Udtrækningschance og effektiv rente for obligationer

Henrik Ramlau-Hansen
Forsikringsmatematisk Laboratorium, Københavns Universitet

SUMMARY: *In Denmark real estate mortgage annuity bonds are amortized by lottery drawings. Each bond has a number, and twice a year part of the bonds are drawn and redeemed at par. For the investor or the purchaser of the annuity bonds this means that the redemption date is uncertain and the realized yield becomes a stochastic variable. It is shown that when an investor purchases an increasing number of bonds the realized yield is asymptotic normally distributed and a formula for the variance is derived. It is investigated how the asymptotic variance depends on the dividend rate, the yield, the term of the bond, and of investor's horizon, and the results are illustrated by numerical examples.*

1. Indledning

Som bekendt foregår amortisering af realkreditobligationer ved udtrækning, d.v.s. ved hver termin indfrier kreditforeningerne ved lodtrækning et antal obligationer svarende til de afdrag låntagerne har betalt i den pågældende obligationsserie. Da indfrielsen sker til kurs 100, og kursen på indfrielsestidspunktet ofte er væsentlig under 100, er det af stor betydning for obligationsejeren, hvor heldig han er i udtrækningslotteriet. På tidspunktet, hvor obligationsinvesteringen foretages, beregnes der ofte en effektiv rente svarende til købskursen. Selv om renteniveauet ikke ændrer sig, vil den effektive rente sjældent realiseres af investor, idet den faktiske udtrækning af obligationen/obligationerne ofte vil afvige tilfældigt fra det forventede udtrækningsforløb. Den realiserede effektive rente bliver således en stokastisk variabel. Det er derfor af afgørende betydning for investor at vide, hvor store tilfældige afvigelser man kan komme ud for, og hvorledes man i givet fald kan gardere sig mod disse. Intuitivt forventes det, at man kan formindske udtrækningschancens betydning ved at købe obligationer i mindste nominelle stykstørrelse frem for at investere i obligationer med større pålydende værdi, men dermed formindskes også tilsvarende muligheden for væsentlige gevinster ved hurtig udtrækning.

I betragtning af, at udtrækningsgevinsten ofte udgør en væsentlig del af den effektive rente, er det bemærkelsesværdigt så lidt, der er publiceret om udtrækningens

Udtrækningschance og effektiv rente for obligationer

Henrik Ramlau-Hansen
Forsikringsmatematisk Laboratorium, Københavns Universitet

SUMMARY: *In Denmark real estate mortgage annuity bonds are amortized by lottery drawings. Each bond has a number, and twice a year part of the bonds are drawn and redeemed at par. For the investor or the purchaser of the annuity bonds this means that the redemption date is uncertain and the realized yield becomes a stochastic variable. It is shown that when an investor purchases an increasing number of bonds the realized yield is asymptotic normally distributed and a formula for the variance is derived. It is investigated how the asymptotic variance depends on the dividend rate, the yield, the term of the bond, and of investor's horizon, and the results are illustrated by numerical examples.*

1. Indledning

Som bekendt foregår amortisering af realkreditobligationer ved udtrækning, d.v.s. ved hver termin indfrier kreditforeningerne ved lodtrækning et antal obligationer svarende til de afdrag låntagerne har betalt i den pågældende obligationsserie. Da indfrielsen sker til kurs 100, og kursen på indfrielsestidspunktet ofte er væsentlig under 100, er det af stor betydning for obligationsejeren, hvor heldig han er i udtrækningslotteriet. På tidspunktet, hvor obligationsinvesteringen foretages, beregnes der ofte en effektiv rente svarende til købskursen. Selv om renteniveauet ikke ændrer sig, vil den effektive rente sjældent realiseres af investor, idet den faktiske udtrækning af obligationen/obligationerne ofte vil afvige tilfældigt fra det forventede udtrækningsforløb. Den realiserede effektive rente bliver således en stokastisk variabel. Det er derfor af afgørende betydning for investor at vide, hvor store tilfældige afvigelser man kan komme ud for, og hvorledes man i givet fald kan gardere sig mod disse. Intuitivt forventes det, at man kan formindske udtrækningschancens betydning ved at købe obligationer i mindste nominelle stykstørrelse frem for at investere i obligationer med større pålydende værdi, men dermed formindskes også tilsvarende muligheden for væsentlige gevinster ved hurtig udtrækning.

I betragtning af, at udtrækningsgevinsten ofte udgør en væsentlig del af den effektive rente, er det bemærkelsesværdigt så lidt, der er publiceret om udtrækningens indflydelse på den effektive rente. Eriksen (1967) viste, at antal udtrukne obligationer ved de forskellige terminer følger en hypergeometrisk fordeling og benyttede dette til at vise, at nutidsværdien af en investering i flere enslydende obligationer for en given kalkulationsrentefod er approksimativt normalfordelt, når antallet af obligationer vokser mod uendelig. Han benyttede dette til at vurdere sandsynligheden for overskud/underskud i forhold til den forventede kapitalværdi vurderet med den effektive rente som kalkulationsrentefod, men den realiserede effektive rentes stokastiske egenskaber blev ikke diskuteret. Okkels Hansen (1975) diskuterer tilsvarende ved hjælp af simulation normalitet af kapitalværdien af en obligationsinvestering ved en given kalkulationsrentefod. I Okkels Hansen (1977) angives det implicit uden bevis, at den realiserede effektive rente ved en obligationsinvestering er approksimativt normalfordelt, når antallet af obligationer vokser mod uendelig. Det angivne udtryk for den asymptotiske varians er dog ikke helt korrekt, om end det for praktiske anvendelser er en rimelig god approksimation til den i afsnit 3.1 angivne formel. Kier Christensen (1982) behandler også udtrækningsusikkerheden knyttet til realkreditobligationsinvesteringer, idet der i en række eksempler angives det antal obligationer, der skal anskaffes for at opnå en krævet minimumsforrentning med en given sikkerhed. I Kier Christensen (1982) angives dog ingen formler eller beskrivelse af den benyttede beregningsmetode. En sammenligning af resultaterne i Okkels Hansen (1977) og Kier Christensen (1982) tyder dog på, at resultaterne ikke stemmer helt overens, idet man ifølge Kier Christensen (1982) bør anskaffe betydelig flere obligationer end i Okkels Hansen (1977) for at opnå en given sikkerhed.

Litteraturen vedrørende udtrækning af obligationer er således yderst sparsom, og der hersker en vis usikkerhed omkring hvilke resultater, der er gældende. Samtidig er spørgsmålet om sammenhængen mellem udtrækningschancen og den effektive rente blevet aktualiseret i forbindelse med etableringen af Værdipapircentralen og omlægningen af udtrækningssystemet fra foråret 1983. Vi skal derfor i det følgende søge at give en generel fremstilling af udtrækningsproblematikken og illustrere, hvorledes sandsynlighedsregning er et vigtigt hjælpemiddel i denne gren af rentesregningen. Efter i afsnit 2 at have diskuteret udtrækning af obligationer, viser vi i afsnit 3, at den realiserede effektive rente som funktion af udtrækningstidspunkterne for de anskaffede obligationer er approksimativt normalfordelt, når antal obligationer vokser mod uendelig. Det påvises, at den asymptotiske varians afhænger helt centralt af obligationens varighed, jf. Grosen og Møller (1981), og det diskuteres, hvorledes udtrækningsrisikoen afhænger af løbetid, nominel rente og effektiv rente. Videre undersøges det, hvorledes udtrækningsrisikoen påvirker det afkast investor vil opnå, såfremt obligationen kun beholdes i et begrænset tidsrum og ikke holdes over hele løbetiden. Resultaterne illustreres med numeriske eksempler, og det angives bl.a., hvor mange obligationer det er nødvendigt at købe for at opnå en given minimumsforrentning med en vis sikkerhed. Endelig kommenteres de aktuelle ændringer i det danske udtrækningssystem.

Fremstillingen vil blive koncentret omkring sædvanlige obligations- eller annuitetslån, men det er naturligvis muligt at foretage en tilsvarende analyse for andre lånetyper. Vi skal koncentrere os om de rent principielle problemer i forbindelse med udtrækningsrisikoen, og vi skal derfor se bort fra, at obligationsserier sædvanligvis er åbne i en vis periode i begyndelsen af løbetiden, og at der forfalder eller kan forfalde ekstraordinære afdrag. Det vil ikke være noget problem at inddrage disse momenter, men da det vil gøre fremstillingen mere kompliceret, har vi valgt at betragte en mere ideel situation for at fremhæve, hvorledes rentesregning og sandsynlighedsregning kan kombineres, når der indgår stokastiske elementer.

2. Udtrækning af obligationer

Et sædvanligt annuitetslån er karakteriseret ved løbetiden m terminer, hovedstolen R_0 og den nominelle rente r. Ydelsen Y er da $Y = R_0/a_{\overline{m}|r}$, hvor $a_{\overline{m}|r} = (1 - v_r^m)/r$ betegner kontantværdien af en efterbetalt annuitet beregnet med den nominelle rente r, og $v_r = 1/(1+r)$ er diskonteringsfaktoren. Afdraget ved den j'te termin er $A_j = Yv_r^{m-j+1}$, der således udgør en andel på

$$p_j = v_r^{m-j+1}/a_{\overline{m}|r}, \quad j = 1, \ldots, m \tag{2.1}$$

af hovedstolen. Sandsynlighedsfordelingen (2.1) spiller således en hel central rolle ved vurderingen af, hvorledes afdragene forfalder, og dermed hvorledes de tilhørende obligationer udtrækkes.

Lad os da betragte en obligationsudstedende institution der udsteder N enslydende obligationer af pålydende R_0 med en løbetid på m terminer og en pålydende rente på r. Ved den j'te termin svarer de samlede erlagte afdrag $NA_j = R_0 \cdot N \cdot p_j$ til, at man kan indfri $N_j = N \cdot p_j$ obligationer til kurs 100. Dette sker da ved, at man ved lodtrækning udtrækker N_j obligationer af de endnu ikke indfriede $N - \sum_{l=1}^{j-1} N_l$ obligationer.

For en tilsvarende obligationsinvestor, der på udstedelsestidspunktet har anskaffet n af de nævnte obligationer, er situationen den, at han vil observere, at antal udtrukne obligationer $X_1, \ldots, X_m$ ved de m terminer er stokastisk, $n = \sum_{j=1}^{m} X_j$. Betegner $T_1, \ldots, T_n$ udtrækningstidspunkterne for de n obligationer, er altså $X_j = \sum_{l=1}^{n} I(T_l = j)$, idet $I(A)$ betegner indikatorfunktionen for hændelsen A. Ved simpel kombinatorik følger da, at

$$P\{X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m\} = \prod_{l=1}^{m} \binom{N_l}{x_l} \Big/ \binom{N}{n}, \tag{2.2}$$

hvorfor den simultane fordeling af antal udtrukne obligationer $(X_1, \ldots, X_m)$ er en såkaldt m-dimensional hypergeometrisk fordeling. I praktiske situationer er antal udstedte obligationer N ofte meget stor. Når N vokser mod uendelig, konvergerer sandsynligheden (2.2) mod

$$P\{X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m\} = \binom{n}{x_1, \ldots, x_m} p_1^{x_1} \cdots p_m^{x_m}, \tag{2.3}$$

hvilket er en polynomialfordeling. Det betyder, at når antal cirkulerende obligationer er meget stort, kan vi opfatte $T_1, \ldots, T_n$ som værende uafhængige med fælles fordeling (2.1) svarende til, at $(X_1, \ldots, X_m)$ er polynomialfordelt. Dette letter betydeligt visse af de følgende resultater.

Lad T være en stokastisk variabel der repræsenterer udtrækningstidspunktet for en enkelt obligation og således har fordeling (2.1). Det forventede udtrækningstidspunkt er da

$$\begin{aligned} ET &= \sum_{j=1}^{m} j p_j = \left(\sum_{j=1}^{m} j v_r^{m-j+1} \right) \Big/ a_{\overline{m}|r} \\ &= m - D(r, m) + 1 , \end{aligned}$$

hvor $D(r, m) = \sum_{j=1}^{m} j v_r^j / a_{\overline{m}|r}$ er obligationens varighed eller »duration«, jf. Grosen og Møller (1981), beregnet ved den nominelle rente r. For obligationer med samme løbetid udtrækkes lavtforrentede obligationer altså tidligere end højt forrentede obligationer, idet den nominelle varighed af højt forrentede obligationer er mindre end den tilsvarende varighed for de lavtforrentede obligationer. Tilsvarende finder man, at variansen på udtrækningstidspunktet er bestemt ved

$$\text{Var}\, T = \left(\sum_{j=1}^{m} j^2 v_r^j \right) \Big/ a_{\overline{m}|r} - (D(r, m))^2 ,$$

der således er den varians, der svarer til den nominelle varighed, når varigheden opfattes som en middelværdi.

Ved traditionelle overvejelser vedrørende kurs og effektiv rente ved obligationsinvesteringer er kursen $k = k(r, i_0, m)$, den effektive rente i_0, løbetiden m og den nominelle rente r, knyttet sammen via ligningen

$$k = k(r, i_0, m) = a_{\overline{m}|i_0} / a_{\overline{m}|r} , \tag{2.4}$$

der også entydigt bestemmer i_0 ud fra $k > 0$, når m og r er givet. Denne beregningsmetode forudsætter imidlertid, at investor modtager de løbende afdrag på de tilhørende annuitetslån. Når obligationerne i stedet udtrækkes frem for at afdragene fordeles på alle obligationerne, kan investor ikke være sikker på at opnå den til kursen svarende effektive rente ifølge (2.4). Besidder investor 1 obligation, der udtrækkes til tid T, og som er anskaffet til kurs k, bliver den realiserede effektive rente $I = I(T)$ bestemt af ligningen

$$k = ra_{\overline{T}|I} + v_I^T . \tag{2.5}$$

Vi antyder her og i det følgende, at den realiserede effektive rente I er stokastisk ved valg af stort bogstav. Det er ikke muligt at angive et eksplicit udtryk for I som funktion af T, men I er entydigt bestemt ud fra k. Det er imidlertid også muligt at opfatte højresiden af (2.5) som en funktion af en vilkårlig subjektiv rentefod i, og vi skriver da

$$K_T(i) = ra_{\overline{T}|i} + v_i^T . \tag{2.6}$$

Højresiden er nu kun stokastisk gennem udtrækningstidspunktet, idet vi bruger en fast kalkulationsrentefod i. Når T har fordeling (2.1), finder vi for en vilkårlig fast kalkulationsrente i, at

$$\begin{aligned} EK_T(i) &= \frac{r}{i} + \left(1 - \frac{r}{i}\right) Ev_i^T \\ &= \frac{r}{i} + \left(1 - \frac{r}{i}\right) \sum_{j=1}^{m} v_i^j v_r^{m-j+1} / a_{\overline{m}|r} \\ &= a_{\overline{m}|i} / a_{\overline{m}|r} \\ &= k(r, i, m) \end{aligned} \tag{2.7}$$

efter en simpel omskrivning. Dette svarer helt til det ventede resultat, idet kursen $k(r, i, m)$ netop angiver kontantværdien af annuitetsydelserne vurderet ved renten i. Ud fra (2.6) og fordelingen (2.1) finder vi videre, at variansen er givet ved

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2(r, i, m) \\ &= \operatorname{Var} K_T(i) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (ra_{\overline{j}|i} + (1+i)^{-j})^2 v_r^{m-j+1} / a_{\overline{m}|r} - (a_{\overline{m}|i} / a_{\overline{m}|r})^2 \\ &= ((i-r)/i)^2 \{ (v_r^m - v_i^{2m}) / ((1+i)^2 - (1+r)) \} / a_{\overline{m}|r} - \left(k(r, i, m) - \frac{r}{i} \right)^2 . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dette udtryk for variansen på kapitalværdien er også gengivet i Eriksen (1967) og Okkels Hansen (1975, 1977).

Når investor på investeringstidspunktet køber n enslydende obligationer af den betragtede type til kurs k, bliver den realiserede effektive rente $I_n = I_n(T_1, \ldots, T_n) = I_n(X_1, \ldots, X_m)$ bestemt af ligningen

$$\begin{aligned} k &= r\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\overline{T_j}|I_n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_{I_n}^{T_j} \\ &= r\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} X_j a_{\overline{j}|I_n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} X_j v_{I_n}^{j}\,. \end{aligned}$$

Indfører vi videre $K_n(i) = K_{T_1,\ldots,T_n}(i)$ givet ved

$$\begin{aligned} K_n(i) &= r\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\overline{T_j}|i} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_i^{T_j} \\ &= r\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} X_j a_{\overline{j}|i} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} X_j v_i^{j} \end{aligned} \tag{2.9}$$

er den effektive rente således bestemt af ligningen $k = K_n(I_n)$. Den eksakte fordeling af I_n kan således bestemmes ud fra (2.2), idet der til ethvert udfald af $(X_1, \ldots, X_m)$ svarer præcis en løsning til ligningen $k = K_n(I_n)$. Imidlertid kan det i praksis være vanskeligt at bestemme denne eksakte fordeling af I_n, idet der vil være $\binom{n+m-1}{m-1}$ forskellige mulige udfald af $(X_1, \ldots, X_m)$, således at der skal løses et tilsvarende antal ligninger. Hvis f.eks. $n = 1000$ og $m = 40$, er der $\binom{1039}{39}$ mulige udfald af $(X_1, \ldots, X_m)$, hvilket selv på en moderne datamaskine er vanskeligt at håndtere. Selv om det er vanskeligt at bestemme den eksakte fordeling af I_n, vil der dog altid gælde, at $i_m \leq I_n \leq i_1$, hvor i_1 og i_m er bestemt af ligningerne $k = ra_{\overline{1}|i} + v_i$ og $k = ra_{\overline{m}|i} + v_i^m$ svarende til at alle obligationer udtrækkes ved den første henholdsvis sidste termin. Renterne i_1 og i_m kan derfor betegnes som de mest optimistiske og pessimistiske effektive renter, men derudover er de af begrænset betydning.

Vi skal derfor i det følgende koncentrere os om asymptotiske approksimationer. I den forbindelse nævnte vi ovenfor, at (2.2) kan approksimeres med (2.3), når N er meget stor. Det betyder, at vi kan opfatte de enkelte udtrækningstidspunkter $T_1, \ldots, T_n$ som værende uafhængige med fordeling (2.1), og det følger da af den centrale grænseværdisætning fra sandsynlighedsregningen, at for en given kalkulationsrentefod i er $K_n(i)$ asymptotisk normalfordelt med middelværdi $k(r, i, m) = a_{\overline{m}|i}/a_{\overline{m}|r}$ og varians $\sigma^2(r, i, m)/n$ for $n \to \infty$. Når n er stor, kan man altså approksimere fordelingen af $K_n(i)$ med en normalfordeling med middelværdi $a_{\overline{m}|i}/a_{\overline{m}|r}$ og varians $\sigma^2(r, i, m)/n$. Det resultat kan også ses som en følge af, at polynomialfordelingen (2.3) kan approksimeres med en normalfordeling, når n er stor. Alternativt kan nævnes, at den hypergeometriske fordeling (2.2) kan approksimeres med en normalfordeling af samme type som ved polynomialfordelingen (2.3), forudsat at både N og n vokser mod uendelig, og at forholdet n/N nærmer sig 0, således at investor besidder en forsvindende andel af det samlede antal cirkulerende obligationer.

Idet vi i det følgende skal gøre brug af denne normale approksimation, skal vi her til sidst angive, hvornår den må regnes for god. Generelt regner man med, at polynomialfordelingen (2.3) kan approksimeres med den tilhørende normalfordeling, når $np_j \geqq 5$ for $j=1,\ldots,m$. Da $p_j = v_r^{m-j+1}/a_{\overline{m}|r}$ er voksende i j, skal $n \geqq 5a_{\overline{m}|r}/v_r^m = 5\{(1+r)^m - 1\}/r$ for at approksimationen kan regnes for rimelig god.

3. Den effektive rente

3.1. *Hele løbetiden som investeringshorisont*

Vi skal i dette afsnit studere, hvorledes den realiserede effektive rente $I_n = I_n(T_1,\ldots,T_n)$ opfører sig, når n vokser. Hovedresultatet er, at I_n er approksimativt normalfordelt, og vi skal illustrere, hvorledes dette kan benyttes til at skønne over det antal obligationer, det er nødvendigt at anskaffe for at opnå et krævet minimumsafkast med en vis sikkerhed.

Ved en investering i n enslydende obligationer til kurs k, er den effektive rente i_0 bestemt af ligningen $k = k(r, i_0, m) = a_{\overline{m}|i_0}/a_{\overline{m}|r}$, mens den realiserede effektive rente $I_n = I_n(T_1,\ldots,T_n)$ er bestemt af ligningen $k = K_n(I_n)$, hvor $K_n(\cdot)$ er givet ved (2.9). Intuitivt forventer man, at I_n nærmer sig i_0, når n vokser. Dette er korrekt, idet der gælder følgende sætning.

Sætning 1. $I_n \to i_0$ næsten sikkert for $n \to \infty$, hvilket betyder, at $P\{I_n \to i_0 \text{ for } n \to \infty\} = 1$.

Bevis. For en vilkårlig kalkulationsrentefod i gælder, at $K_n(i) \to k(r, i, m)$ næsten sikkert ifølge de store tals lov og (2.7). For enhver værdi af n og ethvert udfald af $(T_1,\ldots,T_n)$ er $K_n(\cdot)$ en bijektiv, kontinuert, strengt aftagende funktion K_n: $]-1,\infty[\curvearrowright]0,\infty[$. K_n^{-1} er således veldefineret, og $I_n = K_n^{-1}(k)$. Idet $K_n^{-1}(\cdot)$ har en afledet, der er ligeligt begrænset i n på ethvert interval af formen $[\varepsilon,\infty[$, $\varepsilon > 0$, gælder der fra et vist trin, at $|i_0 - I_n| \leqq C|K_n(i_0) - k|$ for en passende konstant C. Da $K_n(i_0) \to k$ for $n \to \infty$, er sætningen vist. □

Ved hjælp af resultatet i Sætning 1 er det da muligt at vise, at den realiserede effektive rente I_n kan beskrives ved en normalfordeling, når n er stor.

Sætning 2. Den realiserede effektive rente I_n er asymptotisk normalfordelt med middelværdi i_0 og varians $\tau^2(r, i_0, m)/n$, hvor

$$\tau^2(r, i_0, m) = \sigma^2(r, i_0, m)/\{v_{i_0} k(r, i_0, m) D(i_0, m)\}^2 . \tag{3.1.1}$$

Bevis. Ifølge den centrale grænseværdisætning er $K_n(i_0)$ fordelt som $N(k(r, i_0, m), \sigma^2(r, i_0, m)/n)$ asymptotisk, og den effektive rente I_n er bestemt af ligningen $K_n(I_n) = k = k(r, i_0, m)$. Ifølge Taylors formel er da

$$k - K_n(i_0) = K_n(I_n) - K_n(i_0) = K_n'(i_0)(I_n - i_0) + K_n''(I_n^*)(I_n - i_0)^2/2 ,$$

hvor I_n^* ligger mellem I_n og i_0. Altså er

$$\sqrt{n}(I_n - i_0) = \{\sqrt{n}(k - K_n(i_0))/K_n'(i_0)\}\{1 + 0.5K_n''(I_n^*)(I_n - i_0)/K_n'(i_0)\}^{-1} .$$

Den første faktor konvergerer i fordeling mod en normalfordeling med middelværdi 0 og varians $\sigma^2(r, i_0, m) \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial i_0} k(r, i_0, m)\right)^2$, og den anden faktor går i sandsynlighed mod 1 ifølge Sætning 1, da $K_n''(\cdot)$ er ligeligt begrænset i n i en omegn af i_0. Idet $k(r, i_0, m) = a_{\overline{m}|i_0}/a_{\overline{m}|r}$ fås, at $\frac{\partial}{\partial i_0} k(r, i_0, m) = v_{i_0} k(r, i_0, m) D(i_0, m)$. □

Variansudtrykket $\sigma^2(r, i_0, m)/\{v_{i_0} k(r, i_0, m) D(i_0, m)\}^2$ har en naturlig fortolkning $\sigma(r, i_0, m)/k(r, i_0, m)$ angiver usikkerheden (spredningen) på kapitalværdien pr. investeret krone. Usikkerheden på den realiserede effektive rente er således på nær korrektionsfaktoren v_{i_0} (der skyldes, at vi regner med diskret rentetilskrivning og ikke kontinuert) identisk med usikkerheden på kapitalværdien pr. investeret krone divideret med obligationens varighed. Dette illustrerer på ny som også påvist af Grosen og Møller (1981), at varigheden er et centralt mål for obligationens tidsdimension.

Ud fra spredningen $\tau = \tau(r, i_0, m)$ er det muligt at skønne over det antal obligationer, det er nødvendigt at anskaffe for med en given sikkerhed at opnå en vis minimumsforrentning. Ønsker man med en sandsynlighed på $1-\varepsilon$ at opnå en minimumsforrentning på $i < i_0$, er det nødvendigt at anskaffe $n = (y_{1-\varepsilon}\tau/(i - i_0))^2$ obligationer, hvor $y_{1-\varepsilon}$ betegner $1-\varepsilon$ fraktilen i normalfordelingen.

Til illustration af dette har vi i Tabel 1 angivet det nødvendige antal obligationer for forskellige løbetider, forskellige kuponrenter og forskellige ønskede minimumsforrentninger, når der ønskes en sikkerhed på 95% eller 99%. Alle regninger er foretaget med en effektiv rente på 10,5% pr. termin. Det fremgår, at det nødvendige antal obligationer falder væsentligt med stigende kuponrente svarende til, at den direkte rente stiger, således at udtrækningselementet formindskes.

Tabel 1. Det nødvendige antal obligationer at anskaffe for forskellige obligationstyper for med 95% henholdsvis 99% sandsynlighed at opnå en forrentning på 10,25%, 10,4% og 10,45%, når den effektive rente er 10,5% pr. termin. Tal i parentes kan kun opfattes som en slags rettesnor.

Løbetid i terminer	Nom. rente	Kurs	Sikkerhed 95%			Sikkerhed 99%		
			10,25%	10,4%	10,45%	10,25%	10,4%	10,45%
	3,5%	72,32	581	3630	14522	1162	7261	29047
10	5%	77,89	304	1903	7612	609	3807	15227
	6%	81,72	183	1145	4578	366	2290	9158
	3,5%	57,91	606	3790	15159	1213	7580	30322
20	5%	66,05	271	1694	6775	542	3388	13551
	6%	71,76	(147)	919	3676	294	1838	7353
	3,5%	49,19	568	3551	14203	1136	7102	28410
30	5%	58,85	(215)	1343	5370	430	2686	10742
	6%	65,73	(105)	655	2619	(210)	1310	5238
	3,5%	43,78	500	3126	12502	1000	6252	25008
40	5%	54,48	(159)	995	3982	(319)	1991	7965
	6%	62,13	(70)	(435)	1741	(139)	871	3482
17	3,5%	61,49	608	3803	15211	1902	7607	30427
10	5%	77,89	304	1903	7612	609	3807	15227
8	6%	84,37	185	1153	4613	369	2307	9228

Videre bemærkes det, at det nødvendige antal obligationer vokser kraftigt, når den krævede minimumsforrentning nærmer sig den effektive rente. Ønsker man med en sikkerhed på 99% at opnå en forrentning på 10,45%, er det således nødvendigt at investere millionbeløb for at opnå en sådan garanti, selv om investeringen foretages i obligationer af stykstørrelse kr. 1000.

Tallene i Tabel 1 giver også en fornemmelse af, hvorledes sikkerheden og garantien ved en given investering kan forbedres, hvis investeringen f.eks. konverteres fra obligationer af pålydende kr. 20.000 til obligationer af pålydende kr. 1000. En sådan konvertering er særdeles aktuel i forbindelse med litranumrenes og stykstørrelsernes bortfald, når Værdipapircentralen begynder sit virke fra foråret 1983. I forbindelse med indkaldelsen og annulleringen af de fysiske obligationer opdeles nemlig hver serie i andele af kr. 1000 eller tilsvarende afhængig af, hvad der har været den mindste stykstørrelse i den pågældende serie. Hvis investor således har foretaget en investering i obligationer af pålydende kr. 20.000, betyder overgangen til andele af kr. 1000, at hver enkelt fysisk obligation erstattes af 20 andele af kr. 1000. En sådan opdeling har naturligvis ingen betydning for det forventede afkast, men har som vist i Tabel 1 betydning for de tilfældige afvigelser, man kan komme ud for. Hvis investor f.eks. har anskaffet $n = (y_{1-\varepsilon}\tau/(i-i_0))^2$ obligationer af pålydende kr. $q \cdot 1000$ og dermed opnået et minimumsafkast på i med en sandsynlighed på $1-\varepsilon$, betyder konverteringen til andele af kr. 1000, at garantien for et minimumsafkast på i forbedres fra $1-\varepsilon$ til $1-\varepsilon'$, hvor ε' er bestemt af $y_{1-\varepsilon'} = \sqrt{q}\,y_{1-\varepsilon}$. Alternativt kan effekten af konverteringen udtrykkes ved, at det garanterede minimumsafkast på i øges til $i' = i_0 + (i-i_0)/\sqrt{q}$, forsat med en sikkerhed på $1-\varepsilon$. På den anden side betyder konverteringen også, at sandsynligheden for afkast, der overstiger den effektive rente, tilsvarende formindskes. Effekten af omlægningen af udtrækningssystemet kan da enten måles ved en forbedring af garantisandsynligheden fra $1-\varepsilon$ til $1-\varepsilon'$ eller ved en øgning i minimumsafkastet fra i til i'. Til illustrationen af dette kan nævnes, at hvis $i_0 = 10{,}5\%$ og $i = 10{,}25\%$, bliver i' lig med 10,39%, 10,42% og 10,44%, når q er lig med 5, 10 og 20, mens i' bliver lig med 10,46%, 10,47% og 10,48%, når $i = 10{,}4\%$. Der kan således opnås en væsentlig forbedring af garantien ved at investeringen opdeles på obligationer af mindste størrelse.

Sammenlignes resultaterne i Tabel 1 med de tilsvarende resultater i Okkels Hansen (1977) og Kier Christensen (1982), ses det, at de er i overensstemmelse med Okkels Hansens resultater. Dette er helt naturligt, idet

$$[y_{1-\varepsilon}\tau(r,i_0,m)/(i-i_0)]^2 = \left[y_{1-\varepsilon}\sigma(r,i_0,m)\Big/\left(\frac{\partial}{\partial i_0}k(r,i_0,m)(i-i_0)\right)\right]^2$$
$$\approx [y_{1-\varepsilon}\sigma(r,i_0,m)/(k(r,i,m)-k(r,i_0,m))]^2 ,$$

hvilket var det udtryk, Okkels Hansen (1977) benyttede. Det ser dog fortsat ud til, at det krævede antal obligationer i Kier Christensen (1982) er for stort.

Når man fortolker antallene i Tabel 1, bør man være opmærksom på, at tallene er udregnet på baggrund af en approksimation med en normalfordeling, og at denne approksimation kun kan regnes for god, når $n \geq 5\{(1+r)^m - 1\}/r$. De antalsværdier, der er under denne nedre grænse, er derfor ikke helt pålidelige og kan kun opfattes som en slags rettesnor, og de er derfor angivet i parentes.

Ofte anbefales det skattepligtige investorer at investere i obligationer med lav nominel rente, idet den effektive rente efter skat er større på grund af den skattefri kursgevinst. Ved sådanne overvejelser bør man dog ifølge Tabel 1 være opmærksom på, at der skal anskaffes betydelig flere lavt forrentede obligationer end højt forrentede, for at man kan være rimelig sikker på et vist minimumsafkast.

Af Tabel 1 fremgår det dog ikke klart, hvorledes spredningen τ og dermed det nødvendige antal obligationer afhænger af restløbetiden m. Af (2.8) ses det, at

$\tau(r, i_0, 1) = 0$ og at $\tau(r, i_0, m) \to 0$ for $m \to \infty$. Dette sidste svarer til, at kursen konvergerer mod r/i_0, således at den direkte rente bliver identisk med den effektive rente, og udtrækningen har da ingen betydning. Der må derfor findes en værdi af m, således at $\tau(r, i_0, m)$ er størst mulig. Vi vil betegne denne løbetid med m^*, og det betyder, at ud fra et rent udtrækningsrisikomæssigt synspunkt er det mest usikkert at investere i obligationer med en løbetid på m^*. Vi har i Fig. 1 for $i_0 = 10{,}5\%$ angivet spredningen $\tau(r, i_0, m)$ som funktion af m for forskellige kuponrenter r. For en effektiv rente på 10,5% pr. termin er m^* henholdsvis 17,10 og 8 terminer, når kuponrenten er henholdsvis 3,5%, 5% og 6%. Af Fig. 1 fremgår det videre, at det kun er for meget langt løbende obligationer, at udtrækningsrisikoen er negligerbar. Selv for forholdsvis kortløbende obligationer udgør udtrækningen et væsentligt risikoelement. Hørende til løbetiderne m^* har vi i Tabel 1 angivet det nødvendige antal obligationer svarende til de øvrige eksempler i Tabel 1, og disse tal kan således opfattes som øvre grænser for det nødvendige antal obligationer. Disse øvre grænser er uafhængige af løbetiden og afhænger kun af kuponrenten og den effektive rente.

Fig. 1 illustrerer, hvorledes udtrækningsusikkerheden er afhængig af kuponrenten, når vi fastholder den effektive rente. Tilsvarende resultater er gældende for fastholdt kuponrente og varierende effektiv rente, således at først, at kurverne har samme skæve form og usikkerheden øges med forskellen mellem den effektive rente og kuponrenten.

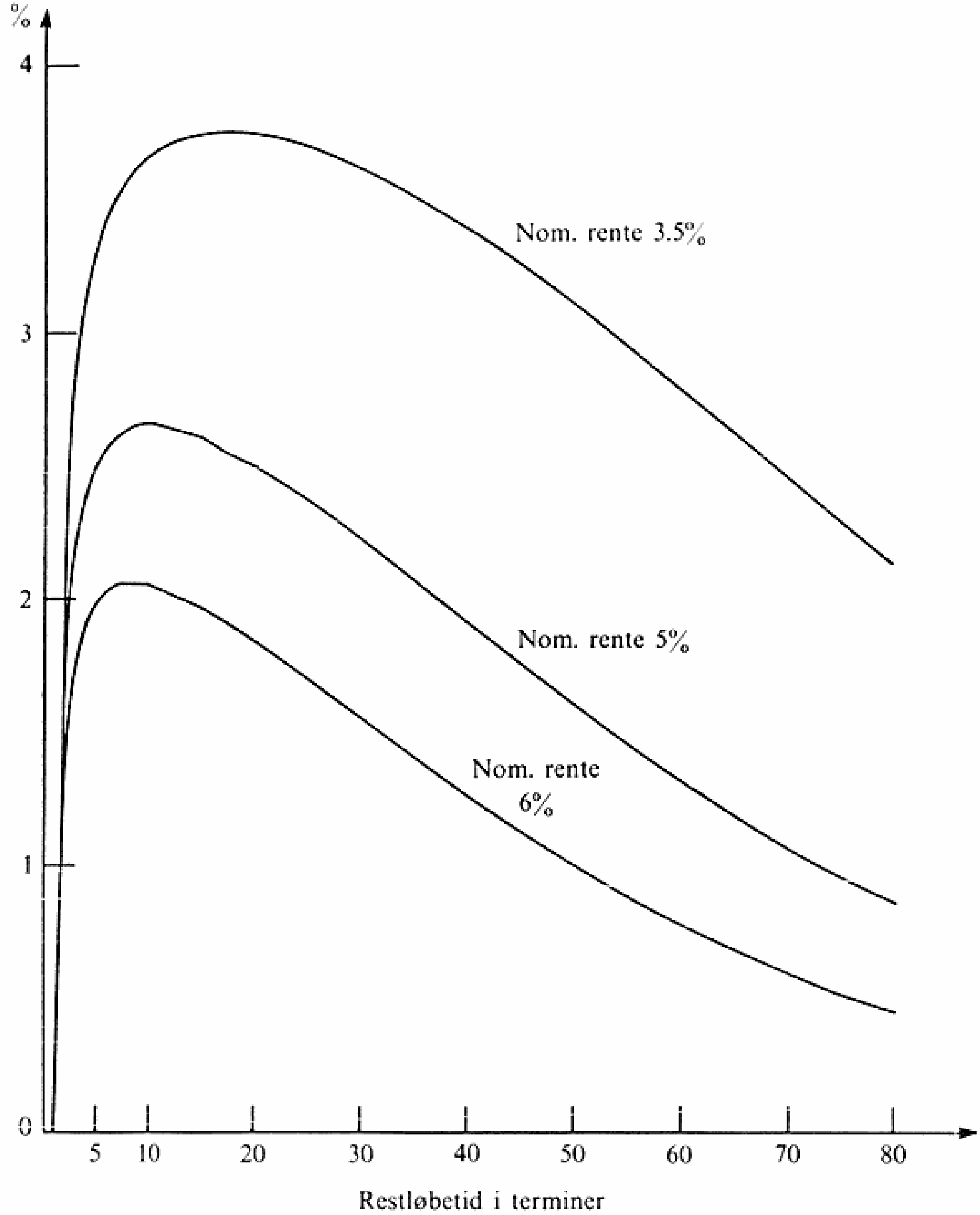
3.2. 1 *termin som investeringshorisont*

Vi har indtil videre udelukkende betragtet den situation, hvor investor beholdt obligationerne indtil udløb, eller indtil de blev udtrukket. Ofte sker der det, at investor afhænder obligationerne inden udløb, eller inden de bliver udtrukket. Vi skal i afsnit 3.3 betragte en vilkårlig investeringshorisont, men inden da skal vi studere den korteste investeringshorisont der indeholder udtrækningselementet, nemlig 1 termin.

Når der resterer m terminer af en obligation med kuponrente r, og den effektive rente er i_0, gælder der følgende fundamentale ligning

$$\begin{aligned} i_0 = {} & r/k(r, i_0, m) + (k(r, i_0, m-1) - k(r, i_0, m))/k(r, i_0, m) \\ & + p_1(1 - k(r, i_0, m-1))/k(r, i_0, m), \end{aligned}$$

hvor $k(r, i_0, m) = a_{\overline{m}|i_0}/a_{\overline{m}|r}$. Den er analog med den fra livsforsikringsmatematikken kendte Thieles differensligning, og den udtrykker den effektive rente som en sum af den direkte rente, kursgevinsten og udtrækningsgevinsten. Sandsynligheden $p_1 = v_r^m/a_{\overline{m}|r}$ er sandsynligheden for at obligationen udtrækkes ved den førstkommende termin.



Figur 1. Asymptotisk standardafvigelse på realiseret effektiv rente som funktion af restløbetiden. Obligationerne holdes indtil udløb. Effektiv rente 10,5% *pr. termin.*

En investor, der køber n obligationer, når der resterer m terminer, og sælger obligationerne 1 termin senere, vil være sikker på at få den direkte rente $r/k(r, i_0, m)$

og kursgevinsten $(k(r, i_0, m-1)-k(r, i_0, m))/k(r, i_0, m)$, forudsat at den effektive rente ikke ændrer sig. Udtrækningsgevinsten $p_1(1-k(r, i_0, m-1))/k(r, i_0, m)$ er derimod usikker. Med samme notation som tidligere bliver den opnåede rente på en termin, $I_{n,1}$, stokastisk, og

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= r/k(r, i_0, m)+(k(r, i_0, m-1)-k(r, i_0, m))/k(r, i_0, m) \\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(T_j=1)(1-k(r, i_0, m-1))/k(r, i_0, m)\,, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

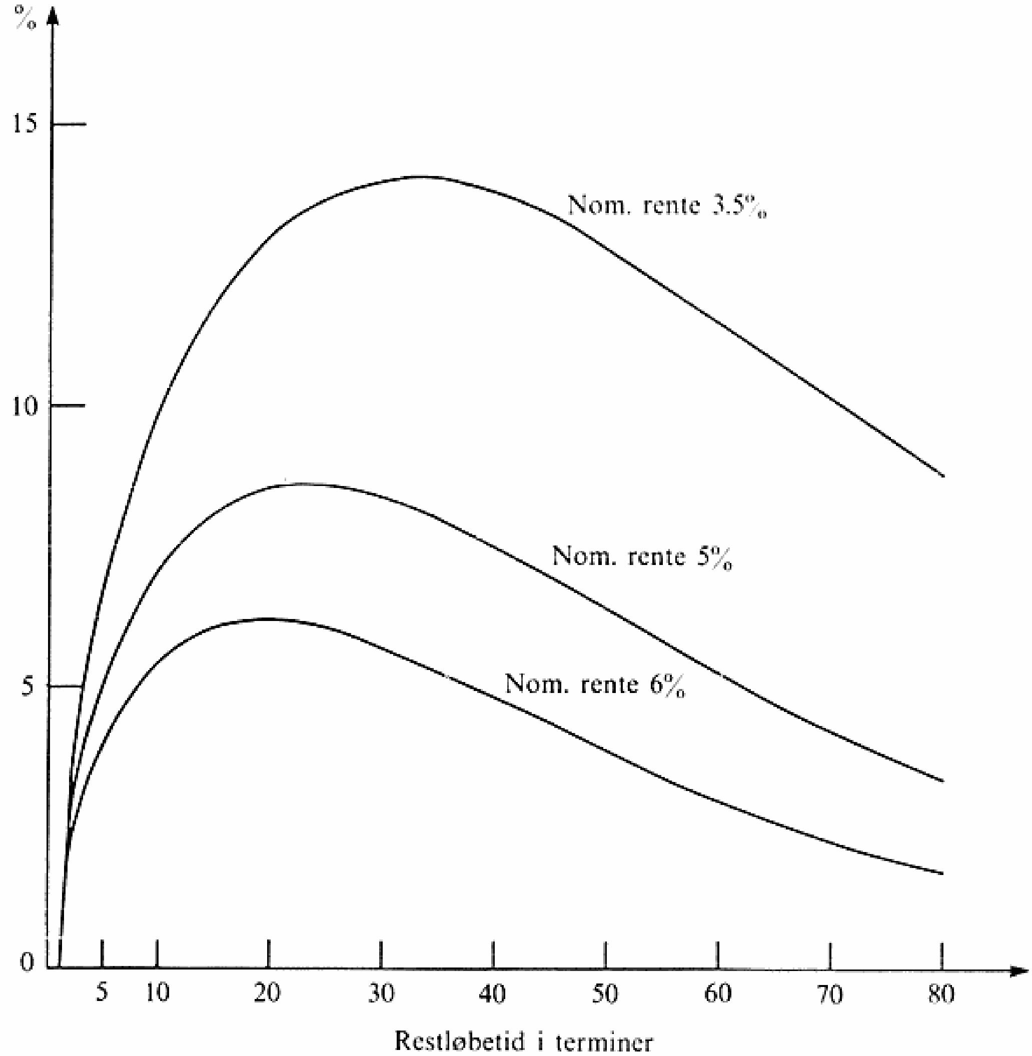
hvor $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(T_j=1)$ angiver den andel af de n obligationer, der udtrækkes ved den først kommende termin. Idet vi fortsat opfatter $T_1, \ldots, T_n$ som uafhængige med fælles fordeling (2.1), bliver $EI_{n,1}=i_0$ og $\operatorname{Var} I_{n,1}=\tau^2(r, i_0, m, 1)/n$, hvor

$$\tau^2(r, i_0, m, 1) = \{(1-k(r, i_0, m-1))/k(r, i_0, m)\}^2 p_1(1-p_1) \tag{3.2.2}$$

svarende til, at antal udtrukne obligationer er binomialfordelt. Det følger derfor også i dette tilfælde, at $I_{n,1}$ er asymptotisk normalfordelt med middelværdi og varians som angivet. Til illustration af usikkerheden på $I_{n,1}$ har vi i Fig. 2 for $i_0=10{,}5\%$ angivet $\tau(r, i_0, m, 1)$ som funktion af m for forskellige kuponrenter r. Det fremgår, at i sammenligning med Fig. 1 er usikkerheden på den effektive rente betydelig større, når obligationen kun holdes 1 termin, end når den holdes, indtil den bliver udtrukket. Forklaringen er naturligvis, at fordelingen af $I_{n,1}$ er meget skæv. Der er med en lille sandsynlighed mulighed for at opnå en meget høj forrentning, hvis obligationen udtrækkes. Denne forrentning kan i visse tilfælde være på mere end 100%. Til gengæld er der en forholdsvis stor sandsynlighed for at opnå en forrentning, der ligger lidt under den effektive rente. Beholdes obligationen derimod indtil udløb, er det ikke så afgørende, om obligationen udtrækkes ved den førstkommende termin eller ved en af de resterende, og usikkerheden på den effektive rente bliver derfor ikke så stor. Hvis investors investeringshorisont derfor er 1 termin, bør man således alene ud fra et rent udtrækningsmæssigt synspunkt være varsom med at investere i realkreditobligationer, med mindre disse har en restløbetid på 1 termin.

3.3. *Vilkårlig investeringshorisont*

Vi skal til sidst betragte den generelle situation, hvor investor har en investeringshorisont af vilkårlig længde l, hvor $1 \leqq l \leqq m$. Det betyder, at investor antages at afhænde alle ikke udtrukne obligationer efter l terminer, og vi skal antage, at dette kan lade sig gøre til en kurs bestemt ud fra den effektive rente i_0 på investeringstidspunktet. Vi ser således fortsat bort fra muligheden af en renteændring i investeringsperioden. Kursen på afhændelsestidspunktet, hvor der fortsat resterer



Figur 2. Standardafvigelse på realiseret effektiv rente som funktion af obligationens restløbetid. Obligationerne holdes 1 termin. Effektiv rente 10,5% pr. termin.

$m-l$ terminer, er således $k(r, i_0, m-l) = a_{\overline{m-l}|i_0} / a_{\overline{m-l}|r}$. Kapitalværdien udregnet med rentefoden i af en investering i en obligation bliver da

$$\begin{aligned} K_T(i) &= r a_{\overline{T \wedge l}|i} + v_i^{T \wedge l} \{ I(T \leqq l) + k(r, i_0, m-l) I(T > l) \} \\ &= \frac{r}{i} + v_i^{T \wedge l} \left\{ I(T \leqq l) + k(r, i_0, m-l) I(T > l) - \frac{r}{i} \right\}, \end{aligned}$$

hvor $T \wedge l = \min(T, l)$. Man finder da, at

$$EK_T(i) = \{a_{\overline{l}|i} + v_i^l a_{\overline{m-l}|i_0}\}/a_{\overline{m}|r} \,. \tag{3.3.1}$$

og

$$\begin{aligned}\sigma^2(r,i,m,l) &= \operatorname{Var} K_T(i) \\ &= ((i-r)/i)^2 \{(v_r^m - v_i^{2l} v_r^{m-l})/((1+i)^2 - (1+r))\}/a_{\overline{m}|r} \\ &\quad + v_i^{2l}\left\{k(r,i_0,m-l) - \frac{r}{i}\right\}^2 a_{\overline{m-l}|r}/a_{\overline{m}|r} \\ &\quad - \left(EK_T(i) - \frac{r}{i}\right)^2 .\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Hvis en investor derfor køber n obligationer, når der resterer m terminer, og sælger de ikke udtrukne obligationer, når der netop resterer $m-l$ terminer, vil den gennemsnitlige kontantværdi

$$\begin{aligned}K_n(i) &= K_{T_1,\ldots,T_n}(i) \\ &= r\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\overline{T_j \wedge l}|i} \\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_i^{T_j \wedge l}\{I(T_j \leqq l) + k(r,i_0,m-l) I(T_j > l)\}\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

være approksimativt normalfordelt med middelværdi $EK_T(i)$ og varians $\sigma^2(r,i,m,l)/n$ for $n \to \infty$.

Den effektive rente, $I_{n,l}$, der realiseres, når der tages hensyn til udtrækningen, bliver bestemt af ligningen $k(r,i_0,m) = K_n(I_{n,l})$, hvor $K_n(\cdot)$ nu er givet ved (3.3.3). Som i Sætning 2 følger det, at $I_{n,l}$ bliver asymptotisk normalfordelt med middelværdi i_0 og varians $\tau^2(r,i_0,m,l)/n$, hvor

$$\begin{aligned}\tau^2(r,i_0,m,l) &= \sigma^2(r,i_0,m,l) \Big/ \left\{\frac{\partial}{\partial i} EK_T(i)\Big|_{i=i_0}\right\}^2 \\ &= \sigma^2(r,i_0,m,l)/\{v_{i_0} D(i_0,m,l) k(r,i_0,m)\}^2\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

og

$$D(i_0,m,l) = \{a_{\overline{l}|i_0} D(i_0,l) + l v_{i_0}^l a_{\overline{m-l}|i_0}\}/a_{\overline{m}|i_0} \,.$$

Disse formler generaliserer såvel (3.1.1) som (3.2.2). Bemærk iøvrigt, at for $l=1$ er det faktisk muligt at løse ligningen $k(r,i_0,m) = K_n(I_{n,1})$ direkte, og man får (3.2.1). Videre noteres det, at (3.3.4) har nøjagtig samme form som (3.1.1), idet $D(i_0,m,l)$ præcis angiver varigheden af betalingsstrømmen $1, 1, \ldots, 1 + a_{\overline{m-l}|i_0}$ på tidspunkterne $1, 2, \ldots, l$ svarende til, at obligationerne afhændes, når der resterer $m-l$ terminer.

Investors investeringshorisont l er ofte fastlagt på forhånd, og den effektive rente er bestemt ud fra markedet. Ved valg af m og r foretages der ofte en række overvejelser, der ikke direkte vedrører udtrækningselementet. Ønsker investor f.eks. at gardere sig mod ændringer i den effektive rente, bør man ifølge varighedsstrategien, jf. Grosen og Møller (1981), vælge m, så $D(i_0, m) = l$, mens skattemæssige overvejelser kan være bestemmende for valg af r. Men ved hjælp af (3.3.2) og (3.3.4) er det også muligt direkte at inddrage udtrækningschancen i valg af m og r, idet afkastets afhængighed af udtrækningerne kan beregnes.

4. Afsluttende bemærkninger

Vi har i det foregående beskrevet, hvorledes man generelt ved hjælp af sandsynlighedsregning kan behandle udtrækning af annuitetsobligationer. Udtrækningen udgør for visse obligationstyper et væsentligt risikoelement, og det er derfor vigtigt at vide, hvor stor denne usikkerhed er. Det blev vist, at den realiserede effektive rente er approksimativt normalfordelt med en standardafvigelse der, på nær en korrektionsfaktor, er standardafvigelsen på kapitalværdien pr. investeret krone divideret med obligationens varighed. Ud fra dette var det da muligt at bestemme det antal obligationer, det er nødvendigt at anskaffe for med en given sikkerhed at opnå en vis minimumsforrentning. Samtidig var det muligt at skønne over den risikomæssige betydning af, at alle obligationsinvesteringer fra foråret 1983 konverteres til andele af mindste stykstørrelse i forbindelse med, at Værdipapircentralen begynder at fungere.

I fremstillingen ovenfor har vi set bort fra en række praktiske forhold på det danske obligationsmarked. Vi har set bort fra, at en obligationsserie kan være åben i en periode før den lukkes, og det endelige forløb af afdragene dermed bliver kendt. Ligeledes har vi set bort fra forekomsten af ekstraordinære afdrag. Ekstraordinære afdrag kan enten være fastlagt på forhånd, således at den underliggende sandsynlighedsfordeling på forhånd er forskellig fra (2.1), eller de kan forekomme på stokastiske tidspunkter, og der må da tages hensyn til, at sådanne afdrag kan betyde, at det samlede antal udtrukne obligationer ved de enkelte terminer ligeledes bliver stokastiske. Endelig har vi hele tiden regnet med en fast effektiv rente og forudsat, at det efter investeringstidspunktet fortsat vil være muligt at afhænde obligationen til en kurs, der svarer til den effektive rente på købstidspunktet. Begrundelsen er, at vi udelukkende har været interesseret i at studere udtrækningschancens indflydelse på det realiserede afkast, men af fremstillingen fremgår det, at der nemt kan tages hensyn til, at obligationerne ikke kan afhændes til en kurs bestemt ud fra den effektive rente på købstidspunktet. Dermed åbnes der mulighed for at studere den kombinerede effekt af udtrækningerne og eventuelle renteændringer.

Derimod har vi koncentreret os om at vise, hvorledes sandsynlighedsregning er af væsentlig betydning ved vurdering af låneforhold, hvori der indgår stokastiske komponenter. Fremstillingen har været centreret omkring annuitetsobligationer, men stokastiske elementer indgår også i en række andre låneformer. Ved sædvanlige pantebreve modtager kreditor løbende afdrag, mens ekstraordinære afdrag og eventuel indfrielse før forfaldsdato forekommer på stokastiske tidspunkter. Pantebrevets effektive rente bliver dermed stokastisk og kan studeres, når forekomsten af ekstraordinære afdrag, indfrielse og evt. misligholdelse er estimeret ud fra en portefølje af passende størrelse. Ved præmieobligationer er hele afkastet stokastisk, og det kan behandles helt analogt til fremstillingen ovenfor. Endelig kan der nævnes statsobligationerne, der er udstedt som gruppelån, hvorved der hvert år udtrækkes 1 gruppe til indfrielse til kurs pari. For disse lån er det muligt helt at eliminere udtrækningsproblematikken ved at købe lige mange obligationer i hver enkelt gruppe. Men det er til gengæld også muligt at spille højt spil ved at placere hele investeringen i en enkelt gruppe. Ved indførelsen af Værdipapircentralen og omlægningen af udtrækningssystemet for statsobligationer bliver dette ikke muligt mere, idet investors portefølje og de tilhørende andele hele tiden vil være jævnt fordelt på de endnu ikke udtrukne grupper. Det betyder, at hvis blot antallet af investors andele er deleligt med antallet af grupper, vil udtrækningselementet i investeringen være fuldstændigt elimineret. Sammenholdt med resultaterne i afsnit 3 er det således selv for små investorer muligt at opnå en garanti for den effektive rente, når der investeres i statsobligationer.

I betragtning af udtrækningschancens væsentlige indflydelse på investors afkast er det forbavsende så få teoretiske og empiriske undersøgelser, der er publiceret om emnet. Gørtz og Balling (1977) har undersøgt, om det danske obligationsmarked er effektivt i forbindelse med udtrækningstidspunkterne, således at kurserne efter udtrækningen falder det man kan forvente. Gørtz og Balling overså, at obligationer først leveres 3 dage efter, de er handlet, og Ankerstjerne og Møller (1982) har i den anledning foretaget en forbedret analyse af det danske marked, der viser, at obligationsmarkedet må regnes for effektivt m.h.t. kursfaldet omkring udtræknings-tidspunktet. Imidlertid er der fortsat nogle åbne spørgsmål. Eksempelvis kunne det være interessant at undersøge, om resultaterne i Fig. 1 og 2 påvirker kursfastsættelsen på det danske obligationsmarked, således at kursen på obligationer med stor udtrækningsrisiko er lidt mindre end den teoretisk rigtige kurs for at kompensere for udtrækningsrisikoen. I den udstrækning der forekommer ekstraordinære afdrag og indfrielser på obligationslånene, kunne det også være interessant at få undersøgt, hvorledes disse forekommer, og om dette påvirker den konkrete kursfastsættelse på børsen, og om markedet er effektivt i den henseende. Dette er blot enkelte af de åbenstående spørgsmål, som det kunne være interessant at få belyst gennem empiriske studier af det danske obligationsmarked.

Litteratur

Ankerstjerne, Johan and Michael Møller. 1982. The price effect of lottery bond redemptions. *Scandinavian Journal of Economics* 84: 117-120.

Eriksen, Arne Jan. 1967. Litt rentelære, belyst ved elementær sannsynlighetsregning, Research Report No. 3, Institute of Mathematics, University of Oslo.

Grosen, Anders og Peder Fredslund Møller. 1981. Fast forrentede fordringers rentefølsomhed og varighed. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 119: 105-125.

Gørtz, Erik and Morten Balling. 1977. The missing price effect of lottery bond redemptions. *Scandinavian Journal of Economics* 79: 338-345.

Kier Christensen, Søren. 1982. Udtrækningschancer i realkreditobligationer. *Finans Invest*, Nr. 4, pp. 26-28.

Okkels Hansen, Jens. 1975. Valg af obligationstype, Hovedopgave fra Handelshøjskolen i Århus.

Okkels Hansen, Jens. 1977. Hvor sikker er udtrækningsgevinsten? *Finans Invest*, Nr. 3, pp. 25-28.

hvorledes disse forekommer, og om dette påvirker den konkrete kursfastsættelse på børsen, og om markedet er effektivt i den henseende. Dette er blot enkelte af de åbenstående spørgsmål, som det kunne være interessant at få belyst gennem empiriske studier af det danske obligationsmarked.

Litteratur

Ankerstjerne, Johan and Michael Møller. 1982. The price effect of lottery bond redemptions. *Scandinavian Journal of Economics* 84: 117-120.

Eriksen, Arne Jan. 1967. Litt rentelære, belyst ved elementær sannsynlighetsregning, Research Report No. 3, Institute of Mathematics, University of Oslo.

Grosen, Anders og Peder Fredslund Møller. 1981. Fast forrentede fordringers rentefølsomhed og varighed. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 119: 105-125.

Gørtz, Erik and Morten Balling. 1977. The missing price effect of lottery bond redemptions. *Scandinavian Journal of Economics* 79: 338-345.

Kier Christensen, Søren. 1982. Udtrækningschancer i realkreditobligationer. *Finans Invest*, Nr. 4, pp. 26-28.

Okkels Hansen, Jens. 1975. Valg af obligationstype, Hovedopgave fra Handelshøjskolen i Århus.

Okkels Hansen, Jens. 1977. Hvor sikker er udtrækningsgevinsten? *Finans Invest*, Nr. 3, pp. 25-28.