

Fastforrentede fordringers rentefølsomhed og varighed

Anders Grosen

Institut for finansiering og kreditvæsen, Handelshøjskolen i Århus

Peder Fredslund Møller

Institut for regnskabsvæsen, Handelshøjskolen i Århus

SUMMARY: The concept of duration of bonds is introduced and related to interest rate sensitivity of fixed income portfolios. The importance of duration in strategies to immunize the value of a fixed income portfolio at a specified future point of time against interest rate fluctuations is described in both static and dynamic models. The interest rate elasticity of the value of a fixed income portfolio at any point of time is demonstrated to be determined by duration. The biases of this elasticity to finite interest rate changes is analyzed.

1. Interessen for fastforrentede portefølgers renterisiko er øget

De fastforrentede fordringers traditionelt betydelige andel af den danske fordringsmasse har i forbindelse med det seneste tiårs bemærkelsesværdige ændringer i såvel renteniveau som rentestruktur øget interessen for analysen af fastforrentede fordringers afkast-risikoegenskaber.

Sammenhængen mellem risiko og afkast er gennem porteføljeteorien blevet stadig mere konkretiseret i de seneste 10-15 år, men de opståede analysemetoder har især været anvendelige for analysen af aktiemarkedet. Det er derfor målet for den foreliggende analyse af fastforrentede fordringers renterisiko at præsentere durationbegrebet – varighedsbegrebet – til at belyse sammenhængen mellem fastforrentede fordringers afkast og risiko.

2. Immunisering

Oprindeligt er durationbegrebet introduceret af Macauley (1939) som mål for en obligations gennemsnitlige løbetid, som han definerede som den vejede gennemsnitlige afstand til obligationens enkelte ydelser, idet de enkelte ydelsers relative andel af den samlede kapitalværdi anvendes som vægte:

Fastforrentede fordringers rentefølsomhed og varighed

Anders Grosen

Institut for finansiering og kreditvæsen, Handelshøjskolen i Århus

Peder Fredslund Møller

Institut for regnskabsvæsen, Handelshøjskolen i Århus

SUMMARY: The concept of duration of bonds is introduced and related to interest rate sensitivity of fixed income portfolios. The importance of duration in strategies to immunize the value of a fixed income portfolio at a specified future point of time against interest rate fluctuations is described in both static and dynamic models. The interest rate elasticity of the value of a fixed income portfolio at any point of time is demonstrated to be determined by duration. The biases of this elasticity to finite interest rate changes is analyzed.

1. Interessen for fastforrentede portefølgers renterisiko er øget

De fastforrentede fordringers traditionelt betydelige andel af den danske fordringsmasse har i forbindelse med det seneste tiårs bemærkelsesværdige ændringer i såvel renteniveau som rentestruktur øget interessen for analysen af fastforrentede fordringers afkast-risikoegenskaber.

Sammenhængen mellem risiko og afkast er gennem porteføljeteorien blevet stadig mere konkretiseret i de seneste 10-15 år, men de opståede analysemetoder har især været anvendelige for analysen af aktiemarkedet. Det er derfor målet for den foreliggende analyse af fastforrentede fordringers renterisiko at præsentere durationbegrebet – varighedsbegrebet – til at belyse sammenhængen mellem fastforrentede fordringers afkast og risiko.

2. Immunisering

Oprindeligt er durationbegrebet introduceret af Macauley (1939) som mål for en obligations gennemsnitlige løbetid, som han definerede som den vejede gennemsnitlige afstand til obligationens enkelte ydelser, idet de enkelte ydelsers relative andel af den samlede kapitalværdi anvendes som vægte:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot s(t)(1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^n s(t)(1+i)^{-t}} = \sum_{t=1}^n t \cdot \psi_t \quad (1)$$

hvor D = obligationens duration

$s(t)$ = obligationens ydelser med ydelsestidspunkterne $t = 1, \dots, n$.

i = obligationens interne rente

ψ_t = de enkelte ydelsers vægtandel, $t = 1, \dots, n$.

Det ses, at dette mål for en obligations tidsdimension inddrager samtlige betalinger og deres tidsfordeling. Løbetiden inddrager derimod kun start- og slutbetalingstidspunkterne. Senere har det vist sig, at durationformålet indgår i beregningen af fastforrentede fordringers renteelasticitet. Durationbegrebets elasticitetsegenskaber kommer mest bemærkelsesværdigt til udtryk i begrebets rolle ved udformning af investeringsstrategier til eliminering af renterisiko ved investering i fastforrentede fordringer.

I en gennembrudsartikel fra 1971 introducerede Fisher og Weil (1971) en strategi, der sikrer en investor i rene discountobligationer¹ mod uventede skift i rentestrukturen. De udviklede en investeringsstrategi, der under visse forudsætninger m.h.t. rentestrukturskiftenes type bevirker, at det realiserede afkast over en horisont som minimum svarer til det, som loves af rentestrukturen på investeringstidspunktet.

Strategien kræver valg af en obligation(s-portefølje), hvis vejede gennemsnitlige afstand til de enkelte betalinger er lig med investeringshorisontens længde på betragningstidspunktet. I forbindelse med modtagelse af de løbende ydelser skal porteføljen justeres således, at dens vejede gennemsnitlige løbetid holdes i overensstemmelse med resthorisontens længde.

En strategi, der således eliminerer fastforrentede portefølgers renterisiko, er blevet benævnt både som en duration- og som en immuniseringsstrategi. Valget af immuniseringsbetegnelsen er ligetil. At Fisher og Weil tillige valgte at betegne strategien som en durationstrategi beroede på, at det vejede gennemsnitlige mål for tidsafstanden til porteføljens enkelte ydelser, der som ovenfor nævnt indgår i strategien, har stor lighed med det af Macauley udviklede mål.

Det vil af artiklen her fremgå, at strategien ikke alene er anvendelig i relation til rene discountobligationer, men tillige for kuponobligationer.

1. En ren discountobligation er en obligation, hvis forrentning alene fremkommer ved, at den til underkurs udstedte obligation indfries til pari ved udløb. I amerikansk litteratur benævnes en ren discountobligation ofte som en »single-payment« eller en »zero coupon bond«.

Analysen af renteusikkerheden sker i den foreliggende artikel med udgangspunkt i en fast planlægningshorisont, ligesom det er tilfældet i Fisher og Weils immuniseringsteori. Der ses i analysen bort fra skat, risiko for misligholdelse, mulighed for konvertering, transaktionsomkostninger og udtrækningsproblematikken.

Planlægningshorisontens længde udgøres af tidsafstanden mellem begyndelsen af investeringshorisonten og det af investor valgte fremtidige opgørelsestidspunkt, som f.eks. kan være tidspunktet for indfrielse af en nominel forpligtelse.² Investor antages at købe en obligationsportefølje ved starten af planlægningshorisonten, geninvestere de løbende ydelser i løbet af investeringshorisonten og at opgøre den akkumulerede kapitalværdi ved udgangen af investeringshorisonten.

Fisher og Weils immuniseringstrategi såvel som andre forfatteres senere udviklede immuniseringsstrategier³ udnytter informationen i rentestrukturen på investeringstidspunktet. Gennemgangen indledes derfor med en redegørelse for nogle rentestrukturbegreber og deres relation til den lovede kapitalværdi ved udgangen af horisonten.

3. Den lovede kapitalværdi

Det tilsigtede mål med en immuniseringsstrategi er at opnå mindst det kapitalbeløb ved planhorisontens slutning, som tilsiges af forwardrenterne ved planhorisontens begyndelse. Det vil sige det beløb, som ville opnås, hvis de forwardrenter, der er ved planperiodens begyndelse, faktisk kommer til at svare til de realiserede renter i planperioden.

Forwardrenterne ved periodens start angives implicit af priserne for fordringerne på dette tidspunkt, idet der er følgende sammenhæng mellem en vilkårlig fordringspris, $P(0)$, og forwardrenterne, r_j :

$$P(0) = \sum_{t=1}^n s(t) \prod_{j=1}^t (1+r_j)^{-1} \quad (2)$$

Af priserne på fordringerne med forskellig betalingsprofil kan man derfor – under de her anvendte forudsætninger – entydigt udlede forwardrenterne på dette tidspunkt.

Det ses af (2), at det kan være algebraisk besværligt at arbejde med forwardrenterne, og vi vil derfor i stedet angive de fremtidige renter ved hjælp af perioderenter, $h(0, t)$, der er fastlagt således

2. Der er således den nominelle renterisiko til forskel fra den reale renterisiko, der analyseres.

3. For resumé af durationlitteraturen op til 1973 kan henvises til Weil (1973), medens udviklingen i durationlitteraturen mellem 1973-78 fremgår af oversigtsartikler af Ingersoll, Skelton og Weil (1978) og af Bierwag, Kaufman og Khang (1978).

$$(1 + h(0, t))^{-t} = \prod_{j=1}^t (1 + r_j)^{-1} \quad (3)$$

Perioderenterne er altså geometriske gennemsnit af forwardrenterne, og et sæt af perioderenter og et sæt af forwardrenter dækkende samme periode er således entydigt forbundne.

Hvis investor køber en fordring med prisen $P(0)$ og geninvesterer alle ydelser herfra indtil et fremtidigt tidspunkt, m , kan den lovede kapitalværdi, $R(m)$, nu opgøres ved hjælp af perioderenterne, idet

$$R(m) = \sum_{t=1}^n s(t)(1 + h(0, t))^{m-t} \quad (4)$$

Det er dette beløb, $R(m)$, som investor mindst kan opnå ved en immuniseringsstrategi, selv om forwardrenterne faktisk ikke realiseres og derfor afviger fra de renter, som realiseres gennem planperioden.

Det må understreges, at perioderenterne systematisk afviger fra de interne renter medmindre alle forwardrenter er ens.⁴ Afvigelserne kan måske synes små ved en direkte sammenligning, men de kan dog blive af signifikant betydning ved beregninger som i formel (4), hvor afvigelser forstørres eksponentielt.

4. Renteændringsprocessen

For at kunne belyse hvad der følger af en renteændring, må renteændringen naturligvis specificeres.

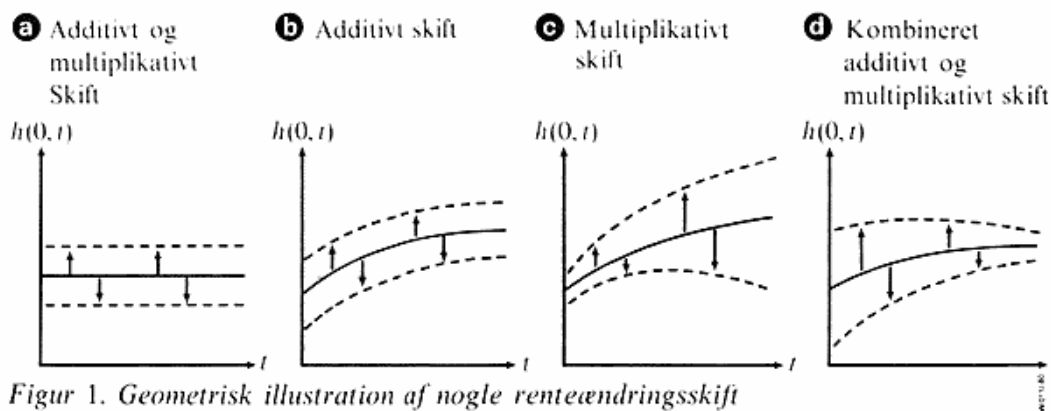
En renteændring kan beskrives som en form- og niveauændring, og perioderenterne efter ændringen kan udtrykkes ved (5)

$$h^*(0, t) = f(\Delta, h(0, t)) \quad t = 1, 2, \dots, \dots \quad (5)$$

dvs. som en funktion af perioderenterne før skiftet i rentestrukturen og en renteskiftfunktion Δ , der kan være en parameter eller en funktion, hvori indgår flere parametre. Nogle karakteristiske renteskiftstyper er geometrisk illustreret i figur 1.

Rygner (1979) har i en undersøgelse af den danske rentestruktur påvist en øget bevægelighed i de korte renter efter udbygningen af obligationsmarkedets korte del fra midten af 1970'erne. Rentevariabiliteten er derfor antagelig størst i den korte ende af obligationsmarkedet, hvilket svarer til illustrationen i figur 1d og er i overensstemmelse med undersøgelser af rentevariabiliteten i USA, der er foretaget af Malkiel (1966), Yawitz (1975) og Yawitz, Hempel og Marshall (1976).

4. En nærmere beskrivelse af denne biasproblematik findes i Sharpe (1978), pp 230-232.



Figur 1. Geometrisk illustration af nogle renteændringsskift

5. Afkast og risikokomponenter

Ved analyse af usikkerheden på den akkumulerede kapitalværdi ved udgangen af horisonten, $R(m)$, er det hensigtsmæssigt at dele usikkerheden op, nemlig i en kursrisiko og en geninvesteringsrisiko. Kursrisikoen er knyttet til (1) kursværdien af porteføljens endnu ikke forfaldne ydelser ved udgangen af horisonten, $P(m)$, og geninvesteringsrisikoen er knyttet til (2) den akkumulerede værdi af porteføljens løbende betalinger frem til udgangen af horisonten samt rentes rente heraf, $I(m)$.

Et skift i rentestrukturen vil resultere i såvel et tab (en gevinst) på kurskomponenten som en gevinst (et tab) på geninvesteringskomponenten. Disse tab- og gevinstmuligheder på kurs- og geninvesteringskomponenterne repræsenterer henholdsvis kurs- og geninvesteringsrisikoen. Teoretisk vil den mest nærliggende mulighed for at undgå begge risikokomponenter være køb af rene discountobligationer, hvis løbetid svarer til investeringshorisontens længde.

Investering i rene discountobligationer er imidlertid ikke muligt, hverken direkte eller indirekte ved short sales af kuponobligationer.⁵ Obligationsinvesteringer må derfor foretages i risikobehæftede kuponobligationer. Isoleret set kan kursrisikoen ved investering i kuponobligationer undgås ved køb af obligationer, hvis løbetid svarer til horisontens længde. Geninvesteringsrisikoen kan derimod aldrig undgås.⁶ Investor kan imidlertid mindske sin totale risiko ved at lade de to former for risiko afbalancere hinanden. Durationstrategien er netop baseret på en konsekvent udnyttelse af kurs- og geninvesteringsrisikoens indbyggede udlignende tendenser. Såvel en talmæssig som en geometrisk illustration af, hvorledes immunisering opnås gennem en afbalancering af kurs- og geninvesteringselementet, findes i Grosen (1979 b).

5. I Caks (1977), p. 105 tabel 1 angives en metode, hvorefter implicite rene discountobligationer kan skabes ved hjælp af faste kuponobligationer, forudsat der ikke er restriktioner på investorernes muligheder for short sales af kuponobligationer.

6. En talmæssig belysning af geninvesteringsrisikoens indflydelse på forskellige obligationstypers realiserede afkast findes i Grosen (1979 a).

De to følgende afsnit redegør for betingelserne for at opnå immunisering i såvel statisk som dynamisk regi.

6. Immunisering over for én renteændring

I dette afsnit vises grundideen i immunisering over investors planhorisont mod skift i rentestrukturen. Det beskrives, hvorledes der immuniseres mod et skift, der indtræder umiddelbart efter investeringstidspunktet, betegnet tidspunkt 0.

På investeringstidspunktet vil investor ud fra den valgte portefølje og ud fra den foreliggende perioderente kunne beregne den lovede kursværdi ved investeringshorisontens udløb, tidspunkt m . Denne størrelse betegnes

$$P(m, h(m, t)), \quad t = m+1, m+2, \dots, n. \quad (6)$$

Investor kan tilsvarende beregne det kapitalbeløb, der stammer fra geninvestering af ydelserne indtil tidspunkt m . Dette skrives således

$$I(m, h(0, t)), \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Dermed kan han også opgøre den lovede totale kapitalværdi, der er summen af de forannævnte størrelser, og som betegnes

$$R(m, h(0, t)), \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Hvis perioderenterne ikke realiseres, idet der indtræffer et skift i rentestrukturen umiddelbart efter investeringstidspunktet, vil de faktiske beløb afvige fra de beregnede lovede beløb.

Afvigelserne for de enkelte størrelser vil afhænge af renteskiftets type og styrke. Helt generelt kan renterne eller renteændringen beskrives ved (5).

Ved en del plausible specifikationer af denne renteændring fremkommer det ikke uventede resultat, at kurselementet på tidspunkt m og geninvesteringselementet på samme tidspunkt ændres modsat ved renteændringen. For at nettovirkningen på total kapitalværdi på tidspunkt m , $R(m)$ er nul, må det gælde, at disse modsatrettede ændringer ophæver hinanden.

Ved en lille renteændring er det ensbetydende med, at det må gælde, at

$$\frac{dP(m)}{d\Delta} = - \frac{dI(m)}{d\Delta} \quad (9)$$

hvilket indebærer, at

$$\frac{dR(m)}{d\Delta} = 0 \quad (10)$$

Ved en del specifikationer af renteændringer viser det sig, at disse betingelser vil være opfyldt, hvis $m = D(g)$, hvor $D(g)$ er en durationstørrelse, dvs. $D(g)$ kan beregnes ved et udtryk af følgende form (ved diskret rentetilskrivning):

$$D(g) = \frac{\sum_{t=1}^n g(t) \cdot t \cdot s(t) (1 + h(0, t))^{-t}}{\sum_{t=1}^n s(t) (1 + h(0, t))^{-t}} = \sum_{t=1}^n g(t) \cdot t \cdot w_t \quad (11)$$

Størrelsen $g(t)$ er afhængig af typen af renteskift, mens de øvrige størrelser, der indgår i $D(g)$, er kendt på investeringstidspunktet.⁷

Det følger heraf, at opnåelse af immunisering ikke er betinget af kendskab til renteskiftets retning, men alene af kendskab til renteskiftets type.

Opnåelse af immunisering over for forskellige typer renteskift kræver således forskellige durationstørrelser. Bierwag og Kaufman (1977) var de første, der påpegede dette forhold. Den durationstørrelse, som betinger immunisering over for en given type renteskift, benævnes den immuniserende durationstørrelse. Bierwag og Kaufman (1977), Bierwag (1977) og Khang (1980) har udviklet immuniserende durationstørrelser for en række antagelser m.h.t. typen af rentestrukturskift.

Fælles for alle immuniserende durationstørrelser er, at en vægtning af betalingerne af afstand fra betragtningstidspunktet indgår i beregningen, ligesom det er tilfældet i Macauley's duration. Matematisk kan de alle beskrives ved udtryk af form som ligning (11)'s højreside. De adskiller sig fra Macauley's duration dels ved værdien af vægtene, der anvendes ved beregningen af betalingerne af afstand fra betragtningstidspunktet dels ved korrektionsleddet $g(t)$, som dog oftest tilnærmelsesvis er 1. I Macauley's duration er $g(t) = 1$. Det vil af afsnit 9 fremgå, at Macauley's duration er den immuniserende durationstørrelse, når renteskift sker som parallelforskydninger af flade rentekurver.

Hvis renteskiftet er komplekst i den forstand, at renteændringen må beskrives ved mere end én parameter, dvs. f.eks. $\Delta = \Delta(\mu, v)$, kan der opstå den situation, at betingelsen for at $\frac{dR}{d\Delta} = 0$, dvs. $\frac{\delta R}{\delta \mu} = 0$ og $\frac{\delta R}{\delta v} = 0$, medfører, at $m = D_1$ samtidig med, at $m = D_2$, hvor D_1 og D_2 er durationstørrelser, der beregnes forskelligt, og som kun undtagelsesvist kan være lige store. Et eksempel herpå er vist i appendiks, omtalt i fodnote 7.

Det ses, at der i sådanne tilfælde ikke kan opnås fuldstændig immunisering.

7. Beviset for (11) og andre udledninger fremgår af pladshensyn ikke af artiklen, men findes i et appendiks, som kan rekvireres fra en af forfatterne.

Muligvis kan der dog opnås en tilnærmelsesvis immunisering, hvis det gælder, at $D_1 \cong D_2$. Dette kan være tilfældet, hvis perioderenterne ikke er særligt forskellige i udgangssituationen.

Betingelsen, $\frac{dR}{dA} = 0$, er kun den ene af de betingelser, der må gælde, for at den faktiske kapitalværdi på tidspunkt m ikke bliver mindre end den lovede. Det må også gælde, at $\frac{d^2R}{dA^2} > 0$, (eller at den tilsvarende betingelse for et minimum er opfyldt i tilfælde med komplekse renteændringer, hvor A angiver en funktion).

Denne yderligere betingelse vil også være opfyldt ved visse plausible specifikationer af renteændringen. Det vil dog ofte være således, at denne betingelse kun vil være opfyldt under lidt mere restriktive forudsætninger, bl.a. med hensyn til porteføljens betalingsrække.

Da det er et minimum, der er fastlagt, ses det, at investor ved et skift i rentestrukturen vil få større kapitalværdi, end hvis der ikke sker skift i rentestrukturen. Hvor meget større den vil være bestemmes af størrelsen af $\frac{d^2R}{dA^2}$ og af rentestrukturskiftets retning og størrelse.

Konklusionen af ovenstående er, at det under visse omstændigheder er muligt for investor at sammensætte en portefølje således, at han ved udgangen af sin investeringshorisont vil få en kapitalværdi, der er mindst lige så stor som den kapitalværdi, som perioderenterne på investeringstidspunktet tilsagde, at han kunne opnå. Betingelserne herfor er, at der kun forekommer én renteændring umiddelbart efter investeringstidspunktet. Denne renteændring skal være af »enkel« og forudset type, idet den durationstørrelse, som indgår i immuniseringsbetingelsen, er afhængig af typen af renteændring. Endelig er det en afgørende forudsætning, at der på investeringstidspunktet faktisk findes fordringer på markedet med sådanne fremtidige betalinger, at der kan etableres en portefølje med den ønskede duration.

En praktisk hindring for opnåelse af immunisering over længere horisonter ved en umiddelbar anvendelse af den her præsenterede durationstrategi kan netop være, at obligationer med tilstrækkelig lang duration simpelthen ikke er til rådighed. Et indtryk af denne institutionelle hindrings betydning fås i tabel 1, hvor en 30-årig annuitetsobligations duration (Macaulay's duration) kan aflæses ved forskellige renteniveauer.

Tabel 1. Duration for en 30-årig annuitetsobligation ved effektive renter mellem 5% og 12% pr. halvår.

Renteniveau i % pr. halvår	5	6	7	8	9	10	11	12
Duration i år	8,7	7,9	7,1	6,5	5,9	5,2	5,0	4,6

Anm. En annuitetsobligations duration er uafhængig af kuponrentens størrelse.

Ved et renteniveau på f.eks. 9% pr. halvår kan således maksimalt opnås immunisering over en 5,9-årig horisont ved investering i 30-årige annuitetsobligationer, som under de eksisterende institutionelle forhold er blandt de længste papirer, som udbydes i åbne serier.

7. Immunisering over for flere renteændringer

I praksis vil der naturligvis være risiko for flere renteskift, og investor kan derfor ikke være sikret én gang for alle ved at have sammensat en portefølje med den ønskede duration. Kun hvis han har købt en ren discountobligation, vil der, som tiden går, være samme reduktion i porteføljens duration som i investors resthorisont.

Udsat for risikoen for flere renteskift må porteføljen derfor normalt justeres, således at den immuniserende durationstørrelse til enhver tid er lig med investors resthorisont.

Bierwag (1979) har foretaget en teoretisk belysning af muligheden for at opnå immunisering over flere perioder med flere renteskift, idet han dog udelukkende forudsætter multiplikative rentestrukturskift. Han når til den konklusion, at det er muligt under visse betingelser. For det første må den enkelte renteændring ikke være for voldsom, for det andet skal man ved porteføljerevisionerne efterhånden indsnævre betalingerne spredning omkring udløbet af horisonten.

Det må tilføjes, at da Fisher og Weil (1971) lavede deres empiriske undersøgelser, var de formentlig ikke bevidste om disse yderligere betingelser, og alligevel opnåede de stort set immunisering. Bierwags betingelser kan derfor være unødvendige eller være af mindre praktisk betydning.

Bierwags bevismetode er kompliceret og Khang (1979) har lavet et andet bevis, hvis struktur gengives af Bierwag, Kaufman og Toevs (1980). Tankegangen bag dette bevis er allerede skitseret af Samuelson (1945) og er anvendt i eksempler af Grosen (1979 c, 1979 d).

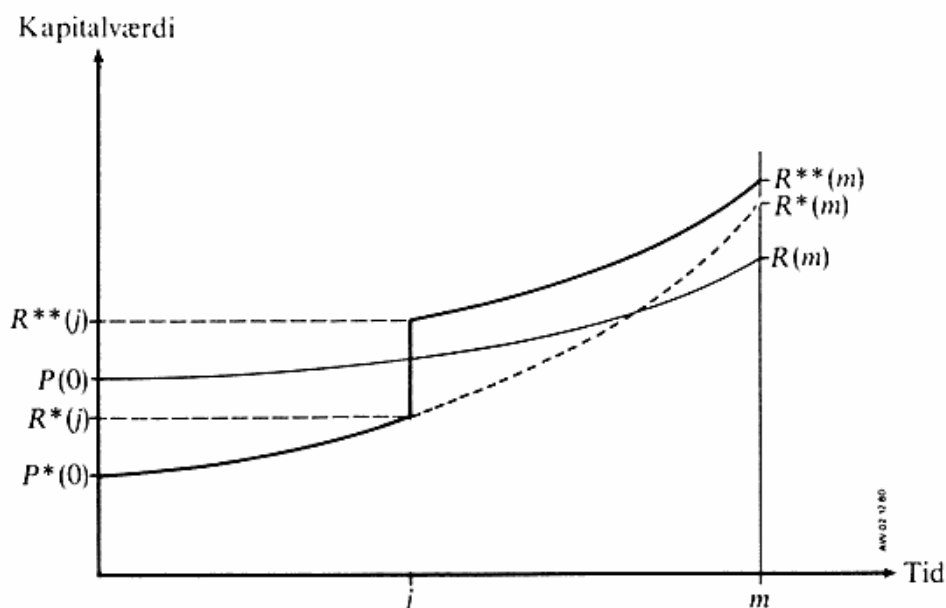
Denne analysemetode adskiller sig fra den hidtidige ved at opdele effekten af renteskift på kapitalværdiens udvikling i en kapitaleffekt (tidspunkteffekt) og en væksteffekt. Immunisering kan forklares ved, at disse effekter ophæver hinanden.

Lad os antage, at investor i tidspunkt 0 finder ud af, at han vil købe en portefølje, hvis kapitalværdi i tidspunkt m er vokset til $R(m)$, hvis han geninvesterer alle ydelser, der fremkommer indtil dette tidspunkt.

Han skal da opkøbe en portefølje for et beløb på

$$P(0) = R(m)(1 + h(0, m))^{-m} \quad (12)$$

og hvis duration er m , beregnet ud fra den renteskiftstype, han forudser.



Figur 2. Immunisering ved flere skift i rentestrukturen inden for investeringshorisonten

Hvis der umiddelbart herefter, dvs. i tidspunkt 0, indtræffer et rentestrukturskift – lad os antage, det er en rentestigning – vil investor lide et øjeblikkeligt kapitaltab, f.eks. $P(0) - P^*(0)$ jfr. figur 2. Til gengæld vil rentestigningen afstedkomme en hurtigere vækst, og hvis investor har valgt den durationstørrelse, der er korrekt i forhold til renteskifttypen, vil den øgede vækst mindst opveje kapitaltabet. Investor vil derfor, hvis der ikke sker andet, opnå beløbet $R^*(m)$.

Lad os imidlertid antage, at der sker endnu et renteskift i tidspunkt j , her et rentefald, men også at porteføljets sammensætning kort tid før er ændret, således at dens duration nu er $m-j$.

Investor vil nu få en kapitalgevinst i tidspunkt j , $R^{**}(j) - R^*(j)$ jfr. figur 2. Til gengæld er væksten frem til tidspunkt m nu mindre på grund af rentefaldet, men hvis

renteskiftets type igen er forudset korrekt, vil kapitalgevinsten mindst opveje væksttabet, således at kapitalbeløbet i tidspunkt m bliver $R^{**}(m)$, hvis der ikke sker yderligere renteskift.

Og således kan ræsonnementet udbygges med et vilkårligt antal renteskift med forudgående porteføljerevisioner, således at porteføljens duration hele tiden svarer til resthorisonten.

Det ses, at et renteskift aldrig under disse betingelser vil bevirke, at slutkapitalværdien bliver lavere end lovet efter forrige renteskift, hvis renteskiftet var af forudset type, men muligvis højere.

Heraf skal man ikke slutte, at investor er bedst stillet med hyppige renteskift, idet hans risiko for fejlprognostisering af renteskiftstype naturligvis forøges med antallet af skift.

Med hensyn til de porteføljerevisioner, som forudsættes i analysen, viser eksempler, at disse ikke nødvendigvis skal foretages særligt hyppigt eller være særligt omfattende. Det er ofte tilstrækkeligt, at de løbende indbetalinger geninvesteres således, at de korrigerer restporteføljens duration.⁸ Efter større renteændringer kan en mindre revision af restporteføljen dog også være påkrævet.

8. Valg af durationstørrelse

Komplet immunisering er som omtalt baseret på, at type af eventuelle renteskift prognosticeres korrekt, idet den durationstørrelse, som betinger immuniseringen, er afhængig af renteskiftenes type.

Selv om det antagelig er lettere at prognosticere de fremtidige renteskifts type end deres retning og størrelse, vil durationstrategiernes praktiske anvendelse øges betydeligt, hvis opnåelse af immunisering ikke er stærkt følsom overfor forkert prognostisering af de fremtidige renteskifts type.

Dette synes faktisk også at være tilfældet, idet såvel teoretisk som empirisk analyse synes at vise, at immuniseringsstrategien er robust.

For det første giver formler for durationstørrelser svarende til forskellige typer af renteskift en vis basis for at antage, at disse størrelser ikke vil være meget forskellige ved troværdige valg af betalinger og perioderenter.

Ved eksempler har Bierwag og Kaufman (1977) påvist, at denne antagelse synes korrekt. De påviser, at durationstørrelser svarende til henholdsvis multiplikative og additive skift i perioderenterne for rimelige værdier af perioderenter, løbetider og kuponstørrelser kun udviser små forskelle.

8. Et eksempel på en porteføljes justering i løbet af investeringshorisonten findes i Grosen (1981).

For det andet har Bierwag, Kaufman, Schweitzer og Toevs (1980) ved empiriske undersøgelser omfattende tidsrummet 1925-1978 vist, at der kunne opnås tilnærmelsesvis immunisering ved immuniseringsstrategier, der baseres på immuniserende durationstørrelser svarende til flere forskellige typer af renteskift. Undersøgelsen viste endog, at strategier baseret på de simple durationstørrelser – heriblandt Macauley's – har givet bedre resultater end strategier baseret på immuniserende durationstørrelser for mere komplekse renteskift. Det må tilføjes, at undersøgelsen viste, at selv de bedste strategier som hovedregel gav kapitalværdier, der lå lidt under det lovede, og at der også undtagelsesvis kunne være større afvigelser.

Meget tyder således på durationstrategiernes robusthed, hvilket er af stor betydning for deres anvendelighed i praksis. At de simple durationmål er mindst lige så anvendelige som de mere komplekse er naturligvis også væsentligt, dels fordi de simple durationmål er lettere at beregne, dels fordi de indgående størrelser er lettere at estimere. Macauley's durationstørrelse er det enkleste af alle durationmål. Dets beregning sker på basis af porteføljens interne rente, som ret enkelt kan beregnes.

At dette durationmåls anvendelighed synes god, er vanskeligt at begrunde. Da Macauley's durationstørrelse som nævnt er den immuniserende durationstørrelse for parallelle skift af flade rentekurver, kunne en forklaring på de gode empiriske resultater med Macauley's duration tænkes at bero på, at simple additive skift i rentestrukturen udgør en rimelig beskrivelse af renteændringsprocessen i undersøgelsesperioden. Dette er imidlertid ikke i overensstemmelse med de tidligere nævnte undersøgelser af rentestrukturen i såvel USA som herhjemme. I lyset heraf er det måske mere plausibelt, at der ved anvendelse af den interne rente ved beregning af duration opstår fejl, som delvist ophæver hinanden.

Selv om dette forhold har gjort sig gældende i undersøgelsesperioden er det selvsagt ingen garanti for, at det også vil være tilfældet i fremtiden. Alligevel må de forskelligartede forhold, som den lange undersøgelsesperiode dækker over give en vis tiltro hertil.

Det forekommer på denne baggrund også mere forsvarligt end man umiddelbart kunne antage, at basere artiklens resterende afsnit på de forenkede forudsætninger, hvorunder Macauley's durationstørrelse er teoretisk gyldig, nemlig flade rentekurver.

9. Duration og fastforrentede portefølgers rentefølsomhed

Durationbegrebet kan anvendes til andet end beregning af immuniseringsbetingelser. Durationstørrelser kan således indgå i beregningen af kapitalværdiernes følsomhed på et vilkårligt tidspunkt.

Det gælder ved forskellige specifikationer af perioderenter og ændringer heri. Formlerne bliver dog mest overskuelige, hvis der forudsættes diskret rentetilskrivning og flade rentekurver, og hvis det forudsættes, at der kun indtræffer et renteskift umiddelbart efter investeringstidspunktet. Disse forudsætninger antages at gælde i de følgende afsnit. Tilsvarende resultater kan imidlertid opnås ved antagelse om såvel mere komplekse rentestrukturskift som flere skift inden for horisonten.

Lad os som tidligere repræsentere rækken af sikre fremtidige betalinger genereret af en fastforrentet portefølje ved $s(t)$, $t=1, n$. Med den givne forudsætning om ens perioderenter, som på multidspunktet er af størrelsen i_0 , kan den lovede kapitalværdi, $\bar{R}(h)$ på et vilkårligt tidspunkt h mellem 0 og n udtrykkes ved⁹

$$\bar{R}(h) = \sum_{t=1}^n s(t)(1+i_0)^{h-t} \quad (13)$$

Elasticiteten af kapitalværdien på tidspunkt h , $\varepsilon(\bar{R}(h))$, over for en ændring i forrentningsfaktoren $(1+i_0)$ umiddelbart efter investeringstidspunktet er¹⁰

$$\varepsilon(\bar{R}(h)) = \frac{d(\bar{R}(h))}{di} \cdot \frac{1+i_0}{\bar{R}(h)} \quad (14)$$

hvor

$$\frac{d\bar{R}(h)}{di} = \sum_{t=1}^n s(t)(h-t)(1+i_0)^{h-t-1} \Leftrightarrow \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{R}(h)}{di} = (1+i_0)^{h-1} \left[h \sum_{t=1}^n s(t)(1+i_0)^{-t} - \sum_{t=1}^n s(t) \cdot t(1+i_0)^{-t} \right] \Leftrightarrow \quad (16)$$

$$\frac{d\bar{R}(h)}{di} = (1+i_0)^{h-1} \sum_{t=1}^n s(t)(1+i_0)^{-t} \left[h - \frac{\sum_{t=1}^n s(t)t(1+i_0)^{-t}}{\sum_{t=1}^n s(t)(1+i_0)^{-t}} \right] \Leftrightarrow \quad (17)$$

$$\frac{d\bar{R}(h)}{di} = (1+i_0)^{h-1} \sum_{t=1}^n s(t)(1+i_0)^{-t} [h-D] \quad (18)$$

9. Med de her anvendte forudsætninger kan den hidtidige angivelse af rentestrukturen på investeringstidspunktet ved $h(0, t)$, $t=1, \dots, n$ forenkles til $h(0, t)=i_0$ for alle t . Lovede kapitalværdier, hvis værdi er beregnet på basis af det på analysetidspunktet 0 kendte renteniveau, i_0 , angives i de resterende afsnit med en streg over symbolet, medens realiserede kapitalværdier angives uden streg.

10. Elasticiteten over for en ændring i renten, i_0 , ses at være $\varepsilon(\bar{R}(h)) \cdot \frac{i_0}{1+i_0}$.

Indsættes udtrykkene for $\bar{R}(h)$ fra (13) og $\frac{d\bar{R}(h)}{di}$ fra (18) i (14) fås

$$\varepsilon(\bar{R}(h)) = h - D \quad (19)$$

Det fremgår af (19), at

$$\varepsilon(\bar{R}(h)) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \text{ for } h \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} D \quad (20)$$

Af (19) og (20) ses dels, at kurseelasticiteten i nultidspunktet ($h=0$) måles ved duration med modsat fortegn, dels at immunisering ligeledes fremtræder som et specialtilfælde, idet elasticiteten af $\bar{R}(h)$ er nul på dette tidspunkt, hvor $h=D$.

Det ses at være muligt at aflæse kapitalværdiens følsomhed på et vilkårligt tidspunkt over for renteændringer.

Det ses for eksempel, at en konsekvens af at immunisere over en lang periode er, at kapitalværdien på investeringstidspunktet og i en periode herefter vil være meget påvirket af renteændringer, idet $h-D$ her er et stort (negativt) tal. Dette er ikke overraskende, idet kapitalværdien her stort set er lig med kursværdien på den oprindelige investering i nultidspunktet, og det er almindeligt kendt, at kursens følsomhed over for renteændringer er større for fordringer med lang løbetid end for fordringer med kortere løbetid.

Det afgørende er imidlertid den nøjere angivelse af følsomheden ved duration, og at det heraf fremgår, at betalingsrækkens løbetid kun har betydning i det omfang, den sammen med betalingsprofil og renteniveau påvirker betalingsrækkens duration, som undtagen for rene discountobligationer altid er mindre end løbetiden. Den er nemlig et gennemsnit af enkeltbetalingernes løbetid.

Sammenholdes ovenstående med, at immunisering indtræffer, når $h=D$ ses, at en immuniseringsstrategi kan betragtes som en diversifikationsstrategi, hvori indgår obligationer med betalinger på hver sin side af investors investeringshorisont.

10. Approksimationsfejl ved brug af elasticiteter

Hvis vi kun har en uendelig lille renteændring efter tidspunkt 0, kan vi beregne den faktiske kapitalværdi på et vilkårligt tidspunkt ved hjælp af elasticiteten således:

$$R(h) = \bar{R}(h) \left[1 + \varepsilon(\bar{R}(h)) \frac{di}{1+i_0} \right] \quad (21)$$

Hvis renteændringen er af en vis størrelsesorden fra i_0 til i , kan vi anvende

elasticiteten til at approksimere den faktiske kapitalværdi ved hjælp af en tilsvarende formel:¹¹

$$\tilde{R}(h) = \bar{R}(h) \left[1 + \varepsilon(\bar{R}(h)) \frac{i - i_0}{1 + i_0} \right] \quad (22)$$

Approximationen vil alt andet lige være dårligere jo større renteændringen er, og for nogle typer af betalingsstrømme vil approksimationerne være dårligere end for andre. Der kan imidlertid uafhængigt af betalingsstrømmens form gives en beskrivelse af, i hvilken retning approksimationsfejlen bliver.

Til beskrivelse heraf anvendes Taylorudviklingen:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f^{(3)}(a) \\ & \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R(n) \end{aligned} \quad (23)$$

hvor

$$R(n) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1$$

Den realiserede kapitalværdi efter en given renteændring $R(h)$ svarer til $f(x)$, den realiserede funktionsværdi. De størrelser, som approksimeres ved hjælp af elasticiteterne svarer hver for sig til en approksimation af funktionsværdien $f(x)$ ved hjælp af 1. afledede, dvs. de svarer til størrelsen:

$$\tilde{f}(x) = f(a) + (x-a)f'(a) \quad (24)$$

Størrelsen af de approksimationsfejl, der begås ved brug af elasticiteter som mål for de faktiske realiserede størrelser, afhænger dels af størrelsen af renteændringen dels af, om det er rentefald eller en rentestigning og endelig af porteføljens løbetidssammensætning. Disse forhold er ikke særligt dybtgående belyst, men der er dog foretaget nogle analyser.

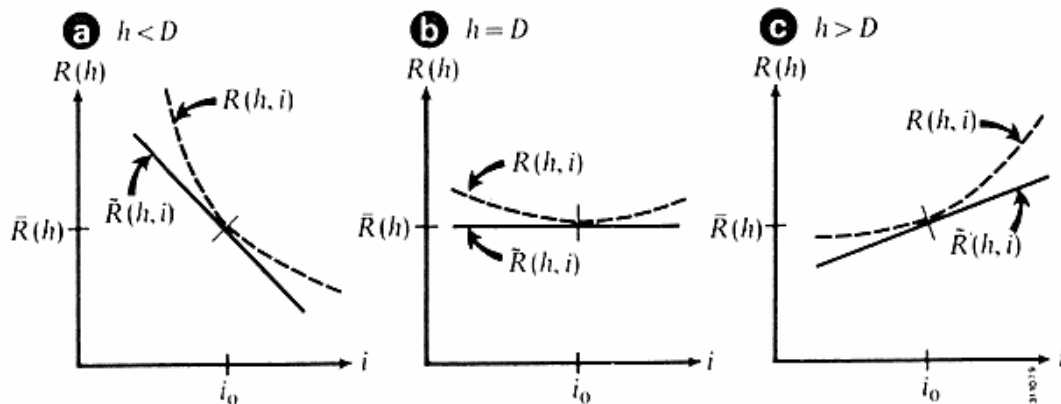
Sættes n lig med 2 i Taylorudviklingen, ser vi at

$$R(h) = \bar{R}(h) + (i - i_0) \frac{d\bar{R}(h)}{di} + \frac{(i - i_0)^2}{2!} \frac{d^2\bar{R}(h, \theta(i - i_0))}{di^2} \quad (25)$$

og vi får, at approksimationen af $R(h)$ er lig med

$$\tilde{R}(h) = \bar{R}(h) + (i - i_0) \frac{d\bar{R}(h)}{di} \quad (26)$$

11. De approksimerede størrelser beregnet ved hjælp af elasticiteter betegnes med en bølgestreg.



Figur 3. Illustration af approksimationsfejlen for totale afkast, $R(h)$, ved forskellig relation mellem horisont, h , og betalingsstrømmens duration, D

Det fremgår i afsnit 6, at $\frac{d^2(R(h))}{di^2} > 0$, og vi får derfor også, at

$$R(h) - \tilde{R}(h) \geq 0 \quad (27)$$

Den realiserede værdi, $R(h)$, er altså større end den approksimerede, uanset om der har været rentefald eller rentestigning, hvilket illustreres i figur 3 ved forskellig relation mellem horisont, h , og betalingsstrømmens duration, D .

I et papir har forfatterne (1979) vist, at geninvesteringsværdiens og kursværdiens udsving over for rentefald og rentestigning er asymmetriske, men modsatrettede. Geninvesteringselementet påvirkes således kraftigere af rentestigning end af rentefald, medens det er omvendt for kurselementet.

Da $R(h) = I(h) + P(h)$, og $\tilde{R}(h) = \tilde{I}(h) + \tilde{P}(h)$ samtidigt med, at de asymmetriske ændringer i $I(h)$ og $P(h)$ ved rentestigning og -fald er modsatrettede, tillades ikke nogen generel konklusion om asymmetrierne for $R(h)$ ved rentestigning og -fald.

Der påvises endvidere for såvel geninvesteringsværdiens som kursværdiens vedkommende, at de realiserede værdier, $I(h)$ og $P(h)$, er større end de approksimerede, uanset om der har været rentefald eller rentestigning, hvorfor approksimationsfejlen for $R(h)$ vil være større end geninvesterings- og kursværdiens særskilte approksimationsfejl.

Der er af Livingston (1979) foretaget særskilte beregninger af approksimationsfejlen for kursen på et givet tidspunkt. Det viser sig, at for korte og mellemlange papirer er kursudsvingene som følge af rentændringer nogenlunde som papirets duration tilsiger det. For lange papirer er der derimod ved store rentændringer en ret stor afvigelse mellem de kursudsving som approksimeres ved hjælp af durationstørrelser og de faktiske kursudsving.

Det skal afslutningsvis påpeges, at i immuniseringstilfældet ($h=D$) vil den approksimerede slutværdi svare til den lovede, hvorfor approksimationsfejls størrelse samtidigt angiver, i hvilket omfang den realiserede slutkapitalværdi er større end den lovede.

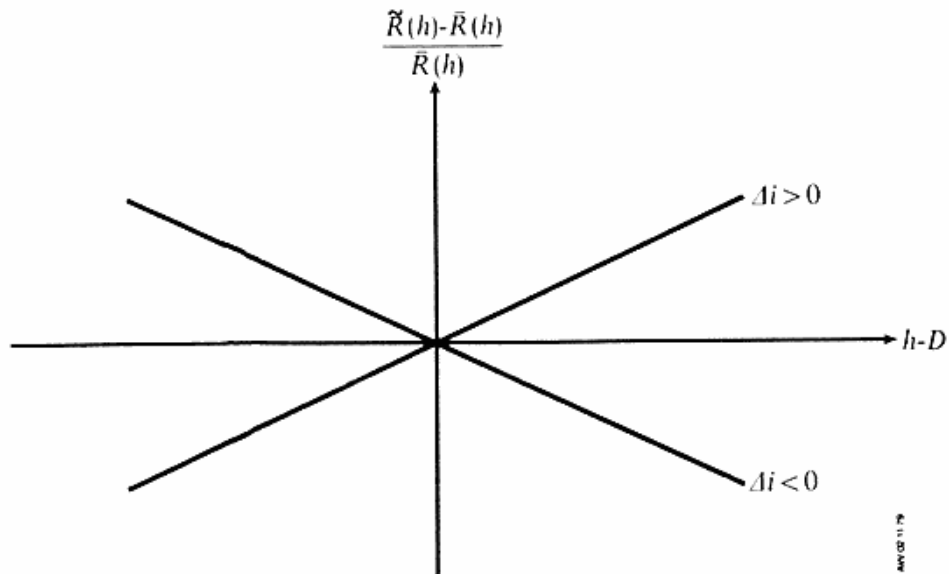
11. Opsummering

I det foregående er det påvist, at en investor i mange tilfælde kan vælge en obligationsportefølje, således at den vil være immuniseret, hvilket vil sige, at det faktiske afkast mindst vil svare til det afkast, som for en given investeringshorisont implicit loves af rentestrukturen på investeringstidspunktet. Dette afkast garanteres uafhængigt af antallet, retningen og størrelsen af eventuelle renteskift inden for horisonten, forudsat en række betingelser er opfyldt.

For det første må investor fastlægge længden af sin investeringshorisont. For det andet må investor prognosticere typen af de fremtidige renteskift. For det tredje skal investor vælge sin portefølje og løbende justere denne, således at det for alle perioder gælder, at porteføljens immuniserende durationstørrelse – svarende til den korrekt specificerede renteændringstype – holdes i overensstemmelse med resthorisontens længde.

For durationstrategiernes praktiske anvendelighed taler flere forhold. Således er opnåelse af tilnærmelsesvis immunisering robust over for fejlprognosticering af de fremtidige renteskifts type. Afstås således fra kravet om komplet immunisering, er en forudsigelse af de fremtidige renteskifts type ikke påkrævet. Det synes tilstrækkeligt at bruge Macauley's duration som estimat af den nøjagtige immuniserende durationstørrelse, hvilket forenkler beregningsarbejdet, da beregning af Macauley's duration ikke kræver beregning af perioderenter, men alene kan baseres på porteføljens interne rente. Endvidere viser eksempler, at det er tilstrækkeligt at foretage porteføljerevisioner i forbindelse med modtagelse af ydelser. »Revisionen« behøver ofte kun at bestå i genplacering af de netop modtagne ydelser på en sådan måde, at deres duration sammen med restporteføljens duration svarer til resthorisontens længde.

Af afsnit 8 og 9 fremgår klart, at risikoen ved investering i en fastforrentet obligation ikke alene er en funktion af obligationsporteføljen (porteføljekarakteristika), men tillige er en funktion af investors planlægningshorisont (investorkarakteristika) og typen af den renteændringsproces, som karakteriserer det pågældende obligationsmarked (markedskarakteristika). Determinanterne ved bestemmelsen af en fastforrentet obligations (porteføljes) renterisiko for en given investor kan således kort udtrykkes ved,



Figur 4. Relativ afvigelse i lovet afkast i tidspunkt, h , ved en given renteændring ved forskelligt forhold mellem horisontlængde og porteføljens duration

$$\text{Risiko} = f(h, D)$$

hvor h er længden af investors planlægningshorisont, og D er den immuniserende durationstørrelse, der for praktiske formål kan approksimeres ved Macauley's duration.

Geometrisk kan analyseresultaterne i afsnit 9 og 10 illustreres i figur 4. De rette linier i figur 4 svarer til de ved hjælp af elasticiteter approksimerede kapitalværdier. Som følge af de i figur 3 viste relationer mellem de approksimerede og de realiserede værdier, indikerer de positive differencer i figur 4 de minimale differencer mellem de realiserede værdier og de tilsvarende lovede værdier. De negative differencer indikerer de maksimale differencer.

12. Konklusion

Durationmålet, som først blev foreslået for udelukkende at angive et bedre mål for en fordrings tidsdimension, har senere vist sig at indgå i andre sammenhænge.

Immunisering er knyttet til durationmål, og i en fordrings rentelastisitet indgår også en durationstørrelse.

At duration både angiver tidsdimension af en fordring og indgår i bestemmelsen af rentefølsomheden af fordringens kapitalværdi er måske ikke så overraskende.

Ændringen i en fordrings kapitalværdi ved en renteændring vil klart være afhængig af den tidsmæssige placering af de betalinger, som fordringen genererer.

I et obligationsmarked med mange obligationer, der afviger m.h.t. løbetider, kuponrenter og betalingsforløb i øvrigt, vil der være et uendeligt antal porteføljekombinationer, som adskiller sig m.h.t. løbetidssammensætning og kuponrentesammensætning, men som har samme duration og dermed samme rentefølsomhed. Duration kan derfor opfattes som et overordnet risikokarakteristika for en obligationsportefølje, hvilket ofte overses i analysen af løbetids- og kuponrentesammensætningens betydning for fastforrentede portefølgers afkast – risikoegenskaber.

At duration er et overordnet risikomål for fastforrentede obligationer overses tillige i nogle rentestrukturteorier og -analyser. Således skal de løbetidspræferencer, der indgår i nogle rentestrukturteorier, hvor de begrundes med, at investorerne antages at have aversion mod risiko, vurderes med forsigtighed. Det antages nemlig sædvanligvis i disse teorier, at vil en investor være sikker på et bestemt afkast over en investeringsperiode, er han henvist til at købe obligationer af netop tilsvarende løbetid, hvilket som påvist i denne artikel ikke er korrekt. Desuden kan samme karakteristikum (duration) opnås ved et uendeligt antal kombinationer af obligationer med forskellige løbetider. Det ses således, at der ikke med udgangspunkt i, at investorerne antages at have aversion mod risiko, kan siges noget entydigt om investorernes løbetidspræferencer.

Det fremgår af artiklen, at immunisering ved hjælp af en durationstrategi over en given horisont resulterer i en slutkapitalværdi, som indebærer et større afkast end lovet. At dette er muligt beror på, at de eksisterende obligationsmarkeder er ukomplette. Var der nemlig mulighed for at investere i rene discountobligationer eller skabe implicite rene discountobligationer gennem short sales, ville der dannes ligevægtskurser, således at større afkast end lovet ved immuniseringsstrategier blev elimineret. De durationstørrelser, der ville måle renterisiko i et sådant komplet marked, vil afvige fra de her præsenterede durationmål, som er egnede til måling af rentefølsomhed i markeder, der som de eksisterende må betegnes som ukomplette.¹²

12. Ingersoll, Skelton og Weil (1978) og Cox, Ingersoll og Ross (1979) har udviklet durationstørrelser fra komplette markeder..

Litteratur

- Bierwag, G. O. 1977. Immunization, Duration and the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 12: 725-742.
- Bierwag, G. O. 1978. Measures of Duration. *Economic Inquiry* 16: 497-507.
- Bierwag, G. O. 1979. Dynamic Portfolio Immunization Policies. *Journal of Banking and Finance* 3: 23-41.
- Bierwag, G. O. og George G. Kaufman 1977. Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: A Note. *Journal of Business* 50: 364-370.
- Bierwag, G. O., George G. Kaufman og Chulsoon Khang. 1978. Duration and Bond Portfolio Analysis: An Overview. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13: 671-681.
- Bierwag, G. O., George G. Kaufman, Robert Schweitzer og Alden Toevs. 1980. Risk and Return for Active and Passive Bond Portfolio Management: Theory and Evidence. *Journal of Portfolio Management*. (kommer senere).
- Bierwag, G. O., George G. Kaufman og Alden Toevs. 1980 *Immunization for Multiple Planning Periods*. The Annual Meetings of the Western Associations, San Diego, California. Juni 1980.
- Caks, John. 1977. The Coupon Effect on Yield to Maturity. *The Journal of Finance* 32: 103-105.
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll og Stephen A. Ross. 1979. Duration and Measurement of Basic Risk. *Journal of Business* 52: 51-61.
- Fisher, L. og R. L. Weil. 1971. Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. *Journal of Business* 44: 408-431.
- Grosen, Anders. 1979 a. Forventet contra realiseret afkast. *Sparekassen* 80, september 1979: 36-39.
- Grosen, Anders. 1979 b. Afbalancering af kurs- og geninvesteringsrisiko. *Sparekassen* 80, oktober 1979: 28-31.
- Grosen, Anders. 1979 c. Varighed som mål for renterisiko. *Sparekassen* 80, November 1979: 30-36.
- Grosen, Anders. 1979 d. Afkast-risikovurderinger i den samlede portefølje. *Sparekassen* 80, december 1979: 30-34.
- Grosen, Anders. 1981. Aktive og passive investeringsstrategier i praksis. *Sparekassen* 82.
- Grosen, Anders og Peder Fredslund Møller. 1979. *Measures of Duration as Elasticities of Bond Price, Reinvestment Value and the Total Value over a Horizon*. Handelshøjskolen i Århus september 1979.
- Hopewell, M. H. og George G. Kaufman. 1973. Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification. *American Economic Review* 63: 749-753.
- Ingersoll, Jonathan E., Jeffrey Skelton og Roman Weil. 1978. Duration Forty Years Later. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13: 627-650.
- Khang, Chulsoon. 1979 a. *A Dynamic Global Portfolio Immunization Theorem in the World of Multiple Interest Rate Change*. Center for Capital Market Research. University of Oregon 1979.
- Khang, Chulsoon. 1979 b. Bond Immunization When Short-Term Rates Fluctuate More Than Long-Term Rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 14:1085-1089.

- Livingston, Miles. 1979. Measuring Bond Price Volatility. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 14: 343-349.
- Macauley, F. R. 1938. *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856*. New York. NBER. 1938.
- Malkiel, B. G. 1966. *The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behavior Patterns*. Princeton.
- Rygner, Elisabeth. 1979. Den danske rentestruktur i den forløbne del af 1970'erne. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 117: 91-106.
- Samuelson, P. A. 1945. The effect of Interest Rate Increases on the Banking System. *American Economic Review* 35: 16-27.
- Sharpe, William F. *Investments*. Prentice-Hall 1978.
- Weil, R. L. 1973. Macauley's Duration: An Appreciation. *Journal of Business* 46: 589-592.
- Yawitz, J. B. 1977. The Relative Importance of Duration and Yield Volatility on Bond Price Volatility. *Journal of Money, Credit and Banking* 9: 97-102.
- Yawitz, J. B., C. H. Hempel og W. J. Marshall. 1976. A Risk Return Approach to the Selection of Optimal Government Bond Portfolio. *Financial Management* 5: 36-45.