremgår også, at teststørrelsen $M(A)-M(P)$ ikke har tilsvarende uheldige egenskaber, hvilket kan betyde, at den i praksis – foruden at være mere korrekt – også er mere anvendelig.

7. Konklusion

Sammenfattet er der to konklusioner i denne artikel.

Den første er, at sondringen mellem (1) immunisering af afkast over en periode og (2) immunisering af nettokapitalværdi på et tidspunkt er uberettiget. Der er blot tale om to forskellige sider af samme sag. Dette er vist ved udvidelsen af henholdsvis Fisher og Weils problem vedrørende periodeimmunisering relateret til én udbetaling og Redingtons problem vedrørende tidspunktimmunisering af en formue, der repræsenterer mange ind- og udbetalinger.

Det andet væsentlige forhold, der er påvist, er, at det er porteføljens og ikke den enkelte fordrings varighed, der er afgørende for immunisering. Dette er påvist og illustreret ved et eksempel, der viser, at varigheden af en enkelt udbetalingsforpligtelse kan afvige meget betydeligt fra porteføljens varighed. En følge af dette er, at det er muligt i porteføljesammenhæng at immunisere udbetalingsforpligtelser, der ikke isoleret set kunne immuniseres.

Skønt der iøvrigt er store forskelle i problemstillingerne ved obligations- og aktieinvestering, er der altså den parallel, at den enkelte fordrings risiko ikke kan betragtes isoleret, men må ses i lyset af dens bidrag til porteføljens samlede risiko.

Litteratur

Bierwag, G. O., G. G. Kaufman og A. Toevs. 1980. *Immunization for Multiple Planning Periods.* Center for Capital Market Research, University of Oregon.

Fisher, L. og R. L. Weil. 1971. Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. *Journal of Business* 44: 408-431.

Fong, H. Gifford og Oldrich Vasicek. (1980). *A Risk Minimizing Strategy for Multiple Liability Immunization.* Institute for Quantitative Research in Finance.

Grosen, A. og P. Fredslund Møller. 1979. *Measures of Duration as Elasticities of Bond Price, Reinvestment Value and Total Value over a Horizon.* Handelshøjskolen i Århus, September 1979.

alvorligere indvending imod denne betingelse i relation til praktisk anvendelse er dog måske, at den skal beregnes med en meget stor nøjagtighed for ikke at give fejlkonklusioner.

Dette forhold illustreres af udfaldene af Fong og Vasiceks betingelse. Det ses, at deres teststørrelse har en tendens til at bevæge sig tæt ved – og enkelte gange »uforsætligt« at overskride – grænsen for opfyldelse. Den ligger tæt på nul og bliver enkelte gange negativ – omend meget lidt negativ –, når den ikke skulle være det.

Det fremgår også, at teststørrelsen $M(A)-M(P)$ ikke har tilsvarende uheldige egenskaber, hvilket kan betyde, at den i praksis – foruden at være mere korrekt – også er mere anvendelig.

7. Konklusion

Sammenfattet er der to konklusioner i denne artikel.

Den første er, at sondringen mellem (1) immunisering af afkast over en periode og (2) immunisering af nettokapitalværdi på et tidspunkt er uberettiget. Der er blot tale om to forskellige sider af samme sag. Dette er vist ved udvidelsen af henholdsvis Fisher og Weils problem vedrørende periodeimmunisering relateret til én udbetaling og Redingtons problem vedrørende tidspunktimmunisering af en formue, der repræsenterer mange ind- og udbetalinger.

Det andet væsentlige forhold, der er påvist, er, at det er porteføljens og ikke den enkelte fordrings varighed, der er afgørende for immunisering. Dette er påvist og illustreret ved et eksempel, der viser, at varigheden af en enkelt udbetalingsforpligtelse kan afvige meget betydeligt fra porteføljens varighed. En følge af dette er, at det er muligt i porteføljesammenhæng at immunisere udbetalingsforpligtelser, der ikke isoleret set kunne immuniseres.

Skønt der iøvrigt er store forskelle i problemstillingerne ved obligations- og aktieinvestering, er der altså den parallel, at den enkelte fordrings risiko ikke kan betragtes isoleret, men må ses i lyset af dens bidrag til porteføljens samlede risiko.

Litteratur

Bierwag, G. O., G. G. Kaufman og A. Toevs. 1980. *Immunization for Multiple Planning Periods.* Center for Capital Market Research, University of Oregon.

Fisher, L. og R. L. Weil. 1971. Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. *Journal of Business* 44: 408-431.

Fong, H. Gifford og Oldrich Vasicek. (1980). *A Risk Minimizing Strategy for Multiple Liability Immunization.* Institute for Quantitative Research in Finance.

Grosen, A. og P. Fredslund Møller. 1979. *Measures of Duration as Elasticities of Bond Price, Reinvestment Value and Total Value over a Horizon.* Handelshøjskolen i Århus, September 1979.

Grosen, A. og P. Fredslund Møller. 1981. Fastforrentede fordringers rentefølsomhed og varighed. *Nationalokonomisk Tidsskrift* 119: 105-125.

Macauley, F. R. 1938. *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. Since* 1856. New York, NBER.

Ramlau-Hansen, H. 1982. Udtrækningschance og effektiv rente for obligationer. *Nationalokonomisk Tidsskrift* 120: 361-378.

Redington, F. M. 1952. Review of the Principle of Life Office Valuations. *Journal of the Institute of Actuaries* 18: 286-340.