En note om Dorfman-Steiner teoremet

Steffen Jørgensen
Institut for teoretisk Statistik, Handelshøjskolen i København

SUMMARY: *The purpose of this note is to substantiate that the so-called Dorfman-Steiner theorem* (*R. Dorfman & P. O. Steiner*, 1954, *Amer.Econ.Rev., December*, 44, *pp.* 826-836) *was in fact derived by the Danish economist, professor Børge Barfod, in an article which appeared in* 1944-45 *in the journal Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi. Actually, partial results leading immediately to the Dorfman-Steiner theorem, appeared in the literature as early as in the thirties.*

Følgende sætning har opnået en vis berømmelse indenfor den del af mikroøkonomien, der beskæftiger sig med virksomhedens optimale pris- og reklamepolitik: »A firm which can influence the demand for its product by advertising will, in order to maximize its profits, choose the advertising budget and price such that the increase in gross revenue resulting from a one dollar increase in advertising expenditure is equal to the ordinary elasticity of demand for the firm's product« (Dorfman & Steiner, 1954 p. 826).

Indholdet af ovenstående kan formuleres matematisk på følgende måde: lad q betegne den afsatte mængde pr. tidsenhed og lad p betegne prisen. Reklameudgiften pr. tidsenhed betegnes ved A. Antag, at afsætningsfunktionen kan skrives som $q = f(p, A)$, hvor f antages differentiabel. Virksomhedens profitfunktion bliver $G(p, A) = pq - A$, idet det (indtil videre) antages, at A er eneste omkostning. Ved partiel differentiation af G med hensyn til p, henholdsvis A fås

$$\frac{\partial G}{\partial p} = p\frac{\partial f}{\partial p} + q \text{ samt } \frac{\partial G}{\partial A} = p\frac{\partial f}{\partial A} - 1 \, .$$

Sættes begge partielle afledede lig med nul fås optimalitetsbetingelserne

$$-\frac{p}{q}\frac{\partial f}{\partial p} = 1 \tag{1}$$

og

En note om Dorfman-Steiner teoremet

Steffen Jørgensen

Institut for teoretisk Statistik, Handelshøjskolen i København

SUMMARY: *The purpose of this note is to substantiate that the so-called Dorfman-Steiner theorem* (*R. Dorfman & P. O. Steiner*, 1954, *Amer.Econ.Rev., December*, 44, *pp.* 826-836) *was in fact derived by the Danish economist, professor Børge Barfod, in an article which appeared in* 1944-45 *in the journal Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi. Actually, partial results leading immediately to the Dorfman-Steiner theorem, appeared in the literature as early as in the thirties.*

Følgende sætning har opnået en vis berømmelse indenfor den del af mikroøkonomien, der beskæftiger sig med virksomhedens optimale pris- og reklamepolitik: »A firm which can influence the demand for its product by advertising will, in order to maximize its profits, choose the advertising budget and price such that the increase in gross revenue resulting from a one dollar increase in advertising expenditure is equal to the ordinary elasticity of demand for the firm's product« (Dorfman & Steiner, 1954 p. 826).

Indholdet af ovenstående kan formuleres matematisk på følgende måde: lad q betegne den afsatte mængde pr. tidsenhed og lad p betegne prisen. Reklameudgiften pr. tidsenhed betegnes ved A. Antag, at afsætningsfunktionen kan skrives som $q = f(p, A)$, hvor f antages differentiabel. Virksomhedens profitfunktion bliver $G(p, A) = pq - A$, idet det (indtil videre) antages, at A er eneste omkostning. Ved partiel differentiation af G med hensyn til p, henholdsvis A fås

$$\frac{\partial G}{\partial p} = p\frac{\partial f}{\partial p} + q \text{ samt } \frac{\partial G}{\partial A} = p\frac{\partial f}{\partial A} - 1 \; .$$

Sættes begge partielle afledede lig med nul fås optimalitetsbetingelserne

$$-\frac{p}{q}\frac{\partial f}{\partial p} = 1 \tag{1}$$

og

$$p\frac{\partial f}{\partial A} = 1 \; . \tag{2}$$

Defineres priselasticiteten som $\eta = -\frac{p}{q}\frac{\partial f}{\partial p}$ og udnyttes (1)-(2) fås *Dorfman-Steiners formel*

$$\eta = \mu \tag{3}$$

hvor $\mu = p\frac{\partial f}{\partial A}$ kaldes »the marginal value product of advertising« (jfr. Dorfman & Steiner, 1954 p. 828).

Antages det, at de marginale produktionsomkostninger er konstante, lig med c, fås profitfunktionen $G(p, A) = (p-c)q - A$, hvilket giver de til (1)-(2) analoge betingelser:

$$(p-c)\frac{\partial f}{\partial p} + q = 0 \tag{4}$$

$$(p-c)\frac{\partial f}{\partial A} - 1 = 0 \; . \tag{5}$$

Defineres reklameelasticiteten som $\varrho = \frac{A}{q}\frac{\partial f}{\partial A}$ kan (4)-(5) skrives som

$$\eta = \frac{p}{p-c} \Leftrightarrow p\left(1-\frac{1}{\eta}\right) = c \tag{4a}$$

$$\varrho = \frac{A}{(p-c)q} \Leftrightarrow p\left(1-\frac{1}{\mu}\right) = c \; . \tag{5a}$$

Formålet med denne korte artikel er at vise, at formel (3) (Dorfman-Steiner's formel) faktisk blev udledt af Børge Barfod i 1944-45, som demonstreret i artiklen i *Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi*, d.v.s. 10 år før Dorfman & Steiner publicerede resultatet i *American Economic Review*.

De to partielle betingelser, (4)-(5) eller (4a)-(5a), som umiddelbart fører til formlen (3), findes i virkeligheden allerede hos Shone (1934) og hos Barfod (1937).

I Barfods artikel fra 1944-45 defineres (som ovenfor) afsætningsfunktionen $q = f(p, A)$ og under antagelsen, at A holdes konstant etableres – ved differentiation af profitfunktionen med hensyn til p – den simple Amoroso-Robinson formel (4a) som en betingelse for optimal pris. Barfod[1] skriver (4a) som

$$p = c\frac{\eta}{\eta-1} \; . \tag{6}$$

1. Barfod (1944-45, p. 50, formel (1)).

Derefter betragtes tilfældet, hvor p holdes konstant, og Barfod etablerer følgende betingelse for optimal reklame:[2]

$$p = c + \frac{\partial A}{\partial q}, \tag{7}$$

hvor $\frac{\partial A}{\partial q}$ er den marginale reklameudgift. Hvis vi antager, at funktionen f er monoton i A for et vilkårligt fixeret p haves

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^{-1}$$

og det følger, at formel (7) er ensbetydende med formel (5), og derfor også med formel (5a). Barfod definerer nu dels reklameelasticiteten ϱ (jfr. ovenfor) og reklameprocenten $a = \frac{A}{pq}$. Herefter kan formel (7) skrives som

$$p = c + \frac{A/q}{\varrho} \tag{8}$$

som er identisk med

$$p = c\frac{\varrho}{\varrho - a} \tag{9}$$

jfr. Barfod (1944-45, p. 53, formel (8)).

Barfod vender sig nu til spørgsmålet om bestemmelsen af en betingelse for optimal pris *og* optimal reklame og bemærker, at betingelserne (6) og (9) i så fald skal være opfyldt samtidig. Sættes højresiderne i (6) og (9) lig med hinanden fås $\eta/(\eta-1) = \varrho/(\varrho - a)$, hvoraf følger at

$$a = \frac{\varrho}{\eta} \tag{10}$$

som er identisk med formel (3), Dorfman-Steiner's formel.

Afslutningsvis gives en kort præsentation af nogle resultater, Barfod angav allerede i 1937 i bogen *Reklamen i Teoretisk-Økonomisk Belysning*. Idet vi følger den formulering, der er givet af Schneider (1938) i hans præsentation af Barfod (1937) defineres afsætningsfunktionen som $q = f(p, w_1, \ldots, w_n)$ hvor $w_i (i = 1, n)$ betegner reklameindsats i fysiske enheder i det i'te medium. Afsætningsfunktionen, som den her er defineret, er således mere generel end den ovenfor anvendte. Det antages, at

2. Barfod (1944-45), p. 51, formel (2)).

priserne på de fysiske enheder er givne. Lad $k_1, \ldots, k_n$ betegne disse priser. Reklameudgiften bliver da

$$A = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i$$

og profitfunktionen er givet som

$$G(p, w_1, \ldots, w_n) = (p-c)q - A$$

idet vi her har antaget, at grænseomkostningerne er konstante, lig med c. (Denne forudsætning gøres ikke i Barfod (1937) eller i Schneider (1938)). Ved partiel differentiation med hensyn til $p, w_1, \ldots, w_n$, idet de $n+1$ afledede alle sættes lig med nul, fås følgende $n+1$ ligninger

$$(p-c)\frac{\partial f}{\partial p} + q = 0 \tag{11}$$

$$(p-c)\frac{\partial f}{\partial w_i} - k_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

Defineres de n elasticiteter $e_i = \frac{w_i \partial f}{q \partial w_i}$ kan (11)-(12) skrives som

$$\frac{p-c}{p} = \frac{1}{\eta} \tag{11a}$$

som er formel (4a), og

$$e_i = \frac{k_i w_i}{(p-c)q} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{12a}$$

der er en åbenbar analogi til formel (5a). Herefter resterede det egentlig blot for Barfod – i 1937 – at (f.eks.) løse såvel (11a) som (12a) med hensyn til $p-c$, sætte højresiderne lig med hinanden og finde, at

$$\frac{k_i w_i}{pq} = \frac{e_i}{\eta} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

for et optimalt sæt $(p, w_1, \ldots, w_n)$. Det ses, at (13) faktisk er en generalisation af (10) idet (10) fås af (13) for $n = 1$ og $k_i = 1$.

Det skal tilføjes, at Barfod udledte sine resultater i stort omfang ved hjælp af sådanne geometriske metoder, der også anvendtes af Zeuthen og hans medarbejdere, se f.eks. Zeuthen (1935) og De Wolff (1940). En kort oversigt over Zeuthens og Barfods arbejder i trediverne indenfor reklameteorien findes i Brems (1951, pp. 6-8).

Litteratur

Barfod, B. 1937. *Reklamen i Teoretisk-Økonomisk Belysning*. København.

Barfod, B. 1939. Et par Træk af Reklamens Virkninger, II. *Revision og Regnskabsvæsen* 7: 229-251.

Barfod, B. 1944-45. En Note om Teoretisk Tolkning af Reklameprocenter. *Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi* 1: 49-55.

Brems, H. 1951. *Product Equilibrium Under Monopolistic Competition*. Cambridge, Mass.

De Wolff, P. 1940. Report of the Elsinore Meeting, August 25-26, 1939. *Econometrica* 8: 279-288.

Dorfman, R. & P. O. Steiner. 1954. Optimal Advertising and Optimal Quality. *Amer.Econ.Rev.* 44: 826-836.

Schneider, E. 1938. Reklamen i Teoretisk-Økonomisk Belysning. Bemærkninger til Børge Barfods Bog med samme Titel. *Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi*, Juni, 79-85.

Shone, R. M. 1934-35. Selling Costs. *Rev.Econ. Stud.* 2: 225-231.

Zeuthen, F. 1935. Effect and Cost of Advertisement From a Theoretic Aspect. *Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi*, September, 62-72.