Omkostningsminimering i et arbejdssted

Søren Glud Johansen

Institut for Operationsanalyse, Aarhus Universitet

SUMMARY: *The decision problem is to choose a (possibly time varying) production rate and the production time. The input cost is specified as the integral over the production time of a cost rate. When this cost rate has the production rate as the only argument it is shown by convex analysis that cost minimum may be realized by using at most two different production rates. The minimal cost is a convex function of the output. If the input cost rate in addition depends on the time segment (e.g., normal hours and overtime), the situation is analyzed by decomposition.*

1. Indledning

I denne artikel analyseres omkostningsforholdene i et enkelt arbejdssted i en virksomhed med henblik på at afklare, hvorledes arbejdsstedet kan producere med mindst mulige omkostninger, således at der opnås et nyttigt grundlag for virksomhedens planlægning.

Betragtningerne indskrænkes til at omfatte en planperiode for et arbejdssted, som kun producerer ét økonomisk gode, der kaldes X. I den konkrete situation kan X angive et færdigprodukt, et mellemprodukt eller en ydelsesart. Bortset fra det nyttige i at erkende, at X kan angive en righoldighed af forskellige økonomiske goder, er en konkretisering af X (og af arbejdsstedet) imidlertid ikke påkrævet af hensyn til de følgende ræsonnementer.

Arbejdsstedets produktionsomfang i planperioden udtrykkes ved en éndimensional variabel x, som måles i $ME(X)$, hvilket er en forkortelse for »mængdeenheder af X«. Det er et væsentligt budskab i artiklen, at minimalomkostningerne $C(x)$ som hovedregel er en konveks funktion af produktionsomfanget x. Konveksitetsegenskaben er ensbetydende med, at X's grænseomkostninger $MC(x)$ er konstante eller voksende som funktion af x.

I mikroøkonomisk litteratur postuleres det hyppigt, at $C(x)$ forløber som et omvendt S, således at grænseomkostningskurven er U-formet. Danø (1966, pp. 121-131) argumenterer overbevisende for, at dette postulat hviler på en forudsætning om, at

Omkostningsminimering i et arbejdssted

Søren Glud Johansen
Institut for Operationsanalyse, Aarhus Universitet

SUMMARY: *The decision problem is to choose a (possibly time varying) production rate and the production time. The input cost is specified as the integral over the production time of a cost rate. When this cost rate has the production rate as the only argument it is shown by convex analysis that cost minimum may be realized by using at most two different production rates. The minimal cost is a convex function of the output. If the input cost rate in addition depends on the time segment (e.g., normal hours and overtime), the situation is analyzed by decomposition.*

1. Indledning

I denne artikel analyseres omkostningsforholdene i et enkelt arbejdssted i en virksomhed med henblik på at afklare, hvorledes arbejdsstedet kan producere med mindst mulige omkostninger, således at der opnås et nyttigt grundlag for virksomhedens planlægning.

Betragtningerne indskrænkes til at omfatte en planperiode for et arbejdssted, som kun producerer ét økonomisk gode, der kaldes X. I den konkrete situation kan X angive et færdigprodukt, et mellemprodukt eller en ydelsesart. Bortset fra det nyttige i at erkende, at X kan angive en righoldighed af forskellige økonomiske goder, er en konkretisering af X (og af arbejdsstedet) imidlertid ikke påkrævet af hensyn til de følgende ræsonnementer.

Arbejdsstedets produktionsomfang i planperioden udtrykkes ved en éndimensional variabel x, som måles i $ME(X)$, hvilket er en forkortelse for »mængdeenheder af X«. Det er et væsentligt budskab i artiklen, at minimalomkostningerne $C(x)$ som hovedregel er en konveks funktion af produktionsomfanget x. Konveksitetsegenskaben er ensbetydende med, at X's grænseomkostninger $MC(x)$ er konstante eller voksende som funktion af x.

I mikroøkonomisk litteratur postuleres det hyppigt, at $C(x)$ forløber som et omvendt S, således at grænseomkostningskurven er U-formet. Danø (1966, pp. 121-131) argumenterer overbevisende for, at dette postulat hviler på en forudsætning om, at tidsdimensionen ikke er delelig. Sædvanligvis foreligger der delelighed, og postulatets realisme er derfor tvivlsom.

I sin rendyrkede form kræver delelighed i tidsdimensionen, at arbejdsstedets omkostninger er tidshomogene. Herved forstås, at de arbejdsmådeafhængige omkostninger kan specificeres som $k(u) \cdot t$, når intensiteten u benyttes i et tidsinterval af længde t. Intensiteten defineres som den hastighed (med dimensionen $ME(X)$ pr. TE), hvormed X produceres, og $k(u)$ betegner arbejdsstedets omkostningsrate (med dimensionen kr. pr. TE), når intensiteten er u.

Omkostningsraten $k(u)$ er éntydig, hvis arbejdsstedets faktorpriser og faktorforbrug er éntydigt fastlagt af intensiteten u. Denne situation forekommer eksempelvis, når faktorpriserne er konstante, og X fremstilles på en maskine, hvis timeforbrug alene afhænger af maskinens produktionshastighed. Det udelukkes imidlertid ikke, at intensiteten u kan realiseres ved forskellige arbejdsmåder, således at $k(u)$ hviler på en forudsætning om den valgte arbejdsmåde.

Ofte er faktorpriserne ved forbrug af materialer konstante, medens timelønningerne kun er konstante inden for segmenter af planperioden. Segmenteringen kan eksempelvis være knyttet til normal arbejdstid, overarbejde og skifteholdsarbejde. Tidsafhængigheden bevirker, at arbejdsstedets omkostninger er tidsheterogene, og det er nødvendigt at specificere en omkostningsratefunktion for hvert tidssegment.

Artiklen er organiseret på følgende måde. I afsnit 2 gives en matematisk formulering af det problem, der består i at få fremstillet et ønsket produktionsomfang med mindst mulige omkostninger. En dybtgående analyse af situationen med tidshomogene omkostninger præsenteres i afsnit 3. I afsnit 4 udvides analysen til at omfatte tidsheterogene omkostninger. Artiklen afsluttes med en omtale af forskellige omkostningstyper, som der ikke tages hensyn til i de foregående afsnit.

Det bør bemærkes, at værdimål i artiklen betegnes med stjernenotation. Eksempelvis er værdimålet x^* (med dimensionen kr. pr. $ME(X)$) knyttet til produktionsomfanget x.

2. Matematisk problemformulering

Der tages udgangspunkt i, at intensiteten kan vælges som en funktion $u(\tau)$ af tiden τ. Med en tidsanvendelse på t fastlægger intensitetsfunktionen arbejdsstedets produktionsomfang således:

$$x = \int_0^t u(\tau)\,d\tau \,. \tag{1}$$

Vælges en af tiden uafhængig intensitet u, fås med en tidsanvendelse på t, at produktionsomfanget er $x = u \cdot t$.

Omkostningsraten ved at producere med intensiteten u på tidspunkt τ betegnes $k(u,\tau)$. De arbejdsmådeafhængige omkostninger, der er forbundet med den ved (1) fastlagte produktion, er derfor

$$\int_0^t k(u(\tau),\tau)\,d\tau\,. \tag{2}$$

Arbejdsstedets omkostninger er tidshomogene, hvis omkostningsraten $k(u,\tau)$ er en af τ uafhængig funktion $k(u)$.

Når et produktionsomfang x ønskes fremstillet omkostningsminimalt, skal tidsanvendelsen t og intensitetsfunktionen $u(\tau)$ vælges således, at (1) tilfredsstilles og (2) minimeres. Det er en nærliggende formodning, at omkostningsminimum kan opnås med en konstant intensitetsfunktion. Selv med tidshomogene omkostninger kan det imidlertid være nødvendigt at benytte to forskellige intensiteter for at realisere omkostningsminimum, hvilket klarlægges i underafsnit 3.2.

3. Tidshomogene omkostninger

I dette afsnit betragtes den situation, hvor de arbejdsmådeafhængige omkostninger er tidshomogene. Omkostningsraten $k(u,\tau)$ er en af τ uafhængig funktion $k(u)$. Der tages udgangspunkt i, at $k(u)$ er defineret over en mængde U af mulige intensiteter. Mængden U kan bestå af alle eller visse tal i intervallet $[0, u_{\max}]$, der er afgrænset af stilstandsintensiteten 0 og den størst mulige intensitet $u_{\max}$. Der ses bort fra det af Dellmann og Nastansky (1969) diskuterede tilfælde, hvor den mindst mulige intensitet er større end 0, så det antages, at stilstandsintensiteten er element i U.

3.1. *Den intensitetsafhængige omkostningsrate*

I omkostningsraten $k(u)$ medregnes ikke de faste omkostninger (kapacitetsomkostninger), som påløber uafhængigt af arbejdsstedets beskæftigelse, så med stilstandsintensiteten er omkostningsraten $k(0)$ lig 0. Under realistiske omstændigheder er det meget tænkeligt, at $k(u)$ forløber som et omvendt S (Gutenberg 1976, pp. 361-368); men et mere kompliceret forløb kan ikke udelukkes. Et mere kompliceret forløb forekommer f.eks., når det af tekniske grunde er umuligt at tilpasse intensiteten kontinuert. Kontinuert tilpasning er eksempelvis ikke mulig i tilfældet, hvor X produceres på en maskine, som kun kan indstilles til at producere med få forskellige produktionshastigheder.

Det beror på arbejdsstedets driftsbetingelser, hvorledes omkostningsratefunktionen $k(u)$ forløber, jfr. Rørsted (1977), der giver en virkelighedsnær beskrivelse af den her behandlede problemstilling. Driftsbetingelserne kan medføre, at der af tekniske grunde er en éntydig sammenhæng mellem intensiteten og omkostningsraten, således at der ifølge Gutenberg (1976, kapitel 9) foreligger en produktionsfunktion af type B. Denne situation forekommer eksempelvis, når arbejdsstedet producerer X på en maskine, hvis timeforbrug af produktionsfaktorer alene afhænger af maskinens produktionshastighed. (Et illustrerende eksempel knyttet til en chokoladefabrik omtales i underafsnit 3.3). Situationen forekommer også i et arbejdssted, hvor dagproduktionen (der kan opfattes som et måleudtryk for intensiteten, når planlægningsperioden omfatter mange dage) kun kan varieres ved ændring af den daglige beskæftigelsestid (Fredens 1954).

Det udelukkes ikke, at en given intensitet kan realiseres ved forskellige arbejdsmåder, som betinger forskellige produktionsfaktorindsatser, således at driftsbetingelserne ifølge Gutenberg (1976, kapitel 8) beskrives ved en produktionsfunktion af type A (»Das Ertragsgesetz«). Når det er tilfældet, hviler omkostningsratefunktionen $k(u)$ på en forudsætning om den valgte arbejdsmåde. Arbejdsmåden kan vælges således, at hver mulig intensitet realiseres ved den omkostningsminimale faktorindsats, men det kan også tænkes, at arbejdsmåden vælges ud fra andre synspunkter. Det forudsættes blot, at $k(u)$ er en veldefineret funktion af u.

3.2. *Konveks analyse*

Det er en nærliggende formodning, at et ønsket (og muligt) produktionsomfang bør fremstilles ved brug af kun én intensitet.

Det skal imidlertid nu klarlægges, at det kan være nødvendigt at benytte to forskellige intensiteter for at realisere den omkostningsminimale fremstillingsmåde. Ved klarlægningen benyttes konveks analyse. Standardværket om konveks analyse er Rockafellar (1970).

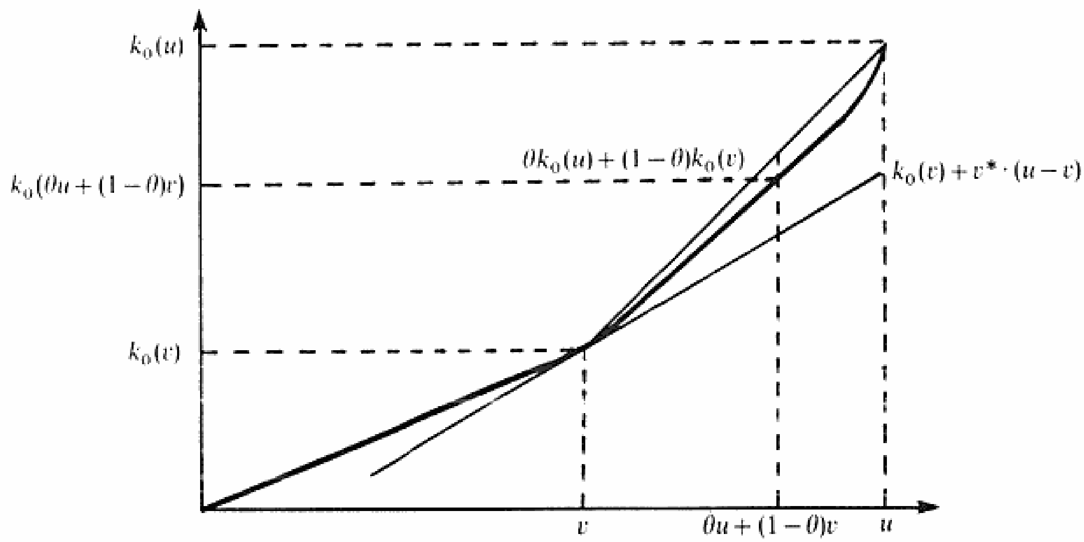
Funktionen $k_0(u)$ af den reelle variabel u kaldes konveks, hvis det for alle u og v gælder:

$$k_0(\theta \cdot u + (1-\theta) \cdot v) \leqq \theta \cdot k_0(u) + (1-\theta) \cdot k_0(v) \text{ når } 0 \leqq \theta \leqq 1 . \tag{3}$$

Denne betingelse, som er illustreret i figur 1, er netop opfyldt, når funktionen er understøttet af alle dens tangenter. Hvis funktionen i punktet v har en tangent med hældningen v^*, skal følgende ulighed derfor være opfyldt

$$k_0(u) \geqq k_0(v) + v^* \cdot (u-v) \text{ for alle } u . \tag{4}$$

Stjernenotation benyttes her i overensstemmelse med Rockafellar (1970), og v^* kaldes en subdifferentialkvotient til $k_0(u)$ i punktet v. Subdifferentialet $\partial k_0(v)$ defineres som mængden af $k_0(u)$'s subdifferentialkvotienter i punktet v. I tilfældet med differentiabilitet består subdifferentialet kun af differentialkvotienten, som her

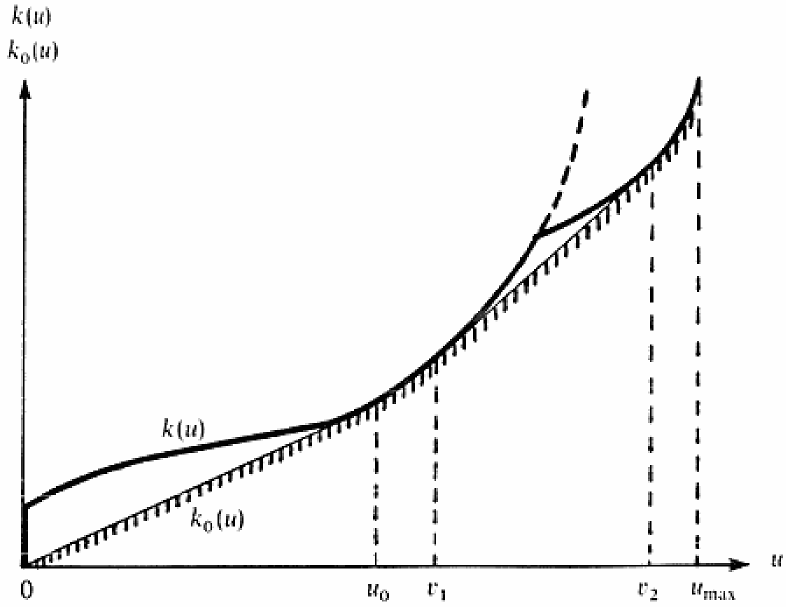


Figur 1.

betegnes $Mk_0(v)$. I tilfældet uden differentiabilitet er subdifferentialet fastlagt som det lukkede interval, der er afgrænset nedad af den venstreafledede $Mk_0^-(v)$ og opad af den højreafledede $Mk_0^+(v)$. Konveksitet kan også udtrykkes ved, at begge disse afledede (eller differentialkvotienten, når der foreligger differentiabilitet) er voksende (eller konstante) som funktioner af v.

Her defineres $k_0(u)$ som $k(u)$'s *konvekse hylster*, der er den største konvekse funktion, som er majoriseret af $k(u)$. Figur 2 har til opgave at illustrere, hvorledes $k_0(u)$ forløber i forhold til $k(u)$, når U er lig intervallet $[0, u_{\max}]$. I figuren udviser $k(u)$ et spring ved at gå fra stilstandsintensiteten (med en omkonstningsrate på 0) til positive intensiteter. Springet kan f.eks. skyldes, at arbejdsstedet skal bemandes, hvis intensiteten gøres positiv. For store intensiteter fås med uændret bemanding, at omkostningsraten har det forløb, som er markeret stiplet. Dette forløb undgås ved fra knækpunktet at forøge bemandingen (for at reducere materialeforbruget ved eksempelvis fejlproduktion).

Når omkostningsratefunktionen er understøttet af dens tangent i punktet u, er der sammenfald mellem $k_0(u)$ og $k(u)$. Det er i figuren tilfældet for intensiteter u i intervallerne $[u_0, v_1]$ og $[v_2, u_{\max}]$. For alle øvrige intensiteter bestemmes $k_0(u)$ ved lineær interpolation. I figur 2 fås $k_0(u)$ ved interpolation mellem $k(0)=0$ og $k(u_0)$, når u tilhører intervallet $(0, u_0)$, og ved interpolation mellem $k(v_1)$ og $k(v_2)$, når u tilhører



Figur 2.

intervallet (v_1, v_2). Det bemærkes, at det konvekse hylster også bestemmes ved interpolation, hvis U ikke er et sammenhængende interval. Omfatter U eksempelvis kun visse (eller ingen) af intensiteterne mellem v_1 og v_2, er $k_0(u)$ fastlagt som anført i figuren.

Funktionsværdien $k_0(v)$ af det konvekse hylster kan udlægges som den mindste tidsgennemsnitlige omkostningsrate, når den tidsgennemsnitlige intensitet er v. For at indse dette betragtes for et vilkårligt t tidsintervallet $[0, t]$, hvori intensiteten er specificeret ved en vilkårlig realisabel intensitetsfunktion $u(\tau)$, der tilfredsstiller betingelsen

$$v = \int_0^t u(\tau)\, d\tau / t \; . \tag{5}$$

Da $k(u(\tau))$ majoriserer $k_0(u(\tau))$, som opfylder subdifferentialuligheden (4), kan det for alle τ sluttes:

$$k(u(\tau)) \geqq k_0(u(\tau)) \geqq k_0(v) + v^* \cdot u(\tau) - v^* \cdot v \; . \tag{6}$$

Integralet fra 0 til t af højresiden i (6) består af tre led. Det første led er $k_0(v) \cdot t$, og de to andre led ophæver hinanden ifølge (5). Integralet fra 0 til t af venstresiden i (6) er følgelig minoriseret af $k_0(v) \cdot t$, og det gælder:

$$\int_0^t k(u(\tau))\,d\tau/t \geqq k_0(v)\,. \tag{7}$$

Det fremgår af (7), at med den tidsgennemsnitlige intensitet v er den minimale tidsgennemsnitlige omkostningsrate $k_0(v)$.

Den minimale tidsgennemsnitlige omkostningsrate $k_0(v)$ kan realiseres ved at benytte højst to forskellige intensiteter. Hvis $k_0(v) = k(v)$ opnås omkostningsminimum ved hele tiden at bruge den tidsgennemsnitlige intensitet v. Hvis $k_0(v) < k(v)$ findes der to omkostningsrater, imellem hvilke $k_0(v)$ er bestemt ved lineær interpolation. Når disse to omkostningsrater (som illustreret i figur 2) er $k(v_1)$ og $k(v_2)$, gælder det med θ lig $(v_2 - v)/(v_2 - v_1)$:

$$k_0(v) = \theta \cdot k(v_1) + (1-\theta) \cdot k(v_2)\,. \tag{8}$$

I denne situation skal intensiteten v_1 benyttes i brøkdelen θ af tiden, medens intensiteten v_2 skal benyttes i resten af tiden, således at den tidsgennemsnitlige intensitet netop bliver $\theta \cdot v_1 + (1-\theta) \cdot v_2 = v$. Rockafellar (1970, Corollary 17.1.5) giver den matematiske begrundelse for, at det er overflødigt at benytte flere end to forskellige intensiteter.

3.3. *Idealintensiteten*

Den intensitet, ved hvilken de intensitetsafhængige enhedsomkostninger $k(u)/u$ er mindst mulige, betegnes u_0, og det er nærliggende at kalde den idealintensiteten. I tysksproget litteratur er det gængse navn »optimalintensitet« (Dellmann og Nastansky 1969, fodnote 14), men navnet »normalintensitet« benyttes f.eks. af Böhm (1960, p. 74).

Det er uøkonomisk at producere X med en intensitet, der er mindre end idealintensiteten. Formelt kommer det til udtryk ved, at den intensitetsafhængige omkostningsrate $k(v)$ er større end den minimale tidsgennemsnitlige omkostningsrate $k_0(v)$ for $v < u_0$. Når den tidsgennemsnitlige intensitet v er mindre end idealintensiteten u_0, bør arbejdsstedet ligge stille i brøkdelen $\theta = (u_0 - v)/u_0$ af tiden, og i resten af tiden (dvs. brøkdelen $1 - \theta = v/u_0$) bør X produceres med idealintensiteten, således at de intensitetsafhængige enhedsomkostninger bliver $k(u_0)/u_0$.

Rasmussen og Scherfig (1981, pp. 131-132 og pp. 136-137) præsenterer et eksempel med en chokoladefabrik, der fremstiller pladechokolade. Inden for vide grænser kan blandingsforholdet mellem chokolademasse og kakaofedt ændres. Blandingsforholdet fastlægger brøkdelen af knækkede plader i produktionen og dermed, hvor lang tid der medgår pr. fremstillet kg hel pladechokolade. Den éntydige sammenhæng er ensbetydende med, at chokoladefabrikkens timeforbrug alene afhænger af intensiteten. Referencen specificerer data for forskellige blandingsforhold, som i tabel

1 indiceres af $h = 1, 2, \ldots, 8$. I tabellen er for hvert h bl.a. anført intensiteten u_h og omkostningsraten $k(u_h)$. Omkostningerne pr. kg, $k(u_h)/u_h$, minimeres for $h = 4$, så idealintensiteten er $u_0 = 11{,}11$ kg/time.

Tabel 1

	u_h	$k(u_h)$	$\frac{k(u_h)}{u_h}$	$\frac{k(u_{h+1}) - k(u_h)}{u_{h+1} - u_h}$	$\frac{k(u_h) + 20}{u_h}$	$\frac{k(u_h) + 25}{u_h}$
	kg/time	kr./time		kr./kg		
$h = 1$	6,25	102,50	16,40	11,83	19,60	20,40
$h = 2$	8,00	123,20	15,40	12,93	17,90	18,53
$h = 3$	9,52	142,86	15,01	13,57	17,11	17,63
$h = 4$	11,11	164,44	14,80	15,14	16,60	17,05
$h = 5$	12,35	183,21	14,83	17,13	16,45	16,86
$h = 6$	13,33	200,00	15,00	17,85	16,50	16,88
$h = 7$	14,29	217,14	15,20	21,72	16,59	16,94
$h = 8$	14,93	231,04	15,47		16,81	17,15

I chokoladeeksemplet er U den mængde, hvis elementer er stilstandsintensiteten (med en omkostningsrate på 0) samt de 8 intensiteter, der er specificeret i tabel 1. Den minimale tidsgennemsnitlige omkostningsrate $k_0(v)$ er følgelig en stykkevis lineær funktion af v. For $v < 11{,}11$ kg/time er $Mk_0(v)$ lig $k(u_0)/u_0 = 14{,}80$ kr./kg. For større intensiteter er $Mk_0(v)$ specificeret i tabel 1's tredje sidste søjle. Eksempelvis er $Mk_0(v) = 21{,}72$ kr./kg, når v er større end 14,29 kg/time og mindre end $u_{max} = 14{,}93$ kg/time. Taloplysningerne i tabellens to sidste søjler kommenteres senere (i afsnit 4).

3.4. *Minimalomkostningsfunktionen*

Planperiodens længde kaldes T, og den maksimale produktion af X i planperioden er følgelig $u_{max} \cdot T$. Ved fremstilling af et produktionsomfang på x er den tidsgennemsnitlige intensitet x/T, og minimalomkostningerne $C(x)$ er ifølge (7) fastlagt således:

$$C(x) = k_0(x/T) \cdot T. \tag{9}$$

Da den minimale tidsgennemsnitlige omkostningsrate $k_0(v)$ er en konveks funktion af v, implicerer (9) ifølge Rockafellar (1970, Theorem 5.7), at minimalomkostningerne $C(x)$ er en konveks funktion af x. Betingelsen for, at x^* er en subdifferentialkvotient til minimalomkostningsfunktionen ved produktionsomfanget x, er at det for alle produktionsomfang y gælder:

$$C(y) \geqq C(x) + x^* \cdot (y - x). \tag{10}$$

Ifølge (9) er subdifferentialet $\partial C(x)$, der er defineret som mængden af $C(x)$'s subdifferentialkvotienter, fastlagt således:

$$\partial C(x) = \partial k_0(x/T) . \tag{11}$$

Konveksitetsegenskaben medfører, at grænseomkostningerne $MC^-(x) = Mk_0^-(x/T)$ og $MC^+(x) = Mk_0^+(x/T)$ ved henholdsvis indskrænkning og udvidelse af produktionsomfanget x, er voksende som funktioner af x. Det bør bemærkes, at denne slutning opnås uafhængigt af, hvorledes den intensitetsafhængige omkostningsrate $k(u)$ forløber som funktion af u.

3.5. *Tidsanvendelsens skyggepris*

Der er knyttet en skyggepris (med dimensionen kr. pr. time) til en marginal ændring af planperiodens længde. Værdien af en sådan ændring afhænger af produktionsomfanget x, og den viser sig i form af en ændring af minimalomkostningerne $C(x)$.

Med et produktionsomfang på x er skyggeprisen ved en indskrænkning af planperiodens længde $[MC^+(x)\cdot x - C(x)]/T = Mk_0^+(x/T)\cdot x/T - k_0(x/T)$, medens skyggeprisen ved en udvidelse af planperiodens længde er $[MC^-(x)\cdot x - C(x)]/T = Mk_0^-(x/T)\cdot x/T - k_0(x/T)$ (Johansen 1980, p. 12). Det bemærkes, at skyggeprisen er lig 0, når produktionsomfanget x er mindre end $u_0 \cdot T$.

Hvis minimalomkostningsfunktionen er differentiabel, fås ved både en indskrænkning og udvidelse af planperiodens længde, at skyggeprisen er

$$T^* = [MC(x)\cdot x - C(x)]/T = Mk_0(x/T)\cdot x/T - k_0(x/T) . \tag{12}$$

Adderes T^* til omkostningsratefunktionen $k_0(v)$, fås en knaphedskorrigeret omkostningsrate. Dennes enhedsomkostninger $(k_0(v) + T^*)/v$ minimeres af den tidsgennemsnitlige intensitet $v = x/T$, ved hvilken enhedsomkostningerne er $Mk_0(x/T) = MC(x)$. Omkostningsvurderes arbejdsstedets tidsanvendelse til skyggeprisen T^*, gives der følgelig motivation til omkostningsminimal handlemåde, og der bliver sammenfald mellem enheds- og grænseomkostninger ved produktionsomfanget x.

Når $k_0(x/T)$ er bestemt ved interpolation mellem omkostningsraterne $k(v_1)$ og $k(v_2)$, forenkles (12) til

$$T^* = [(k(v_2) - k(v_1))/(v_2 - v_1)]\cdot v_1 - k(v_1) . \tag{13}$$

I chokoladeeksemplet fås eksempelvis, når planperioden har en længde på $T = 160$ timer, og det ønskede produktionsomfang x er større end $u_6 \cdot 160 = 2132{,}8$ kg og mindre end $u_7 \cdot 160 = 2286{,}4$ kg, at $v_1 = u_6$ og $v_2 = u_7$. Tidsanvendelsens skyggepris er følgelig $T^* = 17{,}85 \cdot 13{,}33 - 200{,}00 = 37{,}94$ kr./time.

3.6. *Tilpasningsformer*

Sondringen mellem tidsmæssig og intensitetsmæssig tilpasning benyttes til at karakterisere arbejdsstedets optimale arbejdsmåde ved varierende produktionsomfang. Tidsmæssig tilpasning foreligger, når produktionsomfanget ændres ved at variere tidsanvendelsen, medens intensiteten holdes konstant. Holdes tidsanvendelsen konstant, således at produktionsomfanget ændres ved at variere intensiteten, foreligger intensitetsmæssig tilpasning.

Omkostningsminimal fremstilling opnås ved tidsmæssig tilpasning med idealintensiteten, når produktionsomfanget x højst er $u_0 \cdot T$, og minimalomkostningerne $C(x)$ er i så fald proportionalt stigende. Enhedsomkostningerne er $k(u_0)/u_0$, hvilket formelt indses således:

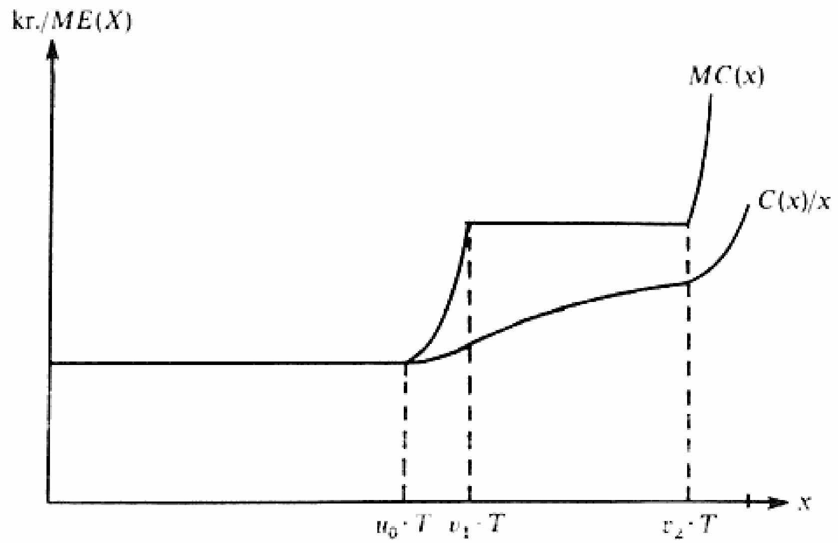
$$k_0(x/T) \cdot T = [k(u_0)/u_0] \cdot x \quad \text{for } 0 \leqq x \leqq u_0 \cdot T. \tag{14}$$

Produktionsomfang x i intervallet $[u_0 \cdot T, u_{\max} \cdot T]$ fremstilles omkostningsminimalt ved intensitetsmæssig tilpasning med en tidsanvendelse på T. Når $k_0(x/T)$ og $k(x/T)$ er sammenfaldende, skal den tidsgennemsnitlige intensitet x/T benyttes i hele planperioden. Ellers benyttes de to intensiteter, imellem hvilke $k_0(x/T)$ er bestemt ved interpolation. Kaldes disse intensiteter henholdsvis v_1 og v_2, gennemføres den intensitetsmæssige tilpasning ved at bruge v_1 i brøkdelen $(v_2 - x/T)/(v_2 - v_1)$ af planperioden, medens v_2 bruges i resten af planperioden. Minimalomkostningerne $C(x)$ er en lineær funktion af x i intervallet $[v_1 \cdot T, v_2 \cdot T]$, hvor X's grænseomkostninger er $(k(v_2) - k(v_1))/(v_2 - v_1)$.

Når X's omkostningsminimale fremstillingsmåde er karakteriseret ved intensitetsmæssig tilpasning, er skyggeprisen T^* positiv, og minimalomkostningerne $C(x)$ er progressivt stigende, idet X's enhedsomkostninger $C(x)/x$ er mindre end X's grænseomkostninger. Med forøget produktionsomfang er grænseomkostningerne enten konstante eller voksende. Figur 3 illustrerer grænseomkostningernes og enhedsomkostningernes afhængighed af produktionsomfanget x, når den intensitetsafhængige omkostningsrate $k(u)$ har det i figur 2 skitserede forløb.

3.7. *Arbejdsstedets udbudskorrespondance*

Afregningsprisen for arbejdsstedets X-produktion kaldes X's omsætningssats, jfr. Böhm og Wille (1974, p. 40), der benytter betegnelsen Leistungsertragssatz. Når omsætningssatsen (der har dimensionen kr. pr. $ME(X)$) er x^*, er det optimalt at



Figur 3.

vælge produktionsomfanget x således, at x^* er element i subdifferentialet $\partial C(x)$. Herved opnås nemlig, at x^* ligger imellem (og eventuelt er lig) grænseomkostningerne $MC^-(x)$ og $MC^+(x)$ ved henholdsvis indskrænkning og udvidelse af produktionsomfanget.

Der kan være mange optimale produktionsomfang, så de optimale produktionsomfang udgør en mængde, der betegnes $x(x^*)$, når omsætningssatsen er x^*. Mængden består kun af *det* optimale produktionsomfang, når dette er éntydigt. I overensstemmelse med Knudsen (1973, p. 214), der generaliserer udbudsfunktioner til udbudskorrespondancer, kan man passende kalde $x(x^*)$ for arbejdsstedets udbudskorrespondance.

Minimalomkostningsfunktionens konjugerede funktion $C^*(x^*)$ angiver (med omsætningssatsen som argument) arbejdsstedets maksimale gevinst (Rockafellar 1970, p. 104). Ifølge Rockafellar (1970, Theorem 23.5) fastlægges arbejdsstedets udbudskorrespondance $x(x^*)$ af den konjugerede funktions subdifferentiale $\partial C^*(x^*)$, der er bestemt som den inverse til subdifferentialet $\partial C(x)$. I tilfælde med differentiabilitet er $\partial C(x)$ lig grænseomkostningerne $MC(x)$, og udbudskorrespondancen bestemmes ved at invertere grænseomkostningsfunktionen. Når denne er indtegnet som i figur 3, kan ordinataksen opfattes som en x^*-akse, og $x(x^*)$ kan aflæses umiddelbart.

4. Tidsheterogene omkostninger

I dette afsnit betragtes den situation, hvor planperioden kan segmenteres således, at omkostningsraten $k(u, \tau)$ er konstant som funktion af τ inden for hvert tidssegment. Antallet af tidssegmenter kaldes m, og inden for det i'te tidssegment ($i = 1, 2, \ldots, m$) betegnes omkostningsraten $k_i(u)$, når intensiteten er u. Længden af det i'te tidssegment betegnes T_i, og planperiodens længde er følgelig $T = \sum_{i=1}^{m} T_i$.

Tidssegmenteringen kan eksempelvis være knyttet til arbejdstidsformen (f.eks. normal arbejdstid, overarbejde og skifteholdsarbejde) eller til fortrængning af andre arbejdsopgaver, som arbejdsstedet eller dets bemanding er i stand til at udføre. Man vil naturligvis organisere tidsanvendelsen således, at man stedse benytter de relativt billigste timer. Disse er ikke nødvendigvis sammenhængende, så det skal fremhæves, at tiden her måles på en sådan måde, at $k_i(u)$ for ingen intensitet u er aftagende som funktion af i.

Den omkostningsminimale fremstilling af et ønsket produktionsomfang bestemmes ved tidsmæssig dekomponering, der opnås ved at betragte de enkelte tidssegmenter isoleret. Idet $k_{i,0}(u)$ betegner det konvekse hylster af $k_i(u)$, fås i analogi med (9), at minimalomkostningerne ved fremstilling af x_i inden for det i'te tidssegment er

$$C_i(x_i) = k_{i,0}(x_i/T_i) \cdot T_i \, . \tag{15}$$

Minimalomkostningerne ved fremstilling af produktionsomfanget x ($\leqq u_{\max} \cdot T$) inden for planperioden er

$$C(x) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} C_i(x_i) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} x_i = x \right\} . \tag{16}$$

Det fremgår af (16), at $C(x)$ er en konveks funktion af produktionsomfanget x (Rockafellar 1970, pp. 33-34). Ifølge Rockafellar (1970, Theorem 16.4) er minimalomkostningsfunktionens konjugerede funktion $C^*(x^*)$ bestemt som summen af de m tidssegmenters konjugerede funktioner. Subdifferentialet af en sum af konvekse funktioner er lig summen af funktionernes subdifferentialer (Rockafellar 1970, Theorem 23.8). Arbejdsstedets udbudskorrespondance er derfor

$$x(x^*) = \sum_{i=1}^{m} x_i(x^*) \, , \tag{17}$$

hvor $x_i(x^*) = \partial C_i^*(x^*)$ er det i'te tidssegments udbudskorrespondance. Det er en konsekvens af (17), at arbejdsstedets grænseomkostningsfunktioner bestemmes ved vandret addition af tidssegmenternes grænseomkostningsfunktioner.

Det i'te tidssegments idealintensitet $u_{i,i}$ defineres som den intensitet, der minimerer $k_i(u_i)/u_i$, og segmentets minimale enhedsomkostninger $k_i(u_{i,i})/u_{i,i}$ betegnes $u_{i,i}^*$ ($i =$

$1, 2, \ldots, m$). For $j = 1, 2, \ldots, i-1$ defineres $x_{j,i}$ som det største produktionsomfang, ved hvilket det j'te tidssegments grænseomkostninger er lig $u^*_{i,i}$, dvs. at $x_{j,i}$ er lig $\max\{x_j(u^*_{i,i})\}$.

Det er optimalt at benytte det i'te tidssegment ved fremstillingen af X, når produktionsomfanget mindst er

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} x_{j,i} . \tag{18}$$

Produktionsomfanget i intervallet $[y_i, y_i + u_{i,i} \cdot T_i]$ fremstilles omkostningsminimalt ved i det i'te tidssegment at foretage tidsmæssig tilpasning med intensiteten $u_{i,i}$, og X's grænseomkostninger er $u^*_{i,i}$. Inden for det j'te tidssegment ($j = 1, 2, \ldots, i-1$) skal der produceres $x_{j,i}$ med udnyttelse af hele tidssegmentets længde T_j, og tidsanvendelsens skyggepris er i tilfælde med differentiabilitet:

$$T^*_{j,i} = u^*_{i,i} \cdot x_{j,i}/T_j - k_{j,0}(x_{j,i}/T_j) . \tag{19}$$

Omkostningsminimal fremstilling af produktionsomfang i intervallet $[y_i + u_{i,i} \cdot T_i, y_{i+1}]$ opnås ved intensitetsmæssig tilpasning inde for de i lavest nummererede tidssegmenter.

Situationen med tidsheterogene omkostninger kan illustreres ved i chokoladeeksemplet at antage, at planperioden omfatter højst $T_1 = 160$ timers normal arbejdstid og højst $T_2 = 40$ timers overarbejde. Omkostningsraterne $k(u_h)$ i tabel 1 vedrører normal arbejdstid, og omkostningsraterne pr. overarbejdstime specificeres som $k(u_h)$ plus et overarbejdstillæg, der er 20 kr./time for $h = 1, 2, 3, 4$ og 25 kr./time for $h = 5, 6, 7, 8$. Det fremgår af de to sidste søjler i tabel 1, at idealintensiteten ved overarbejde er $u_{2,2} = 11{,}11$ kg/time, og at de minimale enhedsomkostninger ved overarbejde er $u^*_{2,2} = 16{,}60$ kr./kg. Inden for normal arbejdstid er grænseomkostningerne 15,14 kr./kg ved at fremstille fra $u_4 \cdot T_1 = 1777{,}6$ kg til $u_5 \cdot T_1 = 1976$ kg pladechokolade, medens grænseomkostningerne ved en større produktion mindst er 17,13 kr./kg. Der bør følgelig benyttes overarbejde, når det ønskede produktionsomfang mindst er $y_2 = x_{1,2} = 1976$ kg. Hvis det ønskede produktionsomfang f.eks. er 2200 kg pladechokolade, opnås omkostningsminimum ved, at der inden for normal arbejdstid fremstilles 1976 kg (u_5 benyttes i 160 timer), og at der ved overarbejde fremstilles 224 kg (u_4 benyttes i $224/u_4 = 20{,}16$ overarbejdstimer). Skyggeprisen for tidsanvendelsen inden for normal arbejdstid bliver $T^*_{1,2} = 16{,}60 \cdot 12{,}35 - 183{,}21 = 21{,}80$ kr./time.

Omkostningsminimum opnås med samme tidsgennemsnitlige intensitet inden for alle ibrugtagne tidssegmenter, hvis tidssegmenternes omkostningsrater kun adskiller sig fra hinanden med et tillæg, dvs.

$$k_i(u) = k(u) + k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,. \tag{20}$$

Når det er tilfældet, konkretiseres (19) til

$$T^*_{j,i} = k_i - k_j\,. \tag{21}$$

Antages i chokoladeeksemplet, at overarbejdstillægget for alle intensiteter er enten $k_2 = 20$ kr./time eller $k_2 = 25$ kr./time, er idealintensiteten ved overarbejde $u_{2,2} = 12{,}35$ kg/time, jfr. de to sidste søjler i tabel 1. Når det ønskede produktionsomfang mindst er $y_2 = x_{1,2} = 1976$ kg pladechokolade, er skyggeprisen for tidsanvendelsen inden for normal arbejdstid henholdsvis $T^*_{1,2} = 20$ kr./time og $T^*_{1,2} = 25$ kr./time.

5. Andre omkostningstyper

Foruden de ved (2) specificerede arbejdsmådeafhængige omkostninger kan der påløbe omstillingsomkostninger ved at skifte intensitet. Karrenberg og Scheer (1970) analyserer betydningen af omstillingsomkostninger, men de ser bort fra de (ofte væsentlige) omkostninger, der er knyttet til den tid, som medgår ved omstilling mellem forskellige intensiteter.

Rørsted (1977, p. 50) påpeger, at både tilpasningsforberedelsestiden og varigheden af den eventuelle tilpasning øver indflydelse på arbejdsstedets omkostninger. Han omtaler imidlertid ikke, hvordan der analytisk skal tages hensyn hertil.

Adam (1972) analyserer betydningen af produktionsbetingede faste omkostninger i tilfælde med flere »aggregater«, som fremstiller samme produktionsydelse. Hans analyse kan benyttes, når der i situationen med tidssegmentering er forbundet omkostninger med ibrugtagning af tidssegmenter, idet disse kan opfattes som aggregater.

Jeg definerer mængdeafhængige omkostninger som de omkostninger, der har produktionsomfanget x som variabilitetsfaktor, men som iøvrigt er intensitetsuafhængige. Da de mængdeafhængige omkostninger ikke påvirker arbejdsstedets omkostningsminimale arbejdsmåde, kan det være hensigtsmæssigt at udsondre dem fra de arbejdsmådeafhængige omkostninger. En udsondring er nødvendig, når de mængdeafhængige omkostninger (eksempelvis som følge af mængderabatter ved eksterne anskaffelser) varierer ikke-lineært med produktionsomfanget. Thi specifikationen i (2) af de arbejdsmådeafhængige omkostninger omfatter kun mængdeafhængige omkostninger, der er en lineær funktion $c \cdot x$ af produktionsomfanget x (således at deres omkostningsrate er $c \cdot u$).

Knap kapacitet kan nødvendiggøre, at et bekosteligt informationssystem skal benyttes i planlægningsarbejdet. I stedet for at investere i et sådant informationssystem kan det være hensigtsmæssigt at reducere planlægningsarbejdet ved at udvide produktionskapaciteten (Provstgaard 1972, p. 53 og Galbraith 1973, p. 24). Imidlertid falder langsigtede dispositioner og de hermed forbundne omkostninger uden for nærværende artikels rammer.

Litteratur

Adam, D. 1972. Quantitative und intensitätsmässige Anpassung mit Intensitäts-Splitting bei mehereren funktionsgleichen, kostenverschiedenen Aggregaten. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 42: 381-400.

Böhm, Hans-Hermann. 1960. *Dynamische Kostensenkung im Betrieb*. München.

Böhm, Hans-Hermann og Friedrich Wille. 1974. *Deckungsbeitragsrechnung, Grenzpreisrechnung und Optimierung*. 5. udg. München.

Danø, Sven. 1966. *Industrial Production Models*. Wien.

Dellmann, Klaus og Ludwig Nastansky. 1969. Kostenminimale Produktionsplanung bei rein-intensitätsmässiger Anpassung mit differenzierten Intensitätsgraden. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 39: 239-268.

Fredens, Svend. 1954. Omkostninger, produktion og beskæftigelse i et arbejdssted. *Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi*. 15: 71-85.

Galbraith, Jay. 1973. *Designing Complex Organizations*. Reading, Mass.

Gutenberg, Erich. 1976. *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Erster Band: Die Produktion*. 22. udg. Berlin.

Johansen, Søren Glud. 1980. Kapacitetsudnyttelsens dimensioner. Institut for Operationsanalyse, Aarhus Universitet.

Karrenberg, R. og A.-W. Scheer. 1970. Ableitung der kostenminimalen Einsatzes von Aggregaten zur Vorbereitung der Optimierung simultaner Planungssysteme. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*. 40: 689-706.

Knudsen, Niels Chr. 1973. *Production and Cost Models of a Multi-Product Firm*. Odense.

Provstgaard, Bent. 1972. *Regnskabsræsenet som led i ledelsens informationssystem*. Århus.

Rasmussen, Jan og Kjeld Scherfig. 1981. *Driftsøkonomi. Hæfte 1: Regnskabsvæsen og omkostninger*. Revideret udgave ved Sven Danø, København.

Rockafellar, R. Tyrrell. 1970. *Convex Analysis*. Princeton, N.Y.

Rørsted, Bendt. 1977. Intensitetsmæssig tilpasning i en serieproducerende virksomhed. I *Fire faglige bidrag*, red. Vagn Madsen, pp. 35-69, Institut for Virksomhedsledelse, Århus.

produktionskapaciteten (Provstgaard 1972, p. 53 og Galbraith 1973, p. 24). Imidlertid falder langsigtede dispositioner og de hermed forbundne omkostninger uden for nærværende artikels rammer.

Litteratur

Adam, D. 1972. Quantitative und intensitätsmässige Anpassung mit Intensitäts-Splitting bei mehereren funktionsgleichen, kostenverschiedenen Aggregaten. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 42: 381-400.

Böhm, Hans-Hermann. 1960. *Dynamische Kostensenkung im Betrieb*. München.

Böhm, Hans-Hermann og Friedrich Wille. 1974. *Deckungsbeitragsrechnung, Grenzpreisrechnung und Optimierung*. 5. udg. München.

Danø, Sven. 1966. *Industrial Production Models*. Wien.

Dellmann, Klaus og Ludwig Nastansky. 1969. Kostenminimale Produktionsplanung bei rein-intensitätsmässiger Anpassung mit differenzierten Intensitätsgraden. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 39: 239-268.

Fredens, Svend. 1954. Omkostninger, produktion og beskæftigelse i et arbejdssted. *Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi*. 15: 71-85.

Galbraith, Jay. 1973. *Designing Complex Organizations*. Reading, Mass.

Gutenberg, Erich. 1976. *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Erster Band: Die Produktion*. 22. udg. Berlin.

Johansen, Søren Glud. 1980. Kapacitetsudnyttelsens dimensioner. Institut for Operationsanalyse, Aarhus Universitet.

Karrenberg, R. og A.-W. Scheer. 1970. Ableitung der kostenminimalen Einsatzes von Aggregaten zur Vorbereitung der Optimierung simultaner Planungssysteme. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*. 40: 689-706.

Knudsen, Niels Chr. 1973. *Production and Cost Models of a Multi-Product Firm*. Odense.

Provstgaard, Bent. 1972. *Regnskabsvæsenet som led i ledelsens informationssystem*. Århus.

Rasmussen, Jan og Kjeld Scherfig. 1981. *Driftsøkonomi. Hæfte 1: Regnskabsvæsen og omkostninger*. Revideret udgave ved Sven Danø, København.

Rockafellar, R. Tyrrell. 1970. *Convex Analysis*. Princeton, N.Y.

Rørsted, Bendt. 1977. Intensitetsmæssig tilpasning i en serieproducerende virksomhed. I *Fire faglige bidrag*, red. Vagn Madsen, pp. 35-69, Institut for Virksomhedsledelse, Århus.