Arbitrageteorien anvendt til vurdering af indeksobligationer

Jørgen Aase Nielsen
Institut for Operationsanalyse, Aarhus Universitet

SUMMARY: *This article establish by means of arbitrage theory a relation for valuation of uncertain payoff streams. The relation is used to give an evaluation of indexed bonds. Further on it is examined which influence the taxation of interest payments have on the incentive to buy and sell these indexed bonds.*

1. Indledning

1.1. *Problemstilling*

Med udgangspunkt i observationen, at rationelle priser på markedsførte aktiver skal fastsættes på en sådan made, at der ikke opstår muligheder for at skabe pengepumper, arbitragegevinster, kan vi etablere en reori for vurdering af aktiver. For nærværende vil vi især vende interessen mod indeksobligationer og ved teoridannelsen tage højde for ikke blot den forventede inflation, men tillige den uforudsete inflation. Hvis det sidst anførte element kunne negligeres, ville en af de vægtigste grunde til indførelse af indeksobligationer samtidig være elimineret. Desværre medfører hensyntagen til det ikke-forudsete en betydelig, men beklagelig anvendelse af matematik. Til gengæld resulterer en generel relation, der kan anvendes til prisfastsættelse af såvel indekserede fordringer som andre typer af værdipapirer.

Vurderingsudtrykket giver relativt let adgang til belysning af aspekter, der for både debitor og kreditor vil være centrale ved indførelse af indeksobligationer på kapitalmarkedet. Således kan prisafhængigheden af forskellige potentielle indeks, af debitors muligvis svigtende betalingsevne i fremtiden og af beskatningsreglerne anskueliggøres. Ved et numerisk eksempel vises f.eks. at de gældende beskatningsregler næppe vil være til gunst for en succesrig etablering af indekslån af et betydende omfang på kapitalmarkedet, dersom indeksrenten skal holdes på et niveau omkring 3 % p.a.

I artiklen benyttes teorien tillige til at finde risikopræmien, der er forårsaget af den udtrækningsmekanisme efter hvilken nogle annuitetsobligationer bliver indfriet. Det påpeges, at det forekommer irrationelt, at de debitorejede kreditinstitutioner vælger

Arbitrageteorien anvendt til vurdering af indeksobligationer

Jørgen Aase Nielsen
Institut for Operationsanalyse, Aarhus Universitet

SUMMARY: *This article establish by means of arbitrage theory a relation for valuation of uncertain payoff streams. The relation is used to give an evaluation of indexed bonds. Further on it is examined which influence the taxation of interest payments have on the incentive to buy and sell these indexed bonds.*

1. Indledning

1.1. *Problemstilling*

Med udgangspunkt i observationen, at rationelle priser på markedsførte aktiver skal fastsættes på en sådan made, at der ikke opstår muligheder for at skabe pengepumper, arbitragegevinster, kan vi etablere en reori for vurdering af aktiver. For nærværende vil vi især vende interessen mod indeksobligationer og ved teoridannelsen tage højde for ikke blot den forventede inflation, men tillige den uforudsete inflation. Hvis det sidst anførte element kunne negligeres, ville en af de vægtigste grunde til indførelse af indeksobligationer samtidig være elimineret. Desværre medfører hensyntagen til det ikke-forudsete en betydelig, men beklagelig anvendelse af matematik. Til gengæld resulterer en generel relation, der kan anvendes til prisfastsættelse af såvel indekserede fordringer som andre typer af værdipapirer.

Vurderingsudtrykket giver relativt let adgang til belysning af aspekter, der for både debitor og kreditor vil være centrale ved indførelse af indeksobligationer på kapitalmarkedet. Således kan prisafhængigheden af forskellige potentielle indeks, af debitors muligvis svigtende betalingsevne i fremtiden og af beskatningsreglerne anskueliggøres. Ved et numerisk eksempel vises f.eks. at de gældende beskatningsregler næppe vil være til gunst for en succesrig etablering af indekslån af et betydende omfang på kapitalmarkedet, dersom indeksrenten skal holdes på et niveau omkring 3 % p.a.

I artiklen benyttes teorien tillige til at finde risikopræmien, der er forårsaget af den udtrækningsmekanisme efter hvilken nogle annuitetsobligationer bliver indfriet. Det påpeges, at det forekommer irrationelt, at de debitorejede kreditinstitutioner vælger en tilbagebetalingsmåde, der medfører usikkerhed om den enkelte obligations tilknyttede betalingsprofil. Hvorfor, (spørgsmålet bliver ikke besvaret), belaster debitor sig selv, når andre mindre belastende metoder kan benyttes?

1.2. *Oversigt*

Efter fremkomsten af Sharpe (1964), Lintner (1965) og Mossins (1966) *C*apital *A*sset *P*ricing *M*odel, teorien for værdifastsættelse af en fremtidig usikker betaling, er der blevet udfoldet betydelige bestræbelser på at generalisere denne teori.

CAPM fremstår som prisrelationen fra en én-vare, én-periode generel eller partiel ligevægtsmodel for en bytteøkonomi, hvor kapitalmarkedet antages perfekt, og hvor de risikoaverse investorers forventede nytte af den fremtidige indkomst kun afhænger af indkomstens forventede værdi og varians. Yderligere skal det gælde, at alle investorerne er enige om den fordeling, som den fremtidige usikre betaling følger, d.v.s., at der skal være homogen tro. Betingelserne på den forventede nyttefunktion kan kun opfyldes, hvis enten alle investorer har kvadratiske nyttefunktioner, eller hvis den homogene tro er repræsenteret ved normalfordelte betalinger.

Under opretholdelse af, at investorerne udviser risikoaversion, og at kapitalmarkedet er perfekt, er metodikken, som fører til CAPM blevet overført til modeller, der tillader flere varer (Long 1974), flere perioder (Long 1974; Fama 1970), kontinuert tid (Merton 1973), andre nyttefunktioner end den kvadratiske (Rubinstein 1976a; Merton 1973), og andre fordelinger forskellig fra normalfordelingen (Ross 1978a). Betingelsen for, at de resulterende prisrelationer kan finde anvendelse, vil imidlertid være, at ligevægtspriserne skal kunne udtrykkes ved markedsstørrelser og ikke ved individafhængige størrelser. Denne velkendte aggregeringsproblematik (Rubenstein 1974) fører, som det fremgår af forannævnte henvisninger, til stærke begrænsninger af de brugbare generaliseringer.

I det følgende vil vi, inspireret af Rubenstein (1976), Ross (1978b) og Garman (1977), til prisfastsættelse af usikre fremtidige betalinger benytte en metode, der undslipper aggregeringsproblematikken. Ideen i metoden kan illustreres ved et simpelt eksempel:

Lad os betragte en person, som ønsker at sælge sit rækkehus. Selv om vedkommende har kendskab til CAPM, eller endog mere avancerede ligevægtsmodeller, vil han næppe benytte denne viden til at finde frem til den ligevægstpris, han skal forlange for boligen. Sælgeren vil i stedet for observere omsætningerne på husmarkedet, og i særdeleshed undersøge, hvilke priser der er blevet opnået ved salg af de identiske naborækkehuse. Salgsprisen vil der igennem blive valgt i overensstemmelse med priserne på det allerede eksisterende marked efter princippet, at ens varer skal have samme pris. Særlig nemt er det, hvis et af naborækkehusene netop er solgt, idet salgsprisen da blot overtages.[1] Vanskelighederne begynder, hvis prisen skal findes ved sammenligning med mange andre hustypers priser, og accentueres yderligere, dersom helt andre aktivers priser skal involveres. Uanset om det er let eller vanskeligt for rækkehusejeren, vil han forsøge at finde den rette pris ved at undersøge, om han på den ene eller den anden måde kan konstruere et duplikat af det, han ønsker at afhænde. Salgsprisen vælges da som identisk med duplikatets pris. I modsætning til ligevægtsmodellens absolutte pris vil ovennævnte model, benævnt arbitrageteorien, føre til en relativ pris, som ikke nødvendigvis er en ligevægtspris.

I afsnit 2 vil vi belyse nogle grundlæggende udsagn, der gives i form af nogle uligheder, som skal være opfyldt i en arbitragefri økonomi. Desuden vil de basale forudsætninger, der må gøres om økonomien og dets individer, blive anført.

I afsnit 3 vil arbitrageulighedernes negative udsagn via Farkas Lemma blive konverteret til et positivt udsagn om priser i en arbitragefri økonomi. Dette gøres uden indførelse af homogen tro, nyttefunktioner og ligevægtsbetingelser. Det er i denne forstand en mere generel prisrelation end den under ligevægtsmodellerne udviklede, men desværre vil der indgå størrelser i prisrelationen, om hvilke vi kun kan give garanti for deres eksistens. Til opnåelse af en teori er det derfor nødvendigt at gøre yderligere antagelser. For at undgå nyttefunktionsproblematikken vil den savnede struktur bliver tilført modellen gennem fordelingsfunktions antagelser. Det skal imidlertid pointeres, at der ikke kræves homogen tro.

I afsnit 4 vil det blive anskueliggjort, at prisen på ethvert aktiv, som er medtaget i økonomien, kan findes som løsningen til en differentialligning.

Afsnit 5 benyttes til at beskrive forskellige obligationstyper.

I afsnit 6 vil den udviklede teori blive benyttet til at etablere udtryk for værdien af forskellige obligationstyper.

Endelig vil vi i afsnit 7 belyse, hvorledes forskellige beskatningsregler vil influere på debitors incitament til at udstede indeksobligationer, og yderligere undersøge, hvilke beskatningsmæssige forhold der skal være opfyldt, for at kreditor i det hele taget vil erhverve indeksobligationer.

Afslutningen vil indeholde konklusioner.

2. Arbitrageuligheder

Den benyttede notation og udviklingen af den basale model følger Garman (1977). Som en helt grundlæggende forudsætning vil vi antage, at der ikke er mulighed for at skabe risikofri arbitragegevinster gennem køb og salg på kapitalmarkedet, der

1. Der forudsættes fuld gennemsigtighed på markedet, ingen transaktionsomkostninger og identisk finansiering af husene.

antages at fungere uden transaktionsomkostninger. Yderligere forudsættes det, at de funktioner, der medgår til beskrivelse af problemstillingen, er tilpas pæne, således at de nødvendige matamatiske operationer, der vil blive foretaget i afsnittene 3 og 4, er tilladelige.

Lad

θ_t angive naturtilstanden til tiden t. Alle individer i økonomien er enige om, at alle relevante naturtilstande kan beskrives ved θ_t, der eventuelt kan være en vektor. Hvis θ_t er givet, er der fuldstændig enighed om, hvilke konsekvenser dette medfører. Imidlertid behøver der ikke at være enighed om fordelingsfunktionen for θ_t, d.v.s. at der ikke kræves homogen tro,

$X_j(\theta_t, t)$ angive betalingen pr. tidsenhed hidrørende fra det j'te aktiv til tiden t, hvis naturtilstanden bliver θ_t,

$V_j(\theta_t, t)$ angive prisen for det j'te aktiv til tiden t i naturtilstanden θ_t, og

z_j være en ejerandel af det j'te aktiv.

Umuligheden af risikofri arbitragegevinster kan da gives formen:

Der eksistere ikke sådanne z'er, at

$$\sum_j z_j V_j(\theta_t, t) < 0 \tag{1}$$

$$\sum_j z_j X_j(\theta_\tau, \tau) \geqq 0$$

for alle θ_τ og alle $\tau \geqq t$.

Betingelsen (1) udtrykker, at det skal være umuligt for en negativ pris at erhverve en portefølje, som udelukkende giver anledning til ikke-negative betalinger i fremtiden. Vi kan også udtrykke dette ved, at vi ikke kan modtage en betaling nu mod med sikkerhed udelukkende at modtage yderligere ikke-negative betalinger i fremtiden. Det forekommer rimeligt!

Forudsættes, at aktiverne markedsføres kontinuert, kan restriktionerne strammes, idet muligheder for et fremtidigt salg af den til tid t købte portefølje kan inkorporeres. Dette giver anledning til de efterfølgende arbitrageuligheder, der direkte tager højde for en dynamisk intertemporal udvikling. Under anvendelse af funktionerne

$$h_T(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{for } \tau \leqq T \\ 0 & \text{for } \tau > T \end{cases}$$

og

$$\delta_T(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{for } T = \tau \\ 0 & \text{for } T \neq \tau\,, \end{cases}$$

kan arbitrageulighederne gives den intertemporale form:

Der eksisterer ikke sådanne z'er, at

$$\sum z_j V_j(\theta_t, t) < 0 \tag{2}$$

$$\text{og } \sum z_j [x_j(\theta_\tau, \tau) \cdot h_T(\tau) + V_j(\theta_\tau, \tau) \cdot \delta_T(\tau)] \geqq 0$$

for noget T, alle θ_τ og alle $T \geqq \tau \geqq t$.

Fortolkningen af (2) følger ganske nøje den til (1) anførte.

Arbitrageulighederne er her opstillet for en situation, hvor betalingerne foretages kontinuert, men naturligvis vil lignende udsagn være gældende for en diskret betalingsmodel. Da de matematiske udledninger, som følger, imidlertid er lettere at foretage i det kontinuerte tilfælde, vil vi ikke forfølge en diskret beskrivelse.

3. Intertemporal prisrelation på integralligningsform

Sammenholdes ulighedssystemet (2) med Farkas-Minkowski's Lemma,[2] opnår vi, at det krævede fravær af z'er, der opfylder arbitrageulighederne, er ensbetydende med, at

der eksisterer en ikke-negativ funktion
$K(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t)$, markedskærnen, som er en løsning til
integralligningen

$$V_j(\theta_t, t) = \int_{\tau \geqq t} \int_{\theta_\tau} K(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t)[h_T(\tau) x_j(\theta_\tau, \tau) + \delta_T(\tau) V_j(\theta_\tau, \tau)]\, d\theta_\tau\, d\tau \tag{3}$$

Fra at være i besiddelse af et udsagn, (2), om hvorledes priserne ikke måtte være, har vi nu i (3) opnået en ligning, der udtrykker, hvad priserne skal være.

Det bemærkes, at prisrelationen er blevet genereret, uden at der er blevet indført nyttefunktioner for forbrugerne. Til gengæld ved vi ikke meget om K-funktionen. Den eksisterer og er ikke-negativ, er uafhængig af det aktuelt betragtede aktiv, men behøver

2. Farkas-Minkowski's Lemma kan f.eks. findes i R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Section 22.

ikke at være éntydig.[3] Hvis der ikke foretages yderligere antagelser, kan (3) udelukkende anvendes til at finde de relative priser på aktiver, der tillader, at K kan elimineres. Dette vil kun være tilfældet for en gruppe af aktiver, som gennem linearkombinationer er duplikater af hinanden.

Med henblik på at opnå en vurdering af mere generelle værdipapirer og i realiteten nå en absolut vurdering vil vi antage, at θ_t følger en (eventuelt individafhængig) diffusionsproces. For en vilkårlig forbruger betyder dette, at tæthedsfunktionen, $q(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t)$, for overgang mellem tilstandene (θ_t, t) og (θ_τ, τ) vil være specificeret ved den øjeblikkelige forventede værdi, $\alpha(\theta_t, t)$ og den øjeblikkelige covariansmatrix $\Omega(\theta_t, t)$.

Naturtilstandsvektoren er således løsningen til den stokastiske differentialligning

$$d\theta_t = \alpha(\theta_t, t)\, dt + H(\theta_t, t)\, dW_t\,,$$

hvor

$$H(\theta_t, t) \cdot H(\theta_t, t)' = \Omega(\theta_t, t), \quad \text{og}$$

W_t er en standard Wiener proces.

Defineres kvotientkærnen $G(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t)$ ved

$$G(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t) = \begin{cases} \dfrac{K(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t)}{q(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t)} & \text{for } q(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t) \neq 0 \\ 0 & \text{ellers}\,, \end{cases}$$

kan integralligningen skrives på den hensigtsmæssige form

$$V_j(\theta_t, t) = \int_{\tau \geqq t} \int_{\theta_\tau} G(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t)[h_T(\tau) x_j(\theta_\tau, \tau) + \delta_T(\tau) V_j(\theta_\tau, \tau)] \times q(\theta_\tau, \tau, \theta_t, t)\, d\theta_\tau\, d\tau\,. \tag{4}$$

4. Prislrelation på differentialligningsform

Da alle funktionerne i (4) pr. antagelse er tilstrækkelig pæne, kan vi foretage en Taylor-række udvikling i tiden og tilstandsvariablerne. Foretages dette, og lader vi

3. Éntydighed opnås, hvis markedet er komplet. For denne situation vil K angive priserne på Arrow-Debreu aktiver.

$T \to t$, kan vi, idet det udnyttes at θ_t følger en diffusionsproces, opnå en differentialligning på formen

$$
\begin{aligned}
& x_j(\theta_t, t) + \frac{\partial V_j}{\partial t} + \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 V_j}{\partial \theta_{it} \partial \theta_{kt}} \cdot \Omega_{ik} \\
& + \sum_i \frac{\partial V_j}{\partial \theta_{it}} \left(\alpha_i(\theta_t, t) + \sum_k \Omega_{ik} \left. \frac{\partial G}{\partial \theta_{k\tau}} \right|_{\substack{\tau = t \\ \theta_\tau = \theta_t}} \right) \qquad (5) \\
& + \left[\sum_i \left. \frac{\partial G}{\partial \theta_{i\tau}} \right|_{\substack{\tau = t \\ \theta_\tau = \theta_t}} \cdot \alpha_i(\theta_t, t) + \left. \frac{\partial G}{\partial \tau} \right|_{\substack{\tau = t \\ \theta_\tau = \theta_t}} \right. \\
& \left. + \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_k \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_{i\tau} \partial \theta_{k\tau}} \right|_{\substack{\tau = t \\ \theta_\tau = \theta_t}} \cdot \Omega_{ik} \right] V_j(\theta_t, t) = 0
\end{aligned}
$$

Betydningen af diffusionsantagelsen om den stokastiske proces træder ved iagttagelse af (5) klart frem. Det er nemlig ikke nødvendigt at have kendskab til alle karakteristika for kvotientkærnen, idet der i (5) kun fremkommer led af formen

$$
\frac{\partial G}{\partial \tau}, \frac{\partial G}{\partial \theta_{k\tau}} \quad \text{og} \quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_{k\tau} \partial \theta_{i\tau}} \right|_{\substack{\tau = t \\ \theta_\tau = \theta_t}}
$$

Det enkelte individ vil kun have behov for at kende disse størrelser. Da G og dermed de afledede af G er aktiv-uafhængig, kan vi estimere de relevante størrelser ved at benytte (5) på aktiver, for hvilke vi har adgang til observationer af x og V. Som repræsentant for G kan vi derefter benytte en vilkårlig funktion, der blot opfylder, at de karakteristiske størrelser, der indgår i (5), skal være i overensstemmelse med de netop omtalte estimater. Således udstyret med G-funktionen er vejen åben for at finde værdien af andre aktiver. Dette vil i de fleste tilfælde lettest kunne udføres under anvendelse af integralligningen (4).

Det er værd at bemærke, at værdirelationen er udledt, uden at der er blevet benyttet noget aksiomsystem om forbrugernes præferencer. Det er derfor heller ikke muligt at give nogen økonomisk fortolkning af kvotientkærnens afledede, men hvis forbrugerne har præferenceordninger, der f.eks. opfylder, at forventet nyttemaksimering er rationelt, da vil kvotientkærnen naturligvis afspejle disse præferencer, og den således tilførte struktur kan udnyttes fortolkningsmæssigt. Dette tiltag vil imidlertid ikke blive forfulgt.

5. Risici forbundet med forskellige obligationstyper

Hovedparten af de obligationer, som findes på det danske kapitalmarked, er enten af annuitetslånstypen eller af serielånstypen. Vi vil i dette afsnit beskrive nogle risici, som er knyttet til debitor- og/eller kreditorsiden for disse eksisterende obligationstyper, samt anføre hvorledes indeksobligationer vil placere sig i dette billede. Politisk betinget risiko vil ikke blive behandlet.

5.1. *Købekraften af de fremtidige nominelle betalinger*

For serie- og annuitetslånsobligationers vedkommende vil såvel debitor som kreditor være underkastet en fælles usikkerhed knyttet til købekraften af de fremtidige nominelle betalinger. En udvikling i købekraften vil dog typisk vurderes forskelligt af de to parter. Prisen på en obligation fastsættes bl.a. under hensyntagen til forventningerne til den fremtidige udvikling af købekraften. Forventningerne overvæltes således i den effektive rente, som debitor må betale. Debitor »straffes/belønnes« her og nu på baggrund af nogle forventninger, som måske ikke realiseres, og situationen fastlåses langt ud i fremtiden. Dette kan ikke umiddelbart siges at være rationelt, idet man negligerer den informationsmængde, der kan erhverves i fremtiden, og således afskriver sig muligheden for dynamisk tilpasning.

Denne ulempe afhjælpes ved indeksobligationer, idet ydelserne løbende tilpasses efter det valgte indeks.

5.2. *Debitors betalingsevne i fremtiden*

Ved såvel annuitets- som serielån må kreditor bære en risiko for, at debitor ikke kan overholde sine betalingsforpligtelser i fremtiden. Mest udtalt er dette for annuitetslånene, hvor ydelserne ikke er aftagende som funktion af tiden, men reelt er den omtalte risiko minimal, idet der via den pågældende obligationsudstedende forening opnås en risikospredning. For indeksobligationers vedkommende vil sandsynligheden for manglende betalingsevne kunne blive betragtelig, dersom indekset og debitors betalingsevne ikke er tilstrækkeligt positivt korreleret. Vi vil derfor under behandlingen af indeksobligationer udlede et udtryk, der angiver, hvorledes den krævede indeksrente vil afhænge af betalingsevnen.

5.3. *Annuitetslån*

I dette afsnit antages det af bekvemmelighedsgrunde, at købekraften er konstant og deterministisk. Lad os betragte en bestemt obligationsserie for et annuitetslån. Serien vil for en aggregeret debitor, fremkommet ved summation over alle de enkelte debitorer, der har finansieret deres investeringer gennem salg af obligationer fra den pågældende serie, blive tilbagebetalt efter annuitetsprincippet. En aggregeret kreditor vil, idet der bortses fra transaktionsomkostninger, modtage tilbagebetalingen som ydelserne fra et annuitetslån. Såvel debitor som kreditor har for sig en strøm af deterministiske betalinger. Yderligere er der en symmetri aggregeret debitor og aggregeret kreditor imellem, idet hvad den ene betaler, modtager den anden.

Med baggrund i disse udsagn vil man naturligt slutte, at prisen på obligationsserien skal fastsættes som værdien af en deterministisk betalingsstrøm, således at der ikke er behov for nogen risikopræmiebetragtning. I det efterfølgende vil vi imidlertid vise, at dette er en fejlagtig slutning.

Lad os betragte den enkelte debitor, henholdsvis kreditor. Debitors ydelser vil fortsat udgøre en deterministisk betalingsstrøm, men da tilbagebetalingen for den enkelte obligation styres af en udtrækningsmekanisme, vil en kreditor, som ejer en obligation, modtage ydelser, der modsvarer et fast lån med en stokastisk løbetid, der er begrænset af annuitetens løbetid. Symmetrien, der eksisterede på det aggregerede niveau, er elimineret, når vi betragter enkeltindivider. I og med at kreditor modtager en ikke-deterministisk strøm af betalinger, vil han, hvis han har risikoaversion, kræve en risikopræmie.[4] Risikopræmiens størrelse kan findes som forskellen mellem værdien af en nominelt deterministisk annuitets-betalingsstrøm svarende til debitors betalinger, og værdien af en betalingsstrøm, hvor ovennævnte annuitets totale hovedstol tilbagebetales på én gang. Dette tilbagebetalingstidspunkt er en stokastisk variabel, hvis overgangssandsynlighed angiver sandsynligheden for, at obligationen udtrækkes til tiden τ, givet den nuværende tilstand. Lad

$$y_\tau = \begin{cases} \tau & \text{hvis obligationen udtrækkes til tid } \tau \\ 0 & \text{ellers ,} \end{cases}$$

og $q(y_\tau, \tau, y_0 = 0, \tau = 0)$ angive overgangssandsynligheden. Hvis den betragtede annuitet har en hovedstol på 1 kr., påtrykt rentestyrke r, løbetid T og annuitetsydelse pr. tidsenhed a kr., vil risikopræmien π med dette afsnits forudsætninger in mente, gennem (4) kunne findes af følgende udtryk:

$$\pi = \int_0^T \sum_{y_\tau} G(y_\tau, \tau, y_0, 0) h_T(\tau) \cdot a \cdot q(y_\tau, \tau, y_0, 0)\, d\tau$$
$$- \int_0^T \sum_{y_\tau} G(y_\tau, \tau, y_0, 0)[h_{y_\tau}(\tau) r + \delta_{y_\tau}(\tau) \cdot 1] q(y_\tau, \tau, y_0, 0)\, d\tau$$

4. Risikopræmien kunne elimineres, hvis den enkelte kreditor kunne sammensætte en portefølje af obligationer fra den pågældende serie på en sådan måde, at der resulterede en deterministisk betalingsfølge. Dette kan imidlertid kun opnås gennem erhvervelse af hele obligationsserien

$$= a \cdot \frac{1-e^{-r_0 T}}{r_0} - \int_0^T \sum G(y_\tau, \tau, y_0, 0)[h_{y_\tau}(\tau)r + \delta_{y_\tau}(\tau) \cdot 1] \times q(y_\tau, \tau, y_0, 0)\, d\tau$$

I formlen for π angiver r_0 den risikofri rente.

Obligationslånet er således set fra debitorsiden deleligt, medens dette ikke er tilfældet fra kreditorsiden, hvor den aggregerede betaling er deterministisk, medens den disaggregerede betaling er stokastisk. Vi kunne også udtrykke dette ved at sige, at der er tilknyttet en form for monopoli til den samlede obligationsserie.

Det forekommer irrationelt, at de obligationsudstedende foreninger, der for en overvejende del er debitorejede, fastsætter sådanne lotteribaserede tilbagebetalingsbetingelser, at prisen på en obligation nedsættes med en risikopræmie; en nedsættelse som rammer debitor på finansieringstidspunktet.

Kreditor vil ikke gennem opbygning af en portefølje, hvis bestanddele udgøres af annuitetsobligationer, kunne opnå en for ham ønskværdig deterministisk betalingsstrøm, f.eks. en strøm der modsvarer et fast lån.

5.4. *Serielån*

For serielånenes vedkommende kan symmetrien mellem debitor og kreditor opretholdes på individniveau. Tilbagebetalingen styres også her af et lotteri, men det vil stedse være muligt at skabe en portefølje, hvis tilknyttede betalingsstrøm er deterministisk. Der vil således ikke for serieobligationer optræde nogen risikopræmie foranlediget af udtrækningsmekanismen.

Kreditor kan gennem opbygning af en portefølje, hvis bestanddele udgøres af serielånsobligationer, opnå en for ham ønskværdig deterministisk betalingsstrøm, f.eks. en strøm der modsvarer et fast lån.

5.5. *Faste lån og indekslån*

I det følgende vil vi foretage en vurdering af indeksobligationer, hvis tilknyttede betalinger vil afhænge af en tilstandsvariabels udvikling over tiden. For at lette overskueligheden vil samtlige udregninger og sammenligninger blive foretaget for obligationer, hvor hele tilbagebetalingen foregår til en på forhånd fastsat tid, d.v.s. for faste lån. Som prototype på en ikke-indekseret obligation kan vi derfor forestille os en obligation, som repræsenterer en passende linearkombination af serielånsobligationer. En sådan fastlåns obligation vil vi betegne en f-type obligation. Indeksobligationen vil blive betegnet en i-type obligation.

6. Værdien af fastlåns- og indeksobligationer

Til beskrivelse af værdibestemmelse af obligationstyper vil vi antage, at naturtilstandsvektoren er 2-dimensional, (φ_t, ξ_t), hvor φ_t er et prisindeks for f.eks. byggeriets omkostninger, og ξ_t er et residual indeks, således at et aktiv, hvis nominelle betalinger til tiden τ er $\varphi_\tau \cdot \xi_\tau$, vil have realværdien 1. Det antages, at ξ_t og φ_t følger diffusionsprocesser med parametrene

$$\big(\alpha(\xi_t, t), \beta(\varphi_t, t)\big) = (\alpha_0 \xi_t, \beta_0 \varphi_t)$$

og

$$\Omega(\xi_t, \varphi_t, t) = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 \xi_t^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2 \varphi_t^2 \end{bmatrix}$$

hvor $\alpha_0, \beta_0, \sigma_\xi^2$ og σ_φ^2 er konstanter.

Med denne specifikation findes $q(\xi_\tau, \varphi_\tau, \tau, \xi_t, \varphi_t, t)$, $\tau > t$, at have formen

$$q(\xi_\tau, \varphi_\tau, \tau, \xi_t, \varphi_t, t) = \frac{1}{\xi_\tau \xi_t \sigma_\xi \varphi_\tau \varphi_t \sigma_\varphi 2\pi(\tau - t)}$$
$$\times \exp\left[-\frac{\left(\ln\frac{\xi_\tau}{\xi_t} - \left(\alpha_0 - \frac{\sigma_\xi^2}{2}\right)(\tau - t)\right)^2}{2\sigma_\xi^2(\tau - t)} - \frac{\left(\ln\frac{\varphi_\tau}{\varphi_t} - \left(\beta_0 - \frac{\sigma_\varphi^2}{2}\right)(\tau - t)\right)^2}{2\sigma_\varphi^2(\tau - t)}\right]$$

I det efterfølgende benyttes $t = 0$ og $\xi_0 = \varphi_0 = 1$.

Lad G-funktionens afledede være estimeret gennem benyttelse af dele af det øvrige kapitalmarked, således at en tilladelig kvotientkærne har formen

$$G(\xi_\tau, \varphi_\tau, \tau, \xi_0, \varphi_0, 0) = e^{-\varrho\tau}\left(\frac{\xi_0}{\xi_\tau}\right)\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_\tau}\right).$$

Dette valg vil være i overensstemmelse med, at renten på et nominelt risikofrit aktiv er konstant. Et nominelt risikofrit værdipapir vil pr. definition opfylde $V(\xi_\tau, \varphi_\tau, \tau) = 1$, og indsættes dette i (5), og benyttes den anførte kvotientkærne, findes renten, $x(\xi_t, \varphi_t, t)$, at opfylde

$$x(\xi_t, \varphi_t, t) + [-\alpha_0 - \beta_0 - \varrho + \sigma_\xi^2 + \sigma_\varphi^2] = 0 .$$

6.1. *Et fast lån med udløbstid T og kuponydelse i overensstemmelse med en nominel rentestyrke på r%*

Betragt et fast lån med udløbstid T, d.v.s. et lån, hvor hovedstolen tilbagebetales til tiden T. Lad den påtrykte nominelle rentestyrke være $r \geq 0$ og hovedstolen være 1 kr.

Idet prisen på den tilsvarende kuponobligation af f-typen til tiden 0 betegnes ved V_f, finder vi, ved indsættelse i (5), at

$$V_f = \int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varrho\tau} \frac{1}{\xi_\tau \varphi_\tau} [h_T(\tau) \cdot r + \delta_T(\tau) \cdot 1] q(\xi_\tau, \varphi_\tau, \tau, 1, 1, 0)\, d\xi_\tau\, d\varphi_\tau\, d\tau \qquad (6)$$

$$= \frac{r}{\gamma}(1 - \exp(-\gamma T)) + \exp(-\gamma T),$$

hvor $\gamma = \varrho + \alpha_0 + \beta_0 - \sigma_\xi^2 - \sigma_\varphi^2$.

Med en diskonteringsfaktor lig med den implicerede nominelle risikofri rente ser vi, at V_f består af værdien af en uendelig betalingsstrøm på r kr. pr. tidsenhed, reduceret med værdien af den samme betalingsstrøm begyndende T tidsenheder senere, plus værdien af en betaling på 1 kr. til tiden T.

I udtrykkene for q, G og V_f har vi ikke anført noget indeks, som angiver individafhængigheden, men hvis der er homogen tro, vil q være identisk for alle individer, og hvis det risikofri aktiv markedsføres, følger at ϱ tillige må være individuafhængig. Dersom homogen tro ikke forekommer, vil der imidlertid være mulighed for, at ϱ individualiseres, men (6) vil, da venstresiden er markedsbestemt, stadig være gældende.

Som man på forhånd ville forvente, vil V_f være en voksende funktion af r og for $\gamma > r$ være en aftagende funktion af T. Det bemærkes imidlertid, at V_f er en voksende funktion af variansen $\sigma_\xi^2 + \sigma_\varphi^2$, således at investor foretrækker en stor varians frem for en lille varians. Dette kan vi forklare ved, at kreditor altid kan være sikker på, at købekraften af de betalinger, han modtager i fremtiden, er ikke-negativ. Det er således begrænset, hvad han kan miste, hvorimod der ikke a priori er nogen grænse for, hvor meget han har mulighed for at opnå, og chancen for at få meget vil forøges, når variansen forøges. Begrænsningen, der medfører dette, er af samme art som debitors begrænsede hæftelse, og indgår i den intertemporale prisrelation (3), hvor det netop anføres, at markedskærnen skal være en ikke-negativ funktion.

Betragtes den logaritmiske overgangstæthedsfunktion, vil en forøgelse af variansen for fastholdt α_0 give en tæthed med større vægt på »halerne«, men da den nedre »hale«s udstrækning er begrænset nedad til, forøges ophobningen af vægten nær nul. Samtidig vil $(\alpha_0 - \frac{1}{2}\sigma^2)$, der indgår i udtrykket for q, blive formindsket. Begge forhold taler netop for, at værdien skal forøges. Den logaritmiske tæthedsfunktion tager således højde for ikke-negativitetsbetingelsen.

Hvis overgangstæthedsfunktionen ikke var begrænset nedad til, måtte der eksplicit tages hensyn til en ikke-negativitetsbetingelse i kvotientkærnen. For θ, følgende en normalfordeling vil en kvotientkærne på formen $\exp(-\varrho\tau)/\theta_\tau$ ikke være tilladelig, medens kærnen $\exp(-\varrho\tau)\max(0, 1/\theta_\tau)$ er brugbar. For generelle tæthedsfunktioner kan det derfor være nødvendigt at indbygge en optionsbetingelse i kvotientkærnen.

6.2. *Et fast lån med terminalbetaling φ_T til tiden T og kuponydelse på $i\varphi_t$ pr. tidsenhed*

Betragt igen et fast lån med udløbstid T, men lad terminalbetalingen være den stokastiske variabel φ_T pr. enhed af den oprindelige hovedstol, som vi vil antage er på 1 kr. Hovedstolen reguleres til stadighed med indekset φ_t, og af den således regulerede hovedstol svares en rente på $i \cdot 100\%$ pr. tidsenhed.

Med V_i angivende indeksobligationens værdi får integralligningen (5) formen

$$V_i = \int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\varrho\tau} \frac{1}{\xi_\tau \varphi_\tau} [h_T(\tau) i\varphi_\tau + \delta_T(\tau)\varphi_\tau] \times q(\xi_\tau, \varphi_\tau, \tau, 1, 1, 0)\, d\xi_\tau\, d\varphi_\tau\, d\tau \qquad (7)$$

$$= \frac{i(1-e^{-\delta T})}{\delta} + e^{-\delta T},$$

hvor $\delta = \varrho + \alpha_0 - \sigma_\xi^2$.

Af relationen (7) følger, at hvis indeksobligationen ved udstedelsen skal sælges til pari, da må den påtrykte rente opfylde betingelsen $i = \delta$.

Renten på indeksobligationen skal være lig med realrenten korrigeret for den usikkerhed, som det valgte indeks ikke tager højde for.

7. Obligationspriser under hensyntagen til beskatning

I og med at beskatning indføres, vil et givet værdipapirs renteydelser skulle deles mellem to parter, kreditor/debitor og det offentlige. Et værdipapir vil for kreditor/debitor repræsentere fremtidige ydelser, hvis størrelse vil afhænge af, hvorledes hans beskatning er fastsat. Hvis, og det kan med en progressiv beskatning være tilfældet, ikke alle individer har den samme marginale beskatning, vil værdipapirerne blive individualiseret. Betalingerne efter skat vil være individafhængige. Hvis priserne på værdipapirerne ikke er individualiseret gennem f.eks. en subsidieordning, og vi vil antage, at dette ikke er tilfældet, kan markedskærnen være påvirket af disse skævheder i beskatningen. En forbruger, der har en beskatningsprocent på s_1, kan kun handle med de værdipapirer, som er eller bliver individualiseret gennem en skattefaktor på s_1; f.eks. kan han ikke gå i en kort position i et værdipapir, hvortil er knyttet en beskatningsprocent på $s_2 + s_1$.

Kapitalmarkedet opdeles på denne måde i separate markeder, og et individ har kun direkte adgang til et enkelt af disse markeder.

Vi vil betragte tilfældet, hvor kapitalmarkedet er segmenteret i to markeder, svarende til at der findes en gruppe homogene debitorer og en gruppe homogene kreditorer. Et værdipapir, hvis betalinger ingen beskatningsmæssige konsekvenser har, vil ifølge arbitrageteorien vurderes identisk af de to grupper, og eksistensen af et sådant papir ville være ideelt med hensyn til at etablere en relation mellem brugbare kvotientkærner for de to grupper. Fravær af dette værdipapir bevirker, at det er nødvendigt at indføre en antagelse, der tillader, at en relation med denne egenskab kan opnås. Vi vil forudsætte, at begge grupper er enige om den rationelle arbitragepris på obligationer af f-typen. Med den foreslåede form af kvotientkærnen vil det for de to grupper give anledning til forskellige diskonteringsfaktorer.

I det efterfølgende vil indices k og d repræsentere henholdsvis en kreditor og en debitor, beskatningsprocenten vil blive betegnet ved $s_{\cdot}$·100, og beskatning foretages af renteydelser.

7.1. *Et fast lån med udløbstid T, kuponydelse i overensstemmelse med en nominel rentestyrke på r og kreditor/debitor beskatning på s_{fk}/s_{fd}*

Værdien af det faste lån findes i analogi med (6) at være

$$V_{fs_j} = \frac{r(1-s_{fj})}{\gamma_j}(1-e^{-\gamma_j T})+e^{-\gamma_j T}, \quad j=k,\ d, \tag{$6s_j$}$$

hvor $\gamma_j = \varrho_j + \alpha_{0j} + \beta_{0j} - \sigma^2_{\xi j} - \sigma^2_{\varphi j}$.

Ifølge antagelsen er $V_{fs_k} = V_{fs_d} = V_{fs}$.

7.2. *Et fast lån med terminalbetaling φ_T til tiden T, kuponydelse på $i\varphi_t$ og beskatning på s_{ik} og s_{id}*

Antag, at det allerede eksisterende kapitalmarked suppleres med et indekslån, og at dets rentestyrke fastsættes således, at kreditor ikke kan opnå nogen arbitragegevinst, og således, at værdipapiret ved udstedelsen sælges til pari. Rentestyrken skal da opfylde relationen

$$1 = V_{is_k} = \frac{i(1-s_{ik})}{\delta_k}(1-e^{-\delta_k T})+e^{-\delta_k T}, \tag{$7s_k$}$$

hvor $\delta_k = \varrho_k + \alpha_{0k} - \sigma^2_{\xi k}$.

7.2.1. *Incitament til at udstede indeksobligationer*

Betragt nu en debitor, som skal have finansieret en investering på 1 kr. Dette kan foretages enten gennem udstedelse af en obligation af f-typen med hovedstol $1/V_{fs}$ eller gennem udstedelse af en obligation af typen i med begyndelseshovedstol på 1.

Benyttes indeksobligation, vil debitor vurdere de fremtidige ydelsers værdi til at være

$$V_{is_d} = \frac{i(1-s_{id})}{\delta_d}(1-e^{-\delta_d T})+e^{-\delta_d T}\ , \tag{$7s_d$}$$

hvor $\delta_d = \varrho_d + \alpha_{0d} - \sigma^2_{\xi d}$.

Debitor vil derfor foretrække at finansiere

$$\text{ved } f\text{-typen hvis } V_{is_d} > 1,$$
$$\text{ved } i\text{-typen hvis } V_{is_d} < 1 \quad \text{og}$$

være indifferent over for valg af type, hvis $V_{is_d} = 1$.

I ($7s_d$) indgår såvel beskatningen som debitors tro udtrykt ved α_{0d} og $\sigma^2_{\xi d}$, således at det bliver en kombination af disse faktorer, der vil være afgørende for debitors valg. Betingelsen for, at debitor har et incitament til at udstede indeksobligationer, kan under anvendelse af ($7s_d$) og ($7s_k$) udtrykkes ved:

$$\frac{i(1-s_{id})}{\delta_d} < \frac{i(1-s_{ik})}{\delta_k} = 1\ .$$

Betragtes tilfældet med homogen tro, vil

$\delta_k - \delta_d = \gamma_k - \gamma_d$, og betingelsen bliver

$$\delta_k - \delta_d = \gamma_k - \gamma_d < \delta_k s_{id} - \delta_d s_{ik}\ .$$

Da δ_d må formodes at være positiv, vil incitamentet blive maksimalt for $s_{ik} = 0$, svarende til at kreditorgruppen ikke beskattes af renteindbetalingerne hidrørende fra indeksobligationer.

Efterfølgende numeriske eksempel, hvor homogen tro er antaget, vil imidlertid vise, at det ikke er nødvendigt at lade kreditors beskatning være helt så lille, for at debitors incitament opretholdes.

Betragt en 10%, 10-årig obligation af f-typen og lad følgende data være gældende:

$$\begin{aligned} \alpha_o + \beta_0 &= 0.12 \\ \sigma^2_\xi + \sigma^2_\varphi &= 0.005 \\ s_{fk} &= 0.60 \end{aligned}$$

$$\varrho_k = 0.01$$
$$s_{fd} = s_{id} = 0.40$$

Ved benyttelse af $(6s_k)$ findes $V_{fs} \approx .50$, og da kreditor og debitor pr. forudsætning er enige om det rationelle i denne prisfastsættelse, findes ved anvendelse af $(6s_d)$, at $\gamma_d \approx 0.156$. I tabel 1 er resultaterne for anvendelse af forskellige indeks anført.

Tabel 1.

$\beta_0 - \sigma_\varphi^2$	δ_k	δ_d	i	debitor opnår et incitament hvis s_{ik} <
0.115	0.010	0.041	$(1-s_{ik})^{-1}$	.85
0.075	0.050	0.081	$5(1-s_{ik})^{-1}$	.63
0.025	0.100	0.131	$10(1-s_{ik})^{-1}$	.53

Eksemplet, der ikke indeholder outrerede data, påpeger, at der næppe er behov for at etablere særlige beskatningsforhold i forbindelse med introduktion af indeksobligationer, dersom vi betragter debitorsiden. Det skal dog bemærkes, at kontantlån ikke er medtaget i betragtningerne.

Yderligere viser eksemplet det ikke uventede, at den krævede indeksrente vokser, når indeksets styrke med hensyn til at tage højde for fremtidig usikkerhed svækkes.

7.2.2. *Debitors eventuelle svigtende betalingsevne*

De udledte resultater bygger på, at debitor med sikkerhed kan betale terminalydelsen. Hvis kreditor befrygter, at dette ikke altid vil være tilfældet, svarende til en positiv sandsynlighed for at φ_T er større end debitors betalingsevne til tiden T, W, da vil kreditor kræve en forøgelse af rentestyrken som kompensation for denne risiko. Kompensationen, udtrykt gennem rentestyrken, findes ved anvendelse af integralligningen, der får formen

$$\begin{aligned} 1 = & \int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty G(\varphi_\tau, \xi_\tau, \tau, 1, 1, 0) g(\varphi_\tau, \xi_\tau, \tau, 1, 1, 0) \\ & \times \left[h_T(\tau) i(1-s_{ik})\varphi_\tau + \delta_T(\tau)(W - \max(0, W - \varphi_\tau))\right] d\varphi_\tau \, d\xi_\tau \, d\tau \\ = & \frac{i(1-s_{ik})}{\delta_k}(1 - e^{-\delta_k T}) + We^{-\gamma_k T} \\ & - \left[We^{-\gamma_k T} N \left[\frac{\ln \frac{We^{-\gamma_k T}}{e^{(\gamma_k - \delta_k)T}} + \gamma_k T + \frac{1}{2}\sigma_\varphi^2 T}{\sigma_\varphi \sqrt{T}} \right] \right. \end{aligned} \tag{8}$$

$$-\frac{e^{(\gamma_k-\delta_k)T}}{e^{\gamma_k T}}N\left[\frac{\ln\frac{We^{-\gamma_k T}}{e^{(\gamma_k-\delta_k)T}}+\gamma_k T-\frac{1}{2}\sigma_\varphi^2 T}{\sigma_\varphi\sqrt{T}}\right]\Bigg],$$

hvor $N(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$

For $W\to\infty$, svarende til at debitor med sikkerhed kan betale, vil (8) gå imod relationen ($7s_{ik}$). For $W<\infty$ vil (8) imidlertid give anledning til en større krævet rentestyrke end den fra ($7s_{ik}$) fundne.

Med de tidligere benyttede data kan vi for forskellige værdier af W finde kravene til s_{ik}. Resultaterne er anført i tabel 2.

Tabel 2.

δ_k	γ_k	W	$r(1-s_{ik})$	debitor opnår et incitament hvis s_{ik} <
0.010	0.125	∞	0.01	.85
		6	0.01	.85
		3	0.021	.69
		2	0.045	.34
0.050	0.125	∞	0.05	.63
		6	0.05	.63
		3	0.051	.63
		2	0.059	.56
0.100	0.125	∞	0.10	.53
		6	0.10	.53
		3	0.10	.53
		2	0.10	.53

Af det numeriske eksempel kan vi slutte, at hensyntagen til betalingsrisiko med det forhøjede krav til rentestyrken til følge, vil bevirke, at debitors incitament eventuelt kun kan opretholdes, hvis kreditorbeskatningen lempes.

Den kantede parentes i (8) kan med henvisning til Blach og Scholes (1973) fortolkes som værdien af en option. Betragt et værdipapir, w, hvis nuværende værdi er $We^{-\gamma T}$, og hvis fremtidige værdi er styret af en diffusionsproces med varians σ_φ^2 pr. tidsenhed. Idet γ er den risikofri rentestyrke, vil værdien af et værdipapir, optionen, der udelukkende giver anledning til betalingen max $(0, W_T - e^{(\gamma-\delta)T})$ til tiden T, netop være identisk med det anførte i den kantede parentes i (8). W_T, som er en stokastisk variabel, er værdien af w til tiden T.

Køb af en indeksobligation er således ækvivalent med
at købe de lovede renteydelser, samt
at købe debitors betalingsformåen til tiden T, og samtidig
at udstede en option, der relaterer betalingsevne og købekraft.

7.2.3. $\gamma_k = \gamma_d$ *og* $\delta_k = \delta_d$

For at vurdere indflydelsen af antagelsen om, at debitor og kreditor har kvotientkærner, der bevirker, at $V_{fs_k} = V_{fs_d}$, er resultaterne for det numeriske eksempel under den alternative antagelse at $\gamma_k = \gamma_d = \gamma$, $\delta_k = \delta_d = \delta$, anført i tabel 3. Kvotientkærnerne tilpasses under denne forudsætning således, at den risikofri rente efter skat er identisk for begge grupper.

Tabel 3.

W	γ	δ	incitament for $s_{ik} <$	incitament for $s_{ik} <$
∞	.125	.01	.82	.40
		.05	.62	.40
		.10	.56	.40

I tabel 3 er incitamentet i søjle 4 udtryk for, at debitor vurderer i-typen som værende bedre end f-typen, d.v.s. at $V_{is_d} < V_{fs_d}/V_{fs_k}$. Den 5. søjle tager ud over $V_{is_d} < V_{fs_d}/V_{fs_k}$ tillige højde for, at $V_{is_d} < V_{is_k} \equiv 1$. Sammenligningen med resultaterne i tabel 1 bør imidlertid foretages under anvendelse af den 4. søjle i tabel 3, idet debitors alternativ til i-type finansiering er at benytte obligationer af type f. Sammenligningen viser ingen betydelige forskelle. Det vil dog være lemfældigt ud fra eksemplet at drage nogen generel konklusion, såsom at incitamentskravet er ufølsomt over for relationen mellem gruppernes kvotientkærner.

7.2.4. *Kreditorbeskatning*

Endelig skal det undersøges, hvorledes en anderledes beskatning af kreditors rentebetalinger for f-type obligationer vil influere på resultaterne.

Lad fortsat $V_{fs_k} = V_{fs_d} = 0.50$ og $s_{fd} = 0.4$, således at $\gamma_d = 0.156$. Umiddelbart finder vi da resultaterne i tabel 4, hvor det er tilstræbt at opnå kreditorindifferens mellem f- og i-obligationer for så lav en beskatning som muligt og for $i = 0.03$. Hvis $i = 0.03$ fører til en negativ indeksbeskatning, d.v.s. $s_{ik} < 0$, vælges i netop så stor, at $s_{ik} = 0$.

Tabel 4.

s_{fk}	γ_k	δ_k	(s_{ik} der for kreditor medfører indifferens, i)
0.60	0.125	0.010	(0.66, 0.03)
0.53	0.14	0.025	(0.17, 0.03)
0.47	0.15	0.035	(0 , 0.035)
0.40	0.16	0.045	(0 , 0.045)
0	0.0225	0.110	(0 , 0.110)

For det valgte indeks vil en 0-beskatning af begge obligationstyper medføre en rentestyrke på i-obligationen på 11%, til trods for indeksets styrke. Hvis rentestyrken skal holdes på $\sim 3\%$, kan dette med minimal beskatning opnås for $s_{ik}=0$ og $s_{fk} \sim 50$ %, for hvilken situation debitorincitamentet kan findes at andrage $1-V_{i c_u}=0.17$.

Debitor vil således have et incitament til at udstede 3% indeksobligationer, men kreditor vil kun være villig til at købe disse obligationer, hvis f.eks. $s_{fk} \cong 50\%$ og $s_{ik} = 0\%$.

8. Afslutning

Med udgangspunkt i den udviklede differentialligning (5) og integralligning (4), der kan anvendes til prisfastsættelse af alle aktiver på kapitalmarkedet, har vi ved eksempler vist, hvorledes renten på indeksobligationer vil være afhængig af beskatningen. Tillige er det blevet påpeget, at debitor med de nuværende beskatningsforhold opretholdt vil have et incitament til at udstede indeksobligationer, og at dette incitament vil være maksimalt, hvis kreditor ikke beskattes af indeksobligationens renteydelse. Ovenstående konklusion fandtes at være gældende, selv om der blev taget hensyn til debitors eventuelle svigtende betalingsevne ved indeksobligationens udløbstidspunkt. Imidlertid vil kreditor kun være villig til at købe indeksobligationer, hvis han beskattes af ordinære obligationer, medens der ingen kreditorbeskatning er for indeksobligationer. Kreditorbeskatningen af f-obligationer fandtes at skulle andrage ca. 50%.

Litteratur

Blach, F. og M.J. Scholes. 1973. Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 88:637–654.

Fama, E.F. 1970. Multiperiod Consumption-Investment Decisions. *American Economic Review*, 60:163–174.

Tabel 4.

s_{fk}	γ_k	δ_k	(s_{ik} der for kreditor medfører indifferens, i)
0.60	0.125	0.010	(0.66, 0.03)
0.53	0.14	0.025	(0.17, 0.03)
0.47	0.15	0.035	(0 , 0.035)
0.40	0.16	0.045	(0 , 0.045)
0	0.0225	0.110	(0 , 0.110)

For det valgte indeks vil en 0-beskatning af begge obligationstyper medføre en rentestyrke på i-obligationen på 11%, til trods for indeksets styrke. Hvis rentestyrken skal holdes på $\sim 3\%$, kan dette med minimal beskatning opnås for $s_{ik} = 0$ og $s_{fk} \sim 50$ %, for hvilken situation debitorincitamentet kan findes at andrage $1 - V_{ic_u} = 0.17$.

Debitor vil således have et incitament til at udstede 3% indeksobligationer, men kreditor vil kun være villig til at købe disse obligationer, hvis f.eks. $s_{fk} \cong 50\%$ og $s_{ik} = 0\%$.

8. Afslutning

Med udgangspunkt i den udviklede differentialligning (5) og integralligning (4), der kan anvendes til prisfastsættelse af alle aktiver på kapitalmarkedet, har vi ved eksempler vist, hvorledes renten på indeksobligationer vil være afhængig af beskatningen. Tillige er det blevet påpeget, at debitor med de nuværende beskatningsforhold opretholdt vil have et incitament til at udstede indeksobligationer, og at dette incitament vil være maksimalt, hvis kreditor ikke beskattes af indeksobligationens renteydelse. Ovenstående konklusion fandtes at være gældende, selv om der blev taget hensyn til debitors eventuelle svigtende betalingsevne ved indeksobligationens udløbstidspunkt. Imidlertid vil kreditor kun være villig til at købe indeksobligationer, hvis han beskattes af ordinære obligationer, medens der ingen kreditorbeskatning er for indeksobligationer. Kreditorbeskatningen af f-obligationer fandtes at skulle andrage ca. 50%.

Litteratur

Blach, F. og M.J. Scholes. 1973. Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 88:637–654.

Fama, E.F. 1970. Multiperiod Consumption-Investment Decisions. *American Economic Review*, 60:163–174.

Garman, M.B. 1977. *A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes*. Working Paper no. 50, Research Program in Finance, University of California, Berkeley.

Lintner, J. 1965. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 51:13–37.

Long, J. B. 1974. Stock Prices, Inflation and the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, 1:131–170.

Merton, R.C. 1973. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, 41:867–887.

Mossin, J. 1966. Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 34:768–783.

Ross, S.A. 1978a. Mutual Fund Separation in Financial Theory – The Separating Distributions. *Journal of Economic Theory* 17:254–286.

Ross, S.A. 1978b. A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams. *Journal of Business*, 51:453–475.

Rubinstein, M. 1974. An Aggregation Theorem for Securities Markets. *Journal of Financial Economics* 1:225–244.

Rubinstein, M. 1976a. The strong Case for the Generalized Logarithmic Utility Model as the Premier Model of Financial Markets. *Journal of Finance*, 31:551–771.

Rubinstein, M. 1976b. The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options. *Bell Journal of Economics*, Autumn:407–425.

Sharpe, W.F. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk. *Journal of Finance* 19:425–442.