Stokastisk efterspørgsel og monopol: En grafisk analyse

Carsten Stig Poulsen
Økonomisk Institut, Københavns Universitet

SUMMARY: *This paper contains a graphic illustration of optimum in a simple model of monopoly with random demand. The model may be seen as a version of the Arrow, Harris, Marschack-model of optimal inventory under uncertainty, generalized to price-fixing. Two cases are distinguished, additive and multiplicative introduction of the randomness. Comparisons with the deterministic counterpart is carried out, revealing systematic deviations in the optimal price-setting.*

Indledning

1. Der har i de senere år været en voksende interesse for at opstille økonomiske beslutningsmodeller, som explicit indeholder usikkerhed i beslutningsgrundlaget, i modsætning til traditionel *deterministisk* teori. Denne interesse er berettiget af to grunde: For det første kan der nævnes eksempler på individuel adfærd, som kun kan forklares i en ikke-deterministisk model. Det gælder således tegning af forsikring, valutakøb på terminsmarkedet, lagerkontrol og informationsindsamling. For det andet vil løsningen af en deterministisk model ofte adskille sig – kvantitativt såvel som kvalitativt – fra resultaterne i en ikke-deterministisk model. Et eksempel herpå behandles nedenfor.

2. Indførelsen af usikkerhed i beslutningsgrundlaget er i vidt omfang sket ved at formulere modellerne *stokastisk*, idet værdierne af beslutningsproblemets data tillægges en (subjektiv) sandsynlighed[1]. Herved knyttes en forbindelse mellem sandsynlighedsregning og økonomisk teori, som kan sammenlignes med den statistiske estimations- og hypoteseprøvningsteoris betydning i økonometrien[2].

1. En oversigt over udviklingen i stokastisk mikroteori kan findes hos McCall (1971), som alene omhandler modeller, hvor usikkerheden og dermed den stokastiske beskrivelse vedrører »naturens tilstand«. Væsentlige spil-teoretiske problemstillinger og modeller med stokastiske præferencer er således ikke omtalt.
2. Det stokastiske elements rolle i de to forbindelser må dog siges at være væsentlig forskellig. Se McCall (1971) og Nørregaard Rasmussen (1963).

Stokastisk efterspørgsel og monopol: En grafisk analyse

Carsten Stig Poulsen
Økonomisk Institut, Københavns Universitet

SUMMARY: *This paper contains a graphic illustration of optimum in a simple model of monopoly with random demand. The model may be seen as a version of the Arrow, Harris, Marschack-model of optimal inventory under uncertainty, generalized to price-fixing. Two cases are distinguished, additive and multiplicative introduction of the randomness. Comparisons with the deterministic counterpart is carried out, revealing systematic deviations in the optimal price-setting.*

Indledning

1. Der har i de senere år været en voksende interesse for at opstille økonomiske beslutningsmodeller, som explicit indeholder usikkerhed i beslutningsgrundlaget, i modsætning til traditionel *deterministisk* teori. Denne interesse er berettiget af to grunde: For det første kan der nævnes eksempler på individuel adfærd, som kun kan forklares i en ikke-deterministisk model. Det gælder således tegning af forsikring, valutakøb på terminsmarkedet, lagerkontrol og informationsindsamling. For det andet vil løsningen af en deterministisk model ofte adskille sig – kvantitativt såvel som kvalitativt – fra resultaterne i en ikke-deterministisk model. Et eksempel herpå behandles nedenfor.

2. Indførelsen af usikkerhed i beslutningsgrundlaget er i vidt omfang sket ved at formulere modellerne *stokastisk*, idet værdierne af beslutningsproblemets data tillægges en (subjektiv) sandsynlighed[1]. Herved knyttes en forbindelse mellem sandsynlighedsregning og økonomisk teori, som kan sammenlignes med den statistiske estimations- og hypoteseprøvningsteoris betydning i økonometrien[2].

1. En oversigt over udviklingen i stokastisk mikroteori kan findes hos McCall (1971), som alene omhandler modeller, hvor usikkerheden og dermed den stokastiske beskrivelse vedrører »naturens tilstand«. Væsentlige spil-teoretiske problemstillinger og modeller med stokastiske præferencer er således ikke omtalt.
2. Det stokastiske elements rolle i de to forbindelser må dog siges at være væsentlig forskellig. Se McCall (1971) og Nørregaard Rasmussen (1963).

En stokastisk monopolmodel

3. Et af de første eksempler på en stokastisk formulering af en traditionel, deterministisk model findes hos Mills (1959; 1962), der betragter en monopolist, hvis afsætning er usikker, idet efterspørgslen er stokastisk varierende. Der er tale om en generalisering af Arrow, Harris og Marschacks model for optimal lagerpolitik under usikkerhed[3] til også at omfatte prisfastsættelse. Dette kommer tydeligere til udtryk hos Lykke Jensen (1963; 1967) og Karlin og Carr (1962).

4. I den klassiske model for prisfastsættelse under monopol er den optimale pris, p_d^*, den værdi af p, der maximerer profitten G i den betragtede periode. Idet

$$G(p) = p\, m(p) - C(m(p)) \tag{1}$$

hvor $m(p)$ er monopolistens afsætningsfunktion (markedets efterspørgselsfunktion) og $C(m)$ er omkostningerne ved udbudet m, må en indre løsning $0 < p_d^* < \infty$, tilfredsstille ligningen $G'(p_d^*) = 0$, dvs.

$$p_d^* \left(1 + \frac{1}{e_m}\right) = MC(m(p_d^*)) \tag{2}$$

som er den velkendte Amoroso-Robinson relation. Det optimale udbud er givet ved $m_d^* = m(p_d^*)$. Bemærk, at i denne model vil *enten* prisen *eller* udbudet kunne opfattes som handlingsparameter[4].

5. Det væsentligste træk ved den stokastiske monopolmodel er, at den efterspurgte mængde i perioden, X, opfattes som en (kontinuert) stokastisk variabel, med kendt fordelingsfunktion $F(x; p)$[5], som afhænger af den fastsatte pris.

3. Se Arrow, Karlin og Scarf (1958).

4. Traditionelt har man – lidt unaturligt – valgt den udbudte mængde som beslutningsvariabel, hvilket kan forklares ved ønsket om at kunne sammenligne med et fuldkomment konkurrencemarked. For givet udbud følger prisen på markedet direkte, når der antages at eksistere en clearingsmekanisme, således at konsumenterne byder prisen op (ned), indtil efterspørgsel og udbud er lige store. Denne tilpasning, som har karakter af en *dynamisk* proces, antages i de sædvanligvis *statiske* betragtninger i neoklassisk teori, at ske øjeblikkeligt.

5. Der skelnes undertiden mellem beslutning under *risiko*, hvor fordelingen af de stokastiske variable er kendt i objektiv forstand og beslutning under *usikkerhed*, hvor et sådant kendskab ikke er tilstede. Sondringen kan føres tilbage til Frank Knight (1921). Muligheden af, at fortolke fordelingen som subjektiv har imidlertid i et vist omfang overflødiggjort denne sondring, som derfor ikke vil blive anvendt her.

Heraf følger en række interessante kendetegn ved modellen: *For det første* eksisterer efterspørgselsfunktionen i sædvanlig forstand ikke længere. Den efterspurgte mængde X er ikke en funktion af prisen p. Hvis det skal være muligt at sammenligne den deterministiske og den stokastiske model må der derfor etableres en forbindelse mellem efterspørgselsfunktionen $m(p)$ og fordelingerne $F(x; p)$. En nærliggende mulighed er at opfatte $m(p)$ som regressionen af X på p, således at $E[X; p] = m(p)$, hvor $E[.; p]$ er middelværdioperatoren.

For det andet er det nødvendigt i den stokastiske model at sondre mellem begreberne afsat, efterspurgt og udbudt mængde. I lagerteorien, der som nævnt danner grundlag for den betragtede model, skal udbudet (startlageret) q til dækning af periodens efterspørgsel fastsættes ved begyndelsen af perioden uden mulighed for senere ændring. Ved slutningen af perioden, når efterspørgslen er kendt, dvs. når X har antaget en værdi x, vil efterspurgt og udbudt mængde typisk (med sandsynligheden 1, når x som her antages kontinuert) være forskellige, $x \neq q$. Hvis $x < q$ er der tale om underskudsefterspørgsel (restlager). Er $x > q$ foreligger der overskudsefterspørgsel (mangel). Den *afsatte* mængde i perioden, Y, er begrænset både af den efterspurgte mængde X (der kan ikke afsættes mere end der efterspørges) og den udbudte mængde q (der kan heller ikke afsættes mere end der udbydes), dvs. $Y = min(X, q)$, og Y er dermed en stokastisk variabel. Monopolisten skal imidlertid ikke blot fastsætte udbudet q, men også prisen p. *Både* pris *og* udbudt mængde er altså handlingsparametre i den stokastiske model[6].

Endelig skal *for det tredie* nævnes, at da afsætningen Y og dermed omsætningen $p \cdot Y$ er stokastisk varierende, er profitten i perioden π også en stokastisk variabel[7]:

6. Her forudsættes den i fodnote 4 omtalte clearingsmekanisme altså *ikke* at virke. Når pris og udbud er fastsat, overlades det til konsumenterne at aftage så meget, de *vil* og *kan*. Hvor meget, de *vil* aftage, antages som i klassisk teori bestemt af individuelle præferancer, indkomst og alle priser; hvor meget, de *kan* aftage, bestemmes af den udbudte mængde, som sætter en grænse for den samlede efterspørgsel, der kan tilfredsstilles. Køberne er altså ikke stillet over for en *option*, som i den klassiske model, når både pris og mængde fastsættes af udbyderen. Der er ikke tale om et »alt eller intet«-valg til den givne pris.

7. Arrow, Harris og Marschacks lagermodel indeholder tillige omkostninger som knytter sig specielt til situationen med overskuds- resp. underskudsefterspørgsel, dvs. mangel- og restlageromkostninger. Da vi her primært er interesseret i modellens udvidelse til prisfastsættelse og en sammenligning med den traditionelle model, hvor mangel og restlager ikke forekommer, ses der bort fra disse omkostningstyper. Desuden forudsættes initiallageret at være nul, dvs. produktionen (indkøbet) er identisk med udbuddet, ligesom et evt. restlager ved periodens slutning betragtes som værdiløst.

$$\pi = p \cdot Y - C(q)$$

hvor $C(.)$ som hidtil er omkostningsfunktionen, som forudsættes kendt med sikkerhed. Målsætningen om maximering af profitten har derfor ingen mening i den stokastiske model. I stedet antages det, at *monopolisten søger at maximere den forventede profit*[8]:

$$E[\pi] = p \cdot E[Y] - C(q)$$

Den forventede afsætning, $E[Y]$ afhænger af q og – via $F(x; p)$ – af p. Denne funktion vil vi skrive $s(p, q)$. For fastholdt p og q fremkommer den forventede afsætning ved middelværdidannelse over $min(X, q)$:

$$s(p, q) = \int_0^q xf(x; p)dx + q\int_q^\infty f(x;p)\,dx = \int_0^q (1-F(x; p))\,dx \tag{3}$$

Idet $s(p, q) \rightarrow E[X; p] = m(p)$ for $q \rightarrow \infty$ kan (3) skrives:

$$s(p, q) = m(p) - \int_q^\infty (1-F(x; p))\,dx \tag{4}$$

Af (3) og (4) fremgår det, at

$$s(p, q) \leqq min(m(p), q) \text{ for alle } p, q \tag{5}$$

dvs. den forventede afsætning kan aldrig overstige den forventede efterspørgsel eller den udbudte mængde. Lighedstegnet i (5) vil kun kunne gælde for $q < \infty$, hvis variationsområdet for X er endeligt.

Kriteriefunktionen $E[\pi]$ kan nu skrives:

$$E[\pi] = p \cdot s(p, q) - C(q) = p \cdot m(p) - p \cdot \int_q^\infty (1-F(x; p))\,dx - C(q) \tag{6}$$

Monopolisten søger da de optimale værdier af p og q, (p^*, q^*), som maximerer kritiefunktionen (6) under restriktionerne $p \geqq 0$ og $q \geqq 0$.

---

8. Hvis der eksisterer en von Neumann-Morgenstern nyttefunktion $U(\pi)$ for beslutningstageren, vil han rationelt søge at maximere den forventede nytte $E[U(\pi)]$. Som hovedregel er dette kriterium ikke ækvivalent med maximering af forventet profit. Der er dog to tilfælde, hvor dette gælder. Det ene optræder, når beslutningstageren er *risikoneutral*, det andet opstår, når beslutningstageren gentagne gange stilles i den samme valgsituation, således at de store tals lov finder anvendelse.

De nødvendige betingelser for optimum

6. For fastholdt værdi af p, $p = \bar{p}$, må en indre løsning i q, q°, tilfredsstille den nødvendige første ordens betingelse

$$\frac{\partial}{\partial q} E[\pi; \bar{p}] = o \text{ dvs. } \bar{p}(1-F(q^{\circ}; \bar{p})) = MC(q^{\circ}) \tag{7}$$

q° eksisterer og er entydig, såfremt $\bar{p} > MC(o)$ og $MC'(q) \geqq o$[9].

Optimumsbetingelsen (7) og dens fortolkning er velkendt fra lagerteorien[10].

7. For fastholdt værdi af q, $q = \bar{q}$, må en indre løsning i p, p°, tilfredsstille den nødvendige første ordensbetingelse:

$$\frac{\partial}{\partial p} E[\pi; \bar{q}] = o \text{ dvs. } \int_{o}^{\bar{q}} (1-F(x; p^{\circ}))\, dx - p^{\circ} \int_{o}^{\bar{q}} \frac{\partial F(x; p^{\circ})}{\partial p}\, dx = o \tag{8}$$

Ved anvendelse af (4) kan denne betingelse skrives:

$$p^{\circ}\left(1 + \frac{1}{e_m}\right) = \frac{1}{m'(p_o)} \cdot \left[\int_{\bar{q}}^{\infty} (1-F(x; p^{\circ}))\, dx - \int_{\bar{q}}^{\infty} \frac{\partial F(x; p^{\circ})}{\partial p}\, dx\right]$$

I optimum (p^*, q^*), hvor både (7) og (8) må være opfyldt, må det gælde, at[11]

$$p^*\left(1 + \frac{1}{e_m}\right) = MC(q^*) \cdot \frac{q^*}{-e_m \cdot m} + \frac{1}{m'(p^*)} \int_{q^*}^{\infty} \left[x \frac{\partial F}{\partial x} + p^* \frac{\partial F}{\partial p}\right] dx \tag{9}$$

8. Ligningen (9) er analog til Amoroso-Robinson relationen i den deterministiske model. Den giver en *karakteristik* af optimalsituationen, der dels udtrykker, hvilke faktorer, der er relevante for optimeringsproblemet, og dels, hvorledes disse må forholde sig i optimum. Af (7) ser vi, at $p^* > MC(q^*)$, dvs.

9. Anden ordens betingelsen er $\partial^2 E[\pi]/\partial q^2 < 0$, dvs. $-\bar{p} \cdot f(q^{\circ}; \bar{p}) - MC'(q^{\circ}) < 0$, hvor $f(\cdot; \bar{p})$ er tæthedsfunktionen. Denne er altid opfyldt for $MC'(q) \geqq 0$.

10. Se f. eks. Lykke Jensen (1963).

11. (9) udledes ved at anvende delt integration på $\int_{\bar{q}}^{\infty} (1-F(x; p^{\circ}))\, dx$ og dernæst indsætte (7).

ligesom i deterministisk monopolteori er optimalprisen større end grænseomkostningerne ved det optimale produktionsniveau. Af (8) kan vi slutte, at hvis der skal findes en løsning i p, må andet led være negativt. En tilstrækkelig betingelse herfor er tydeligvis, at $\partial F(x;p)/\partial p > 0$ for alle p og x, hvilket kan fortolkes som den stokastiske udgave af den faldende efterspørgselskurve.

Sammenligning af optimum i de to modeltyper

9. Udover disse formelle betragtninger er det begrænset, hvad der kan udledes af egenskaber ved den stokastiske løsning (p^*, q^*). Et centralt spørgsmål er, hvorledes (p^*, q^*) forholder sig til den deterministiske løsning $(p^*_d, m(p^*_d))$, som tilfredsstiller (2). En besvarelse heraf er ikke mulig. Hertil er den stokastiske model formuleret for generelt. Vi må foretage en mere eksplicit parametrisering af $F(x;p)$ i p. Sædvanligvis antages usikkerheden at indgå enten *additivt*[12], $X = m(p) + U$, hvor $E[U] = 0$ og fordelingen af U er uafhængig af p, eller *multiplikativt*[13], $X = Z \cdot m(p)$, hvor $E[Z] = 1$ og fordelingen af Z er uafhængig af p[14].

Forudsættes nu tillige, at *grænseomkostningerne er konstante*, $MC = c$, kan der påvises systematiske afvigelser mellem optimalpriserne i den stokastiske og den deterministiske model[15]. Hvis usikkerheden indgår *additivt*, fås $p^*_a < p^*_d$, mens den *multiplikative* indførelse giver $p^*_m > p^*_d$. Det er derimod ikke muligt at afgøre relationen mellem de udbudte mængder.

Efter denne oversigt over problemstillingen og de vigtigste resultater af analysen kan vi nu gå over til det egentlige indhold i denne artikel: En grafisk illustration af optimeringen i den stokastiske model.

Den grafiske analyse

10. Siden fremkomsten i 1933 af Joan Robinsons og Chamberlins arbejder om monopolistisk prisfastsættelse har der været tradition for at illustrere optimeringen i deterministiske prismodeller grafisk. Pris-mængde diagrammer med de velkendte MR- og MC-kurver er standardredskaber ved den teoretiske analyse. Det skal dog nævnes, at der sædvanligvis ikke er tale om en

12. Dette var Mills formulering i Mills (1959) og (1962). Se tillige Lykke Jensen (1963) og (1967), Karlin og Carr (1962), Hempenius (1970) og Zabel (1972).

13. Se Lykke Jensen (1967), Karlin og Carr (1962), Hempenius (1970), Nevins (1966), og Zabel (1970) og (1972).

14. Halds specifikation i Nørregaard Rasmussen og Hald (1963) er formelt mere generel, men er identisk med den additive resp. multiplikative indførelse, når der sammenlignes med den deterministiske model, jfr. Lykke Jensen (1967).

15. Der henvises til de under noterne 12 og 13 anførte arbejder.

egentlig geometrisk bestemmelse af optimum. MR- og MC-kurverne er kun skitserede på grundlag af visse *kvalitative* egenskaber (f.eks. MR-kurven faldende, beliggende under $m(p)$-kurven, MC-kurven voksende eller U-formet). Specielle forudsætninger om efterspørgsels- og omkostningsforholdene kan imidlertid forenkle bestemmelsen af optimum væsentligt. Hvis således *(i)* efterspørgselskurven er lineær: $p = a \cdot m + b$ $(a<0,\ b>0)$ *(ii)* grænseomkostningerne er konstante: $MC(m) = c$ for alle $m>0$, fremkommer det specialtilfælde af Amoroso-Robinsons formel (2), som kaldes *Zeuthens regel om halv overpris:*

$$p^*_d = \frac{b+c}{2};\ b > c \tag{10}$$

p^*_d vil her geometrisk kunne findes som midtpunktet af liniestykket mellem $m(p)$-kurvens og MC-kurvens skæring med p-aksen. Det optimale udbud $m^*_d = m(p^*_d)$ kan dernæst aflæses af $m(p)$-kurven, se fig. 1. Cournot-punktet (p^*_d, m^*_d) vil alternativt kunne findes som skæringspunktet mellem efterspørgselskurven $p = a \cdot m + b$ og linien $p = -am + c$, som vist på fig. 1[16]. Denne egenskab vil vise sig nyttig ved den grafiske analyse af den additive model.

11. Fordelene ved at kunne supplere de rent algebraiske udledninger med en simpel geometrisk illustration er den øgede indsigt i problemets struktur, overblikket over de relevante funktionssammenhænge og muligheden for en simpel analyse af virkningerne af ændringer i problemets data (komparativ statik). Det var derfor naturligt, at P. Nørregaard Rasmussen som officiel opponent ved forsvaret for Lykke Jensens disputats (1963) efterlyste »en simpel geometrisk bestemmelse af den optimale pris«[17]. Forfatterens behandling af dette problem var skitsemæssig og på flere punkter kritisabel[18].

12. Dette er baggrunden for den grafiske analyse af den stokastiske model, som skal gennemføres. På forhånd må det forventes, at en geometrisk bestemmelse af optimum i den stokastiske model, hvor både pris og udbud er handlingsparametre, er væsentligt mere kompliceret end i den deterministiske mo-

16. Cournot-punktet (p^*_d, m^*_d) er bestemt ved ligningerne $p^*_d = \frac{b+c}{2}$ og $p^*_d = a \cdot m^*_d + b$, som kan opfattes som en parameterfremstilling i b af det geometriske sted for mængden af Cournot-punkter, som fremkommer, når efterspørgselskurven parallelforskydes. Eliminering af parameteren b ved substitution giver umiddelbart den anførte linie, som Winding (1957) kalder *reaktionskurven*.

17. Se Nørregaard Rasmussen og Hald (1963, p. 254).

18. Se Nørregaard Rasmussen og Hald (1963) og Lykke Jensen (1967).

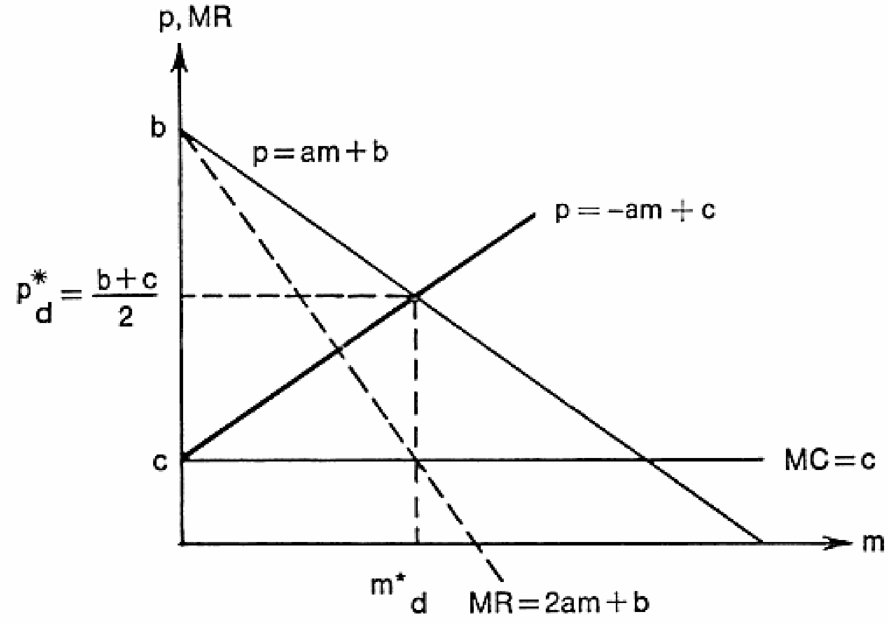


Fig. 1.

del. Dette skyldes, at kriteriefunktionen her er udvidet med en dimension og maximum følgelig fremtræder som et *maximum maximorum*. Vi skal derfor tage udgangspunkt i den simple deterministiske model, hvor forudsætningerne *(i)* og *(ii)* er opfyldt, og her angive en (simpel) *illustration*[19] af det stokastiske optimums bestemmelse i et pris-mængde diagram på grundlag af *kvalitative* egenskaber i de relevante funktionssammenhænge, når usikkerheden indgår dels additivt og dels multiplikativt.

Monopolistens udbudskurve

13. Med forudsætningen *(ii)* om konstante grænseomkostninger, $MC = c$, kan det optimale udbud for given pris p findes af (7):

$$p(1-F(q^o;p)) = c \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow p \cdot \alpha^o \quad = c \tag{12}$$

hvor $\alpha^o = 1-F(q^o;p)$ angiver den optimale mangelsandsynlighed, som er bestemt ved $(1-c/p)$-fraktionen i efterspørgslens fordeling $F(x;p)$. q^o er tilsvarende $(1-c/p)$-fraktilen i $F(x;p)$. For alle $p>c$ vil $q^o>0$ eksistere og være én-

19. En metode til *egentlig* bestemmelse af optimum i den stokastiske model med additiv, resp. multiplikativ, indførelse af usikkerheden, er angivet i Poulsen (1975).

tydigt bestemt. Det er derfor muligt at opfatte q^o som en funktion af p, $q^o = q^o(p)$, som kan kaldes udbudsfunktionen for monopolisten. Dens graf kaldes monopolistens *udbudskurve*.

En matematisk analyse af udbudsfunktionens egenskaber kan gennemføres på grundlag af (11), som indeholder sammenhængen $q^o(p)$ på implicit form. Dette skal vi undlade her[20] og blot bemærke, at udbudskurven *typisk* er først voksende og siden aftagende, når prisen forøges, se fig. 2. Forklaringen herpå er, at det optimale udbud afhænger af to modsat rettede faktorer: En højere pris vil – alt andet lige – tilsige en mindre optimal mangelsandsynlighed α^o og dermed et større udbud. Men »alt andet« er ikke »lige«. Når efterspørgslen i stokastisk forstand er en aftagende funktion af prisen, $\partial F(x;p)/\partial p > 0 \Leftrightarrow \partial \alpha/\partial p < 0$[21], vil mangelsandsynligheden *for et givet udbud* falde, når p forøges. Tilbagebøjningen i udbudskurven er udtryk for, at den sidstnævnte tendens er kraftigere end den førstnævnte[22].

Når udbudet er fastsat optimalt, kan *den forventede afsætning* vurderes ved $s^o(p) = s(p, q^o(p))$, som er en funktion af p. Ifølge (5) haves $s^o(p) < \min(m(p), q^o(p))$, idet $\alpha^o > 0$ for alle p. I pris-mængde diagrammet vil den tilhørende kurve derfor være begrænset både af udbudskurven og af efterspørgselskurven. Dens principielle forløb er vist på fig. 2.

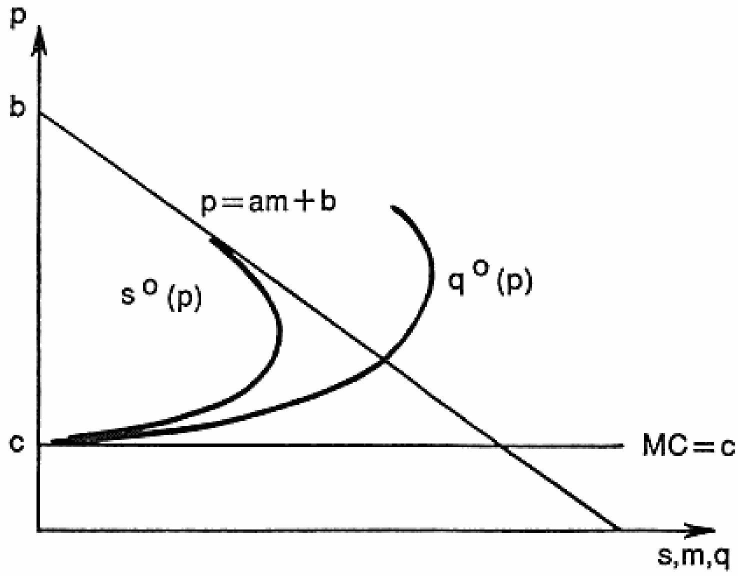


FIG. 2.

20. Der kan henvises til Nørregård Rasmussen og Hald (1963), Hymans (1966) og Poulsen (1975).
21. Denne betingelse er opfyldt i både den additive og den multiplikative model.
22. I Poulsen (1975) anlæggges en udbudskurvebetragtning i den deterministiske model, som kan opfattes som et grænsetilfælde af udbudskurven i den stokastiske model.

14. Med kurverne $s^o(p)$ og $q^o(p)$ har vi bestemt det geometriske sted for mængden af punkter (p, s) resp. (p, q), som er kendetegnet ved, at udbudet og dermed mangelsandsynligheden er optimal for enhver fastholdt værdi af $p > c$. Vi har således afgrænset punktmængder i pris-mængde diagrammet, hvor den ene af de to nødvendige betingelser for optimum, jfr. (7), er opfyldt. Vi mangler nu blot en tilsvarende karakteristik af den anden optimalbetingelse, jfr. (8).

Den optimale pris for fastholdt mangelsandsynlighed

15. I det foregående afsnit betragtedes prisen som fast og analysen kunne derfor gennemføres generelt, uafhængig af, hvorledes fordelingsfunktionen $F(x; p)$ afhænger af p. I dette afsnit vil p være at opfatte som handlingsparameter, og følgelig må prisens parametrisering af efterspørgslens fordeling være af central betydning. Ved udledningen af den stokastiske udgave af Amoroso-Robinsons formel (9) opfattede vi pris og udbud som beslutningsvariable. Den grafiske analyse af den stokastiske model og den efterfølgende sammenligning med den deterministiske model forenkles imidlertid, hvis vi i stedet for udbudet q vælger mangelsandsynligheden $\alpha \equiv 1 - F(q; p)$ som beslutningsvariabel. Dette er rent formelt, da α for enhver given værdi af p er en monoton (aftagende) funktion af q. I afsnit 13 bestemtes den optimale værdi af α for given $p = \bar{p}$. Her skal vi nu bestemme den optimale værdi af p, når α er fast, $\alpha = \bar{\alpha}$, dvs. den værdi, p^o, som maximerer den forventede profit

$$E[\pi; \bar{\alpha}] = p \cdot s(p; \bar{\alpha}) - c \cdot q(p; \bar{\alpha}) \tag{13}$$

når monopolisten for alle værdier af p udbyder mængden $q(p; \bar{\alpha})$ svarende til $(1-\bar{\alpha})$-fraktilen i efterspørgslens fordeling $F(x; p)$. Den forventede afsætning kan da vurderes ved $s(p; \bar{\alpha}) = s(p, q(p; \bar{\alpha}))$. Den optimale pris vil afhænge af $\bar{\alpha}$, $p^o = p^o(\bar{\alpha})$, og den tilsvarende forventede afsætning er $s^o(\bar{\alpha}) = s(p^o(\bar{\alpha}); \bar{\alpha})$.

Varieres dernæst $\bar{\alpha}$ kan vi bestemme sammenhørende værdier af $(p^o(\alpha), s^o(\alpha))$, som udgør en parameterfremstilling i α af mængden af punkter (p, s) i pris-mængdediagrammet, hvor prisen er fastsat optimalt for alle α, $0 < \alpha < 1$. Den tilhørende kurve kaldes $s(p^o)$[23].

23. Funktionen $s^o(\alpha) = s(p^o(\alpha); \alpha)$ kan ikke afbildes i et pris-mængdediagram. I stedet betragter vi $s(p^o)$, som betegner den forventede afsætning som funktion af prisen, når denne fastsættes optimalt for alternative værdier af α. Bemærk, at den omvendte funktion af $s(p^o)$ eksisterer ikke nødvendigvis (jfr. den multiplikative model).

Optimum optimorum kan sluttelig findes som skæringspunktet mellem kurverne $s^o(p)$ og $s(p^o)$, idet optimalprisen p^* vil være bestemt ved $s^o(p^*) = s(p^*)$. Det optimale udbud q^* kan da findes af udbudskurven $q^* = q^o(p^*)$.

Denne analyse vil nu blive gennemført særskilt i den additive og den multiplikative model.

Den additive model

16. Når usikkerheden indgår additivt, $X = m(p) + U$, hvor fordelingen af U, $G(u)$, er uafhængig af p, kan funktionerne $q(p;a)$ og $s(p;a)$ i (13) skrives på formen

$$q\,(p;\,a) = m\,(p) + G^{-1}\,(1-a) \tag{14}$$

$$s\,(p;\,a) = m\,(p) - \int_{G^{-1}(1-a)}^{\infty} (1 - G\,(u))\,du \tag{15}$$

hvor $G^{-1}\,(.)$ betegner den omvendte funktion af G. (14) og (15) har en simpel geometrisk fortolkning: For fastholdt værdi af a fremkommer $q\,(p;\,a)$- og $s\,(p;\,a)$-kurven af $m\,(p)$-kurven ved parallelforskydning[24]. Kriteriefunktionen (13) kan skrives:

$$E[\pi;\,a] = (p-c)s(p;\,a) - c(q(p;\,a) - s(p;\,a))$$

Men her er sidste led uafhængigt af p, dvs.

$$\max_p E\,[\pi;\,a] \sim \max_p \{\,(p-c)\,s\,(p;\,a)\}$$

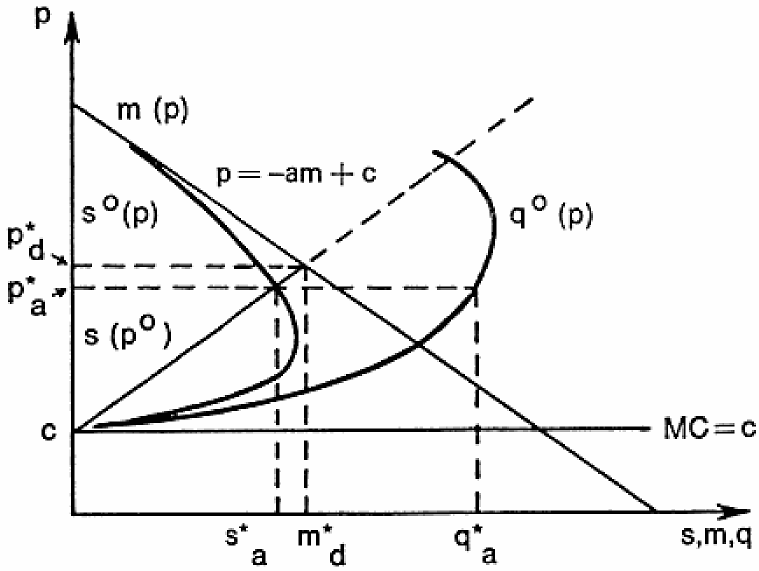
Maximeringsproblemet har derfor samme struktur som i den deterministiske model. Da $m(p)$-kurven er forudsat lineær, vil $s\,(p;\,a)$ også være lineær. Ifølge Zeuthens regel om halv overpris vil $p^o\,(a)$ derfor være givet ved

$$p^o\,(a) = \frac{b_a + c}{2}$$

24. $s(p;a)$ vil altid ligge til venstre for $m(p)$, mens $q\,(p;\,a)$ kan ligge på begge sider af $m(p)$, afhængig af værdien af a og fordelingen $G(u)$.

hvor $b_a = b + a \cdot \int_{G^{-1}(1-a)}^{\infty} (1 - G(u))\, du \leq b$, og »Cournot-punktet« $(p^o(a), s^o(a))$ vil tilhøre linien $p^o(a) = -a \cdot s^o(a) + c$, som dermed er det søgte geometriske sted $s(p^o)$ for de punkter (p, s), hvor prisen er optimal for fastholdt mangelsandsynlighed.

Optimum optimorum (p^*_a, q^*_a) i den additive model kan nu bestemmes som vist på fig. 3. Her er tillige angivet det deterministiske optimum (p^*_d, m^*_d), jfr. fig. 1. Vi ser da umiddelbart, at $p^*_a < p^*_d$, mens relationen mellem udbudet i de to modeller er ubestemt.



FIGUR 3.

Den multiplikative model

17. Når usikkerheden indgår multiplikativt, $X = Z \cdot m(p)$, hvor fordelingen af Z, $G(z)$, er uafhængig af p, kan funktionerne $q(p; a)$ og $s(p; a)$ skrives:

$$q(p; a) = m(p) \cdot G^{-1}(1-a) \tag{16}$$

$$s(p; a) = m(p)\,(1 - \int_{G^{-1}(1-a)}^{\infty} (1 - G(z)\, dz) \tag{17}$$

Geometrisk betyder (16) og (17), at $q(p; a)$- og $s(p; a)$-kurverne fremkommer af $m(p)$-kurven ved multiplikation[25], dvs. begge har samme elasticitet i p som $m(p)$-kurven. Skrives kriteriefunktionen her på formen

$$E[\pi; a] = \left(p - c \cdot \frac{q(p; a)}{s(p; a)}\right) s(p; a)$$

er kvotienten $q(p; a)/s(p; a)$ uafhængig af p, dvs.

$$\max_p E[\pi; a] \sim \max_p \{ (p - c_a) \cdot s(p; a) \}$$

$$\text{hvor } c_a \equiv c \cdot \frac{q(p; a)}{s(p; a)} > c.$$

For fastholdt a har maximeringsproblemet derfor igen samme struktur som i den deterministiske model. Med de anvendte forudsætninger er $p^o(a)$ følgelig givet ved:

$$p^o(a) = \frac{b + c_a}{2}$$

Det geometriske sted $s(p^o)$ for »Cournot-punkterne« $(p^o(a), s^o(a))$ er mere kompliceret end i den additive model. Vi skal derfor nøjes med at skitsere kurven $s(p^o)$. Vi ser, at $p^o(a) \geqq p^*_d = (b+c)/2$ for alle a, og at p^o er en aftagende funktion af a. $s^o(a)$ er ligeledes aftagende i a, således at $s^o(a) \to m(p^o(a))$ for $a \to 0$. Kurven $s(p^o)$ vil derfor typisk være voksende og siden aftagende, når p^o forøges, jfr. fig. 4.

Optimalprisen p^*_m i den multiplikative model vil atter være bestemt ved skæringspunktet mellem kurverne $s^o(p)$ og $s(p^o)$. Optimum optimorum (p^*_m, q^*_m) kan dernæst findes af udbudskurven $q^o(p)$. Vi ser, at $p^*_m > p^*_d$.

Konkluderende bemærkninger

18. På baggrund af den grafiske analyse kan vi nu give en egentlig økonomisk fortolkning af den fundne systematik i optimalpriserne. *Additiv* indførelse af usikkerheden medfører for fastholdt mangelsandsynlighed en parallelforskydning af *afsætningskurven* mod venstre og dermed en forøgelse af priselasticiteten,

25. Multiplikatoren for $s(p; a)$ vil altid være mindre end 1, mens multiplikatoren for $q(p; a)$ kan være større eller mindre end 1, afhængig af værdien af a og fordelingen $G(z)$.

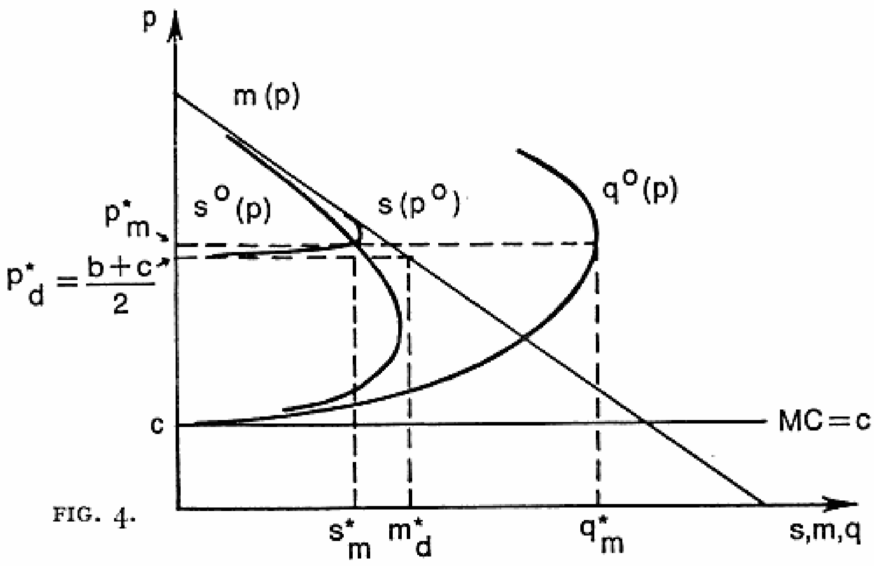


FIG. 4.

mens grænseomkostningerne er uforandrede. Derfor er det optimalt at sætte en lavere pris end i den deterministiske model, hvor afsætnings- og efterspørgselskurven er sammenfaldende. Indgår usikkerheden derimod *multiplikativt*, er priselasticiteten i afsætningskurven uændret, men grænseomkostningerne forøges. Derfor er optimalprisen højere.

19. Den grafiske analyse blev gennemført under restriktive forudsætninger, men to observationer af mere principiel karakter skal nævnes: For det første kan den explicitte indførelse af usikkerhed give anledning til modeller, som er strukturelt forskellige fra de deterministiske modstykker. For det andet kan den måde, hvorpå usikkerheden indgår, give anledning til kvantitativt forskellige løsninger af den stokastiske model.

Litteratur

ARROW, K. J., S. KARLIN og H. SCARF, red. 1958. *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford, Californien.

HEMPENIUS, A. L. 1970. *Monopoly With Random Demand*. Rotterdam.

HYMANS, S. H. 1966. Uncertainty, Utility and the Supply Function. *International Economic Review*, vol. 7, nr. 3.

JENSEN, E. LYKKE. 1963. *Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt*. København.

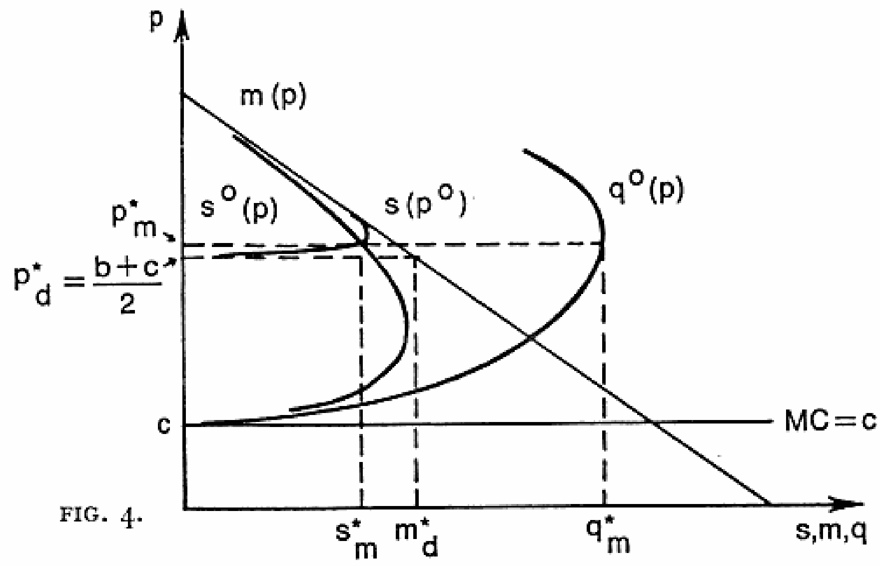


FIG. 4.

mens grænseomkostningerne er uforandrede. Derfor er det optimalt at sætte en lavere pris end i den deterministiske model, hvor afsætnings- og efterspørgselskurven er sammenfaldende. Indgår usikkerheden derimod *multiplikativt*, er priselasticiteten i afsætningskurven uændret, men grænseomkostningerne forøges. Derfor er optimalprisen højere.

19. Den grafiske analyse blev gennemført under restriktive forudsætninger, men to observationer af mere principiel karakter skal nævnes: For det første kan den explicitte indførelse af usikkerhed give anledning til modeller, som er strukturelt forskellige fra de deterministiske modstykker. For det andet kan den måde, hvorpå usikkerheden indgår, give anledning til kvantitativt forskellige løsninger af den stokastiske model.

Litteratur

ARROW, K. J., S. KARLIN og H. SCARF, red. 1958. *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford, Californien.

HEMPENIUS, A. L. 1970. *Monopoly With Random Demand*. Rotterdam.

HYMANS, S. H. 1966. Uncertainty, Utility and the Supply Function. *International Economic Review*, vol. 7, nr. 3.

JENSEN, E. LYKKE. 1963. *Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt*. København.

JENSEN, E. LYKKE. 1967. Extensions of the Amoroso-Robinson formula. *Management Science*, vol. 13 – serie A.

KARLIN, S. og CHARLES R. CARR. 1962. Prices and Optimal Inventory Policy. I *Studies in Applied Probability and Management Science*, red. K. J. Arrow, S. Karlin og H. Scharf. Stanford, Californien.

KNIGHT, F. H. 1921. *Risk, Uncertainty and Profit.* Cambridge.

MCCALL, J. J. 1971. Probabilistic Microeconomics. *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 2, nr. 2.

MILLS, E. S. 1959. Uncertainty and Price Theory. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 73.

MILLS, E. S. 1962. *Price, Output, and Inventory Policy*. London.

NEVINS, A. J. 1966. Some Effects of Uncertainty: Simulation of a Model of Price. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 80, nr. 1.

POULSEN, C. S. 1973. *Stochastic Models of Monopoly.* Statistisk Instituts grå serie, nr. 21. (Stencileret).

POULSEN, C. S. 1975. *Prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt.* Besvarelse af Københavns Universitets prisspørgsmål for året 1974. (Stencileret).

RASMUSSEN, P. NØRREGAARD. (1963). *Om økonomiens metode*. Memorandum nr. 8 fra Københavns Universitets Økonomiske Institut. (Stencileret).

RASMUSSEN, P. NØRREGAARD og A. HALD. 1963. En disputats om lager og prispolitik fra et stokastisk synspunkt. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 101: 246–274.

WINDING, P. 1957. *Some Aspects of the Acceleration Principle.* København.

ZABEL, E. 1970. Monopoly and Uncertainty. *Review of Economic Studies* 37: 205–219.

ZABEL, E. 1972. Multiperiod Monopoly under Uncertainty. *Journal of Economic Theory*, vol. 5.