SMEC II - dens egenskaber, udformning og brug

Ellen Andersen og Niels Kærgård
Økonomisk Institut, Københavns Universitet

SUMMARY. *The model SMEC II is shown to be approximately linear. A simplification of the consumption function is suggested, and the reliability and interpretation of the multipliers are questioned. In appendix 1 regression with suppressed constant term is discussed, and appendix 2 deals with relations where the variables are specified as growth rates.*

1. Indledning

De følgende kommentarer til Det økonomiske Råds model, SMEC II, består først og fremmest af tolkninger og omfortolkninger af beregninger og analyser i foranstående indlæg af Rosted m.fl. (1974). Når vi anser sådanne tolkninger for nyttige er begrundelsen for det første, at visse træk ved modellen ikke træder tilstrækkeligt klart frem i den givne fremstilling, samt for det andet at begreber og metoder visse steder afviger fra gængs fremgangsmåde uden at dette er understreget kraftigt nok.

I det følgende afsnit behandles spørgsmålet om modellens linearitet. I afsnit 3 diskuteres formuleringen af forbrugsfunktionen, og der foreslås en forenklet grundspecifikation. Afsnit 4 behandler spørgsmål vedrørende multiplikatorernes størrelse, og indlægget sluttes med to appendices om henholdsvis relationer formuleret i procentvise ændringer og regression med undertrykt konstantled.

2. Den estimerede models egenskaber

Som udgangspunkt for diskussioner af modellen kan det være nyttigt at betragte en generel formulering af en ikke-lineær models relationer. Betragtes en enkelt relation i det reducerede system, har den formen:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

hvor y er en endogen variabel og x_i'erne de exogene variable. f er en funktion, der angiver forbindelsen mellem de variable, og er altså givet ved den anvendte model. f forekommer da i to udgaver, dels den empirisk estimerede funktion $\hat{f}$

SMEC II - dens egenskaber, udformning og brug

Ellen Andersen og Niels Kærgård
Økonomisk Institut, Københavns Universitet

SUMMARY. *The model SMEC II is shown to be approximately linear. A simplification of the consumption function is suggested, and the reliability and interpretation of the multipliers are questioned. In appendix 1 regression with suppressed constant term is discussed, and appendix 2 deals with relations where the variables are specified as growth rates.*

1. Indledning

De følgende kommentarer til Det økonomiske Råds model, SMEC II, består først og fremmest af tolkninger og omfortolkninger af beregninger og analyser i foranstående indlæg af Rosted m.fl. (1974). Når vi anser sådanne tolkninger for nyttige er begrundelsen for det første, at visse træk ved modellen ikke træder tilstrækkeligt klart frem i den givne fremstilling, samt for det andet at begreber og metoder visse steder afviger fra gængs fremgangsmåde uden at dette er understreget kraftigt nok.

I det følgende afsnit behandles spørgsmålet om modellens linearitet. I afsnit 3 diskuteres formuleringen af forbrugsfunktionen, og der foreslås en forenklet grundspecifikation. Afsnit 4 behandler spørgsmål vedrørende multiplikatorernes størrelse, og indlægget sluttes med to appendices om henholdsvis relationer formuleret i procentvise ændringer og regression med undertrykt konstantled.

2. Den estimerede models egenskaber

Som udgangspunkt for diskussioner af modellen kan det være nyttigt at betragte en generel formulering af en ikke-lineær models relationer. Betragtes en enkelt relation i det reducerede system, har den formen:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

hvor y er en endogen variabel og x_i'erne de exogene variable. f er en funktion, der angiver forbindelsen mellem de variable, og er altså givet ved den anvendte model. f forekommer da i to udgaver, dels den empirisk estimerede funktion $\hat{f}$

og dels den sammenhæng der findes i virkeligheden, i det følgende kaldet den »sande« model f.

Betragtes nu »små« ændringer i de exogene variable vil virkningen på y være givet ved

$$\Delta y \simeq \Delta x_1 \frac{\delta f}{\delta x_1} + \Delta x_2 \frac{\delta f}{\delta x_2} + \ldots + \Delta x_n \frac{\delta f}{\delta x_n} \tag{2}$$

Ligningen vil for uendelig små ændringer gælde eksakt, men for store ændringer kun være opfyldt for en lineær funktion; for en sådan vil $\delta f / \delta x$ desuden være konstant, uafhængig af x's værdi. Omformuleringen svarer til at aflæse y-værdien, ikke på funktionens graf, men på tangentplanet, jfr. fig. 1 for én exogen variabel.

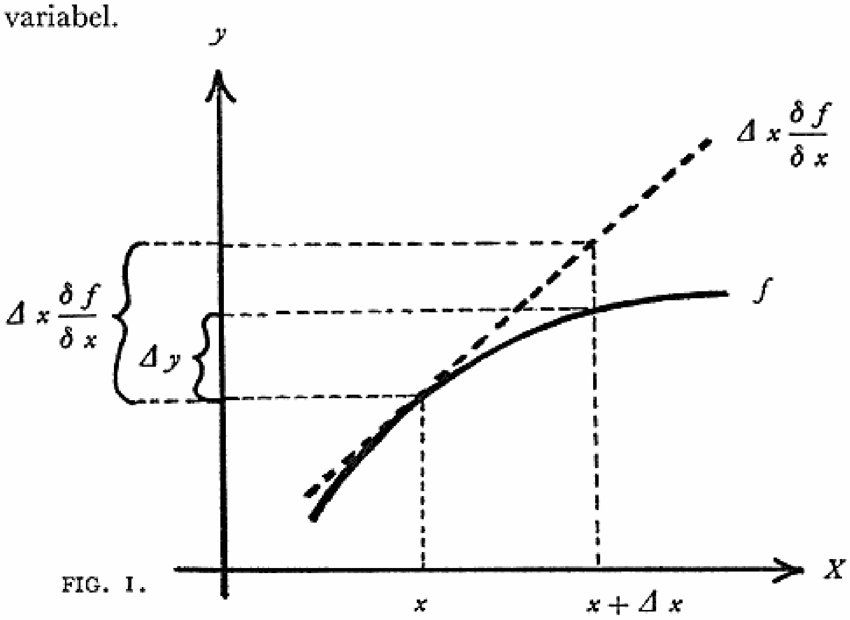

FIG. 1.

Med dette i baghovedet er det lettere at tolke de undersøgelser, der behandles i artiklen. $\delta f / \delta x$ er jo modellens multiplikatorer, og 'konjunkturfølsomhed' er således et test for, hvor meget disse for relationerne *i den estimerede model* varierer med x's størrelse. Sammenligningen mellem modelberegningen og multiplikatorberegningen af en bukets virkninger er tilsvarende en sammenligning af højre og venstresiden i (2) *for den estimerede models vedkommende*. Begge dele er altså test for, *hvor lineær den estimerede model er* og siger derfor ikke noget om den sande model eller om overensstemmelsen mellem den estimerede og den sande model.

De foretagne beregninger tyder stærkt på, at SMEC II med fordel kan erstattes med en lineær model. Lineære modeller indebærer en række fordele;

de er dels behagelige at estimere, dels bekvemme at anvende. Eksempelvis vil en lineær model muliggøre, at der beregnes skøn over spredningen på multiplikatorerne, hvilket må anses for meget ønskeligt med den brug Det økonomiske Råd gør af disse størrelser. Trods vanskelighederne ved i den nuværende model at vurdere disse spredninger, burde der nok være sat mere ind på dette; f. eks. kunne det gøres ved hjælp af stokastisk simulation.

Selv om man ikke vil drage den fulde konsekvens af denne analyse af modellen, nemlig at erstatte den med en helt lineær version, forekommer det tydeligt, at modellen er mere kompliceret end nødvendigt. I det følgende skal mulighederne for en forenkling af den mest komplicerede relation - forbrugsfunktionen - derfor undersøges.

3. Specifikationen af forbrugsfunktionen

Forfatterne tager udgangspunkt i to karakteristika ved sammenhængen mellem forbrug og indkomst: For det første en konstant gennemsnitlig forbrugskvote på langt sigt, og for det andet en faldende marginal forbrugskvote på kort sigt. Begrundelsen for dette er, at det er »hovedresultater, som forbrugsteorien og empirien har underbygget«. Om en faldende marginal forbrugskvote kan siges at være påvist for andet end tværsnitundersøgelser, er dog tvivlsomt. I det følgende vil de nævnte egenskaber imidlertid blive fastholdt, således at specifikationen af forbrugsfunktionen diskuteres på forfatternes præmisser.

Et senere sted i artiklen angives en yderligere egenskab, nemlig »en trendmæssig stigning i forbrugskvoten«, men den begrundes eksplicit i danske forhold i perioden 1956-72. I virkeligheden har den gennemsnitlige forbrugskvote et U-formet forløb d.v.s. faldende indtil begyndelsen af 1960'erne og derefter stigende. Da dette forhold ikke er taget i betragtning i de indledende overvejelser over specifikationen, bliver det nødvendigt at supplere med yderligere forklaringsforhold, jævnfør nedenfor.

Den teoretiske opdeling i korttids- og langtidseffekter af indkomstændringer baseres, empirisk set, på en sondring mellem realiserede og normale ændringer, hvor de sidstnævnte fastlægges som et gennemsnit af historiske ændringer. Denne procedure anvendes dog kun i to af de tre estimerede versioner, version (A) og (B), mens den tredie kun bygger på realiseret indkomst[1]. I det følgende skal diskussionen koncentreres om version (A) og (B).

1. Teststørrelsen R^2 burde næppe anføres for disse relationer, da det for det første kunne forlede til urimelige sammenligninger her, hvor der anvendes forskellig endogen variabel, og for det andet ikke er meningsfyldt at anvende R^2 ved origoregression jfr. appendix 1.

Adfærdsrelationerne i SMEC II er bortset fra forbrugsfunktionen tilnærmelsesvist lineære i de variable udtrykt som procentvise ændringer. Forbrugsfunktionens specifikation med den *absolutte ændring* i forbrugskvoten som afhængig og *de procentvise ændringer* i de to typer indkomst som uafhængige variable er ikke blot usædvanlig, men også temmelig uigennemskuelig. Dette fremgår klart af de i fodnote 10 viste differentationer, hvor det blandt andet anføres, at den marginale forbrugskvote er positiv, men kun »indenfor de sandsynlige variationsområder«. I det følgende skal derfor introduceres en gruppe af *simple* forbrugsfunktioner, *som* er lineære i de procentvise ændringer, *som* besidder de to krævende karakteristika, og *som* altid har en positiv marginal forbrugskvote. Denne specifikation sammenlignes med version (B) samt med en lineær forbrugsfunktion. Til sidst i dette afsnit diskuteres forbrugsfunktioner med andre forklaringsfaktorer end indkomsten, jævnfør version (A), idet det U-formede forløb af den gennemsnitlige forbrugskvote i beregningsperioden nødvendiggør en udvidelse af specifikationen.

Udtrykt i vækstprocenter er kravet om en konstant langtidsforbrugskvote ensbetydende med, at forbrugsstigningen er lig med stigningen i den realiserede indkomst, når denne svarer til normalindkomststigningen. Dette er opfyldt af følgende simple forbrugsfunktion:

$$\Delta C/C = a\Delta Y/Y + (1-a)\Delta Z/Z \tag{3}$$

hvor C er forbruget, Y realiseret indkomst, Z normalindkomst, alle tidsfæstet til året forud; a er en parameter mellem nul og én. Det ses, at forbrugsstigningen ligger mellem de to indkomststigninger; for givet normalindkomststigning har forbrugsændring og indkomstændring samme fortegn, og den marginale forbrugskvote er faldende med stigende realiseret indkomst. Funktionens egenskaber kan måske iøvrigt lettere overskues, hvis den, jfr. appendix 2, omskrives til:

$$C = AY^{a}Z^{1-a} \tag{4}$$

der er en Cobb-Douglas funktion, som for fastholdt normalindkomst er en traditionel Engelkurve.

Den simple forbrugsfunktion i (3) med de krævede egenskaber er ikke identisk med nogen af de tre versioner i SMEC II. Ligheden er størst mellem (3) og version (B). (B) kan under anvendelse af reglen om, at den procentvise ændring i et produkt er summen af de procentvise ændringer i faktorerne, omskrives til:

$$\Delta C/C = \left(1 - b\frac{Y}{C}\right)\Delta Y/Y + \left(b\frac{Y}{C}\right)\Delta Z/Z \quad (5)$$

Forbrugsstigningen er således som i (3) en vægtet sum af de to indkomststigninger, men i modsætning til (3) er vægtene i (B) variable, som afhænger af forbrugskvoten i den forudgående periode.

Både (3) og (5) kan estimeres med almindelig mindste kvadraters metode[2]. I begge estimationer undertrykkes konstantleddet i overensstemmelse med fremgangsmåden i SMEC II; de særlige problemer, som opstår ved denne såkaldte origo-regression, er omtalt i appendix 1. Parameteren a i (3) estimeres til 0,60, b i (5) til 0,64. Vægtningen med den reciprokke forbrugskvote i den sidstnævnte har minimal betydning; restvariationen, målt som kvadratsummen af residualerne, er knap 1/2 pct. mindre end i den simple forbrugsfunktion.

Estimeres den endnu simplere funktion:

$$\Delta C = \Delta Y + (1 - \alpha)\Delta Z \quad (6)$$

som er helt lineær i de variable, fås næsten samme resultat som ved estimation af (3); restvariationen i (7) er endda omkring 10 pct. mindre. Der er således ingen empirisk begrundelse for at anvende procentvise fremfor absolutte ændringer jfr. påvisningen i afsnit 2 af modellens næsten lineære karakter.

Det gælder for alle estimationer, at residualmønstret tyder på enten fejlspecifikation af relationens form, eller på udeladelse af væsentlige forklaringsfaktorer[3]. Dette er ikke overraskende, når de i indledningen af dette afsnit gjorte betragtninger om forbrugskvotens tidsprofil erindres.

I foranstående artikel af Rosted m.fl. (1974) foretrækkes version (A), hvor skattetrykket er udskilt som særlig forklaringsfaktor; der anvendes i denne version personlige indkomster som indkomstbegreb, mens der i (3), (5) og (6) anvendtes disponible indkomster. Omformuleres (A) til procentvise ændringer fås et uhyre kompliceret udtryk, som ikke er forsøgt estimeret. I stedet indføjes skattetrykket som særskilt forklaringsfaktor i (4):

$$C = A\,(X - S)^{\alpha}\, Z^{1-\alpha}\,(S/X)^{\beta} \quad (7)$$

2. Ved at anvende forskellen mellem forbrugsstigning og indkomststigning som afhængig og forskellen mellem faktisk og normal indkomststigning som uafhængig variabel sikres, at vægtene summer til én.
3. Fænomenet forekommer ligeledes, når version (B) estimeres med ændringen i forbrugskvoten som afhængig variabel, jfr. Rosted m.fl. (1974, figur 2). For begge relationer findes en positiv værdi for residualgennemsnittet på 0,4 pct. point, hvilket helt svarer til værdien af den undertrykte konstant. De positive residualer falder fortrinsvis i perioden 1966-72.

hvor X er realiseret, personlig indkomst og S samlede personskatter. De disponible indkomster, Y, i relationerne (3) - (6) er altså lig $X - S$. Det er muligt at fastlægge de grænser, indenfor hvilke parametrene α og β må ligge, for at forbruget falder, og forbrugskvoten stiger, når skatten stiger[4]. Omskrives (7) til procentvise ændringer, og estimeres relationen, fås en reduktion af restvariationen på en trediedel i forhold til (3), og residualsystematikken dæmpes.

Skattetrykket, som har et S-formet forløb i estimationsperioden, forbedrer således estimationsresultatet; dette forhold er dog ikke tilstrækkeligt til at bekræfte hypotesen om en skattetrykseffekt. Hypotesen må konfronteres med alternative hypoteser til forklaring af den langsigtede udvikling i den gennemsnitlige forbrugskvote i estimationsperioden. I perspektivplanredegørelsen nævnes flere mulige forklaringer, herunder effekten af forbrugsinvesteringer og generationsudskiftning. En række andre årsager såsom forskydninger i indkomstfordelingen og ændringer i inflationsforventningerne kan ligeledes komme på tale, og hypotesen om en særlig skattetrykseffekt bør afprøves overfor sådanne alternativer.

Den foretrukne version (A) er ligesom version (B) og de i denne artikel hidtil omtalte specifikationer formuleret i løbende priser. Dette er et helt specielt træk ved SMEC II og i klar modsætning til de fremhævede »hovedresultater, som forbrugsteorien og empirien har underbygget«. Som en konsekvens af denne specifikation fås, at forbrugerne skal reagere ens ved fastlæggelse af forbrugssummens andel af indkomsten uanset om indkomststigningerne er nominelle eller reelle. Denne særlige form for manglende »inflationsbevidsthed« er ikke gennemtestet af forfatterne. Her skal blot peges på de lettilgængelige muligheder, (4) giver for en opspaltning af den løbende indkomst i produktet af et prisindeks og et realindkomstudtryk, og dermed for en afprøvning af hypoteser om prisændringer kontra realindkomstændringer samt om priseffekten på kort og langt sigt. Estimeres en forbrugsfunktion analog med (3), men med de variable målt realt, fås en restvariation, der er 10 til 25 pct. mindre end i den tilsvarende relation i løbende priser[5]. Den manglende »inflationsbevisthed« må derfor betvivles både ud fra empiriske og teoretiske overvejelser.

---

4. Det er klart, at en skatteforøgelse bør give anledning til et fald i det absolutte forbrug. Dette er ensbetydende med, at $\delta C/\delta S < 0$ hvilket (7) opfylder for $\beta < \alpha[S/(X - S)]$. Det i SMEC opstillede krav, at øgede skatter skal hæve forbrugskvoten, giver betingelsen $\delta(C/Y)/\delta S > 0$, og dette er ensbetydende med at $\beta > [S/(X - S)](\alpha - 1)$. De faktisk estimerede værdier er $\alpha = 0{,}70$ og $\beta = 0{,}11$, hvilket klart opfylder begge krav.

5. De to værdier afhænger af om sammenligningen foretages for begge forbrugsestimater i løbende eller i faste priser.

4. Multiplikatorernes størrelse

De i artiklen gengivne multiplikatorer for forskellige modelversioner viser klart følsomheden overfor ændringer i specifikationen in casu forbrugsfunktionen. I dette tilfælde bliver navnlig momsmultiplikatoren følsom; størrelsen af denne parameter kan svinge mellem $-\frac{1}{2}$ og $-1\frac{1}{2}$, alene som følge af specifikationen, dertil kommer så spredningen på parameterskønnene. At flerårsmultiplikatorerne ligeledes er følsomme i relation til den dynamiske specifikation kan ikke undre. Det empiriske modelarbejde er her i landet af så ny dato, at det hverken er overraskende eller betænkeligt, at den kvantitative effekt af finanspolitiske instrumenter endnu ikke er klarlagt.

Betænkeligheder opstår imidlertid, når det ved præsentationen af multiplikatorerne for offentligheden ikke understreges, at de er behæftet med betydelig usikkerhed. Hertil kommer de indvendinger, som må rejses mod anvendelse af normerede multiplikatorer. Fremgangsmåden tjener til at etablere en tilsyneladende sammenlignelighed, men har det nogen dybere mening at sammenligne effekten af en milliard moms med en milliard ejendomsskatter? Hvis sigtet alene er pædagogisk, er det værd at bemærke den nærliggende fare for, at offentligheden opfatter instrumenter med store multiplikatorer som særlig anbefalelsesværdige.

Det fremgår, at de i SMEC projektet implicerede har visse a priori meninger om multiplikatorernes størrelse. Selv om anvendelse af a priori viden i almindelighed kan anbefales, må man spørge om den i det konkrete tilfælde har noget fundament og kan begrunde »dummyversionen«. Betragt en multiplikatorrelation:

$$Y = m_1 X + m_2 I \tag{8}$$

hvor Y er produktion, X eksport, I investeringer og m_1 og m_2 over tiden konstante multiplikatorer. Først opfattes de variable som opgjort i løbende priser, svarende til at modellens adfærdsrelationer er i løbende priser. Multiplikatoren m_1 angiver her virkningen på produktionen i løbende priser af eksporten i løbende priser; ved hjælp af prisindeks kan forholdet mellem de samme variable i faste priser beregnes, men denne størrelse vil variere gennem tiden med forskydninger i prisforholdet. Hvis de variable i (8) alternativt opfattes som reale størrelser svarende til en model med reale adfærdsrelationer, er forholdene de omvendte. De reale variable sammenknyttes af konstante multiplikatorer, de variable i løbende priser af tidsafhængige størrelser. I en blandet model, hvor visse adfærdsrelationer er i faste, andre i løbende priser vil forholdene sløres, idet visse af de tidsuafhængige multiplikatorer er mellem endogene i løbende

og eksogene i faste priser, andre mellem endogene og eksogene variable i faste priser. Hertil kommer, at multiplikatorernes størrelse afhænger af de enheder, som anvendes for variable. Ændres enhederne for X, eksempelvis således at værdierne halveres, bliver multiplikatoren m_1 fordoblet. Dette indebærer, at ved anvendelse af variable i faste priser bliver multiplikatorens størrelse afhængig af valget af basisår for prisindekset. I blandede modeller er a priori viden om multiplikatorernes størrelse af de nævnte grunde derfor yderst vage og bør næppe inddrages ved modelspecifikationen.

APPENDIX 1: *Regression uden konstantled*[1]

1. *Indledning*

I relationer, hvor de variable er målt som absolutte eller relative ændringer, vil et konstantled i en lineær relation være at fortolke som henholdsvis en lineær eller en eksponentiel trend. Ofte kan en sådan ses som et uønsket fremmedelement; er formålet eksempelvis at forklare væksten i den endogene variabel, har det ikke altid mening at lade en trend indgå i forklaringen. Det vil derfor i nogle tilfælde forekomme rimeligt at tvinge regressionsplanet gennem origo.

Beregningsmæssigt set er origoregression let at udføre, da næsten alle standardregressionsprogrammer overlader til brugerens afgørelse, om konstantleddet skal med. En analog anvendelse af de vante begreber fra almindelig regression er imidlertid problematisk, hvilket skal belyses i det følgende. Problemerne er især koncentreret om den multiple korrelationskoefficient R^2.

For nemheds skyld, og ikke mindst af hensyn til grafisk illustration, ses kun på tilfældet med én forklarende variabel; alle resultater generaliseres let til multipel regression, idet flertallet af ræsonnementer kun bygger på sammenhængen mellem den faktiske og beregnede værdi af den endogene variabel; her er det uden betydning, om der anvendes én eller flere forklarende variable.

2. *Origoregression og korrelationskoefficienter*

Ved origoregression har residualerne ikke samme pæne egenskaber som i almindelig regression, dels er ***deres middeltal ikke nul***, og dels er de normalt ***ikke uafhængige af den beregnede værdi af den endogene variabel***. Disse forhold fremgår umiddelbart af eksemplet vist på figur 2.

De nævnte forhold fjerner grundlaget for de sædvanlige tolkninger af korrelationskoefficienten R^2. Tolkningerne bygger på en kvadrering og summering af identiteten:

$$y_t \equiv \hat{y}_t + e_t \qquad (9)$$

1. Dette appendix er et resumé af Andersen og Kærgård (1974).

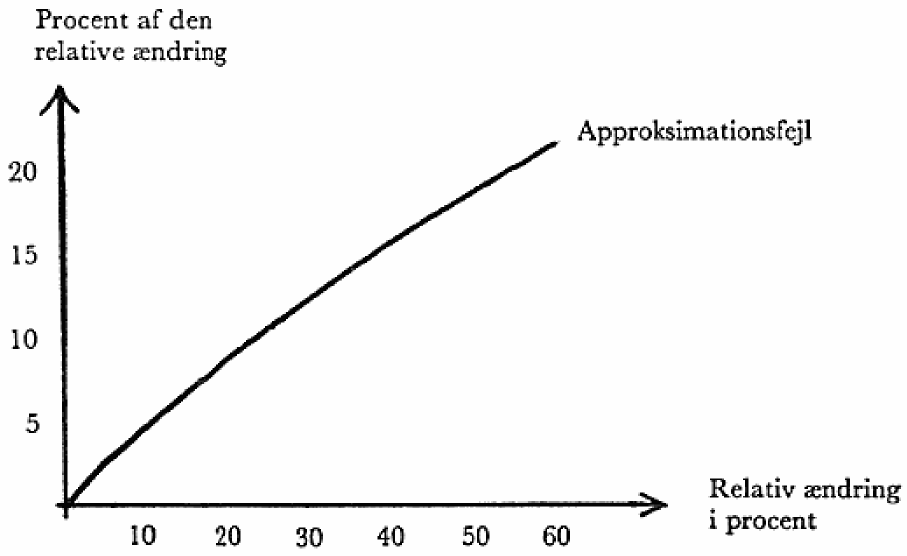

FIG. 3.

4. *Sammenfatning*

Sammenfattende må det siges, at relationer mellem variables vækstprocenter *ikke* medfører nogen direkte relation mellem de tilsvarende niveauvariable. Det er derfor kun rimeligt at specificere en model i vækstprocenter, hvis man tror, at adfærden bestemmes af disse og ikke af de variables absolutte størrelse.

Det ovenfor anførte må modificeres for multiplikative modeller, som kan lineariseres i vækstprocenter; men denne linearisering kan kun anbefales, når alle vækstprocenterne er små. For større vækstprocenter er approksimationen ikke god, og da en linearisering ved transformation til logaritmer eller absolutte ændringer i logaritmer ikke er vanskeligere at foretage, bør disse transformationer, som gælder eksakt, anvendes.

Litteratur

ABERT, J. G. 1969. *Economic Policy and Planning in the Netherlands 1950-1965.* New Haven, Conn.

ANDERSEN, E. og N. KÆRGÅRD. 1974. *Problemer ved regression gennem origo.* Københavns Universitets Økonomiske Instituts Cykelafdelings memoserie nr. 25. København.

Biomedical Computer Programs. 1971. Los Angeles. (Henvisninger gælder specielt BMDO2R).

ECON. 1970. University of Pennsylvania.

GROES, N. 1974. Kapitalberegningerne i PP-II. *Juristen og Økonomen.*

KÆRGÅRD. N. 1972. *Relationer estimeret i relative ændringer.* Københavns Universitets Økonomiske Instituts Cykelafdelings memoserie nr. 6. København.

ROSTED, J., A. SCHAUMANN og C. SØRENSEN. 1974. Finanseffekt og multiplikatorer i SMEC II. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 112: 267-97.

PP-II. Perspektivplan-redegørelse 1972-1987. København 1973.

Time Series Processor - Users Manual. 1971. Princeton University.

og eksogene i faste priser, andre mellem endogene og eksogene variable i faste priser. Hertil kommer, at multiplikatorernes størrelse afhænger af de enheder, som anvendes for variable. Ændres enhederne for X, eksempelvis således at værdierne halveres, bliver multiplikatoren m_1 fordoblet. Dette indebærer, at ved anvendelse af variable i faste priser bliver multiplikatorens størrelse afhængig af valget af basisår for prisindekset. I blandede modeller er a priori viden om multiplikatorernes størrelse af de nævnte grunde derfor yderst vage og bør næppe inddrages ved modelspecifikationen.

APPENDIX 1: *Regression uden konstantled*[1]

1. *Indledning*

I relationer, hvor de variable er målt som absolutte eller relative ændringer, vil et konstantled i en lineær relation være at fortolke som henholdsvis en lineær eller en eksponentiel trend. Ofte kan en sådan ses som et uønsket fremmedelement; er formålet eksempelvis at forklare væksten i den endogene variabel, har det ikke altid mening at lade en trend indgå i forklaringen. Det vil derfor i nogle tilfælde forekomme rimeligt at tvinge regressionsplanet gennem origo.

Beregningsmæssigt set er origoregression let at udføre, da næsten alle standardregressionsprogrammer overlader til brugerens afgørelse, om konstantleddet skal med. En analog anvendelse af de vante begreber fra almindelig regression er imidlertid problematisk, hvilket skal belyses i det følgende. Problemerne er især koncentreret om den multiple korrelationskoefficient R^2.

For nemheds skyld, og ikke mindst af hensyn til grafisk illustration, ses kun på tilfældet med én forklarende variabel; alle resultater generaliseres let til multipel regression, idet flertallet af ræsonnementer kun bygger på sammenhængen mellem den faktiske og beregnede værdi af den endogene variabel; her er det uden betydning, om der anvendes én eller flere forklarende variable.

2. *Origoregression og korrelationskoefficienter*

Ved origoregression har residualerne ikke samme pæne egenskaber som i almindelig regression, dels er *deres middeltal ikke nul*, og dels er de normalt *ikke uafhængige af den beregnede værdi af den endogene variabel*. Disse forhold fremgår umiddelbart af eksemplet vist på figur 2.

De nævnte forhold fjerner grundlaget for de sædvanlige tolkninger af korrelationskoefficienten R^2. Tolkningerne bygger på en kvadrering og summering af identiteten:

$$y_t \equiv \hat{y}_t + e_t \tag{9}$$

1. Dette appendix er et resumé af Andersen og Kærgård (1974).

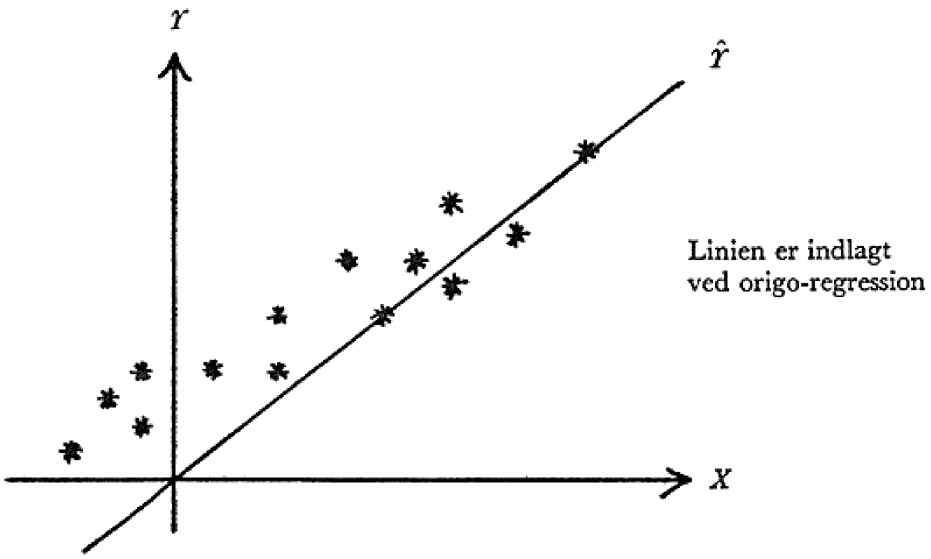

FIG. 2.

hvor små bogstaver angiver centrerede variable:

$$\Sigma y^2 \equiv \Sigma \hat{y}_i^2 + \Sigma e_i^2 + 2\Sigma \hat{y}_i e_i \tag{10}$$

I almindelig regression, hvor beregnede værdier og residualer er ukorrelerede, er sidste led på højre side nul, således at den samlede variation er summen af den forklarede variation og den uforklarede variation. I origoregression er sidste led ikke nul, men kan være ubegrænset stor eller lille. Derfor gælder for origoregression:

$$\Sigma \hat{y}_i^2/\Sigma y_i^2 \neq 1 - \Sigma e_i^2/\Sigma y_i^2 \tag{11}$$

I øvrigt kan leddet på venstre side blive større end én, leddet på højre side kan til gengæld blive negativt; det vil sige, man kan få negative værdier eller værdier over én for korrelationskoefficienten efter hvilken formel, der anvendes.

Spørgsmålet er nu, om den simple korrelationskoefficient mellem faktisk og beregnet værdi i stedet kan anvendes som mål for godheden af origoregressionen. Svaret herpå er ubetinget nej. Den simple korrelationskoefficient måler nemlig kun i hvilken grad, de variable ligger på en ret linie, mens der ønskes et mål for, i hvilken grad de variable er sammenfaldende[2]. Da de fra origoregression beregnede y-værdier kan føres over i de fra almindelig regression beregnede ved en lineær transformation, er begge sæt lige lineært forbundne med de observerede værdier, og korrelationskoefficienten er derfor den samme i almindelig og origoregression. Som selvstændigt mål for kvaliteten af origoregression i relation til almindelig regression duer den simple korrelationskoefficient derfor ikke.

2. Dette problem findes ikke i almindelig regression. Når residualerne har middeltallet nul og er ukorrelerede med de beregnede værdier, er den bedste lineære sammenhæng mellem faktiske og beregnede værdier 45°-linien.

3. *Konklusion*

Sammenfattende må det slås fast, at de sædvanlige udtryk for den multiple korrelationskoefficient ikke er brugbare, når relationen tvinges gennem origo. Faren for fejltagelser er nærliggende, da en del af standardregressionsprogrammerne udskriver udtryk for korrelationskoefficienten, eksempelvis TSP og ECON; i TSP manualen findes dog en advarsel: »R^2 . . . not applicable if the constant is suppressed«.

Alternativt kan (som f. eks. i BMD-programmerne) anvendes korrelationsudtryk i de ikke-centrerede variable. Anvendes disse er kvadratsummen af de beregnede endogene variable og af residualerne tilsammen lig den faktiske endogenes kvadratsum, og det gælder både ved almindelig og ved origo-regression. Problemet med disse udtryk er imidlertid, at de ikke er sammenlignelige med de sædvanlige udtryk for den multiple korrelationskoefficient, og at de kun, når det a priori vides, at relationen går gennem origo, giver noget indtryk af, hvor godt relationen er bestemt.

APPENDIX 2: *Relationer i relative ændringer*[1]

1. *Indledning*

En række af de nyeste økonometriske undersøgelser i Danmark er estimeret på relationer mellem variable målt som vækstprocenter. Dette gælder en del af relationerne i SMEC II, og også produktionsfunktionen i PPII, jfr. Groes (1974). Der kan derfor være grund til at se nærmere på, hvad en sådan specifikation indebærer.

Når en relation $y = f(x)$ skal estimeres, kan flere hensyn komme på tale ved specifikationen. Det afgørende må naturligvis være, hvilken sammenhæng man faktisk tror eksisterer; men denne vil ofte kunne skrives på flere identiske former, hvorved der bliver plads for hensyntagen til det statistisk hensigtsmæssige (linearitet i parametrene, passende stor variation af de uafhængige variable o.s.v.)[2], f. eks. kan en lineær relation skrives både som

$$y = a + b\,x \tag{12}$$

og som

$$\Delta y = b\,\Delta x \tag{13}$$

medens tilsvarende

$$y = a\,x^b \tag{14}$$

1. Dette appendix er en udbygning af Kærgård (1972).
2. Blandt de hensyn, der kan komme på tale, er også det stokastiske leds egenskaber. Er der f. eks. positiv autokorrelation i (12), kan estimation på (13) løse dette problem, men er der ingen autokorrelation i (12), vil der være en negativ i (13).

Det stokastiske led skal imidlertid ikke diskuteres i det følgende, idet synspunktet er, at det stokastiske led i den umiddelbare sammenhæng har simple egenskaber. Spidsfindige transformationer giver derfor stokastiske led med mere komplicerede egenskaber.

og eksogene i faste priser, andre mellem endogene og eksogene variable i faste priser. Hertil kommer, at multiplikatorernes størrelse afhænger af de enheder, som anvendes for variable. Ændres enhederne for X, eksempelvis således at værdierne halveres, bliver multiplikatoren m_1 fordoblet. Dette indebærer, at ved anvendelse af variable i faste priser bliver multiplikatorens størrelse afhængig af valget af basisår for prisindekset. I blandede modeller er a priori viden om multiplikatorernes størrelse af de nævnte grunde derfor yderst vage og bør næppe inddrages ved modelspecifikationen.

APPENDIX 1: *Regression uden konstantled*[1]

1. *Indledning*

I relationer, hvor de variable er målt som absolutte eller relative ændringer, vil et konstantled i en lineær relation være at fortolke som henholdsvis en lineær eller en eksponentiel trend. Ofte kan en sådan ses som et uønsket fremmedelement; er formålet eksempelvis at forklare væksten i den endogene variabel, har det ikke altid mening at lade en trend indgå i forklaringen. Det vil derfor i nogle tilfælde forekomme rimeligt at tvinge regressionsplanet gennem origo.

Beregningsmæssigt set er origoregression let at udføre, da næsten alle standardregressionsprogrammer overlader til brugerens afgørelse, om konstantleddet skal med. En analog anvendelse af de vante begreber fra almindelig regression er imidlertid problematisk, hvilket skal belyses i det følgende. Problemerne er især koncentreret om den multiple korrelationskoefficient R^2.

For nemheds skyld, og ikke mindst af hensyn til grafisk illustration, ses kun på tilfældet med én forklarende variabel; alle resultater generaliseres let til multipel regression, idet flertallet af ræsonnementer kun bygger på sammenhængen mellem den faktiske og beregnede værdi af den endogene variabel; her er det uden betydning, om der anvendes én eller flere forklarende variable.

2. *Origoregression og korrelationskoefficienter*

Ved origoregression har residualerne ikke samme pæne egenskaber som i almindelig regression, dels er ***deres middeltal ikke nul***, og dels er de normalt ***ikke uafhængige af den beregnede værdi af den endogene variabel.*** Disse forhold fremgår umiddelbart af eksemplet vist på figur 2.

De nævnte forhold fjerner grundlaget for de sædvanlige tolkninger af korrelationskoefficienten R^2. Tolkningerne bygger på en kvadrering og summering af identiteten:

$$y_t \equiv \hat{y}_t + e_t \tag{9}$$

1. Dette appendix er et resumé af Andersen og Kærgård (1974).

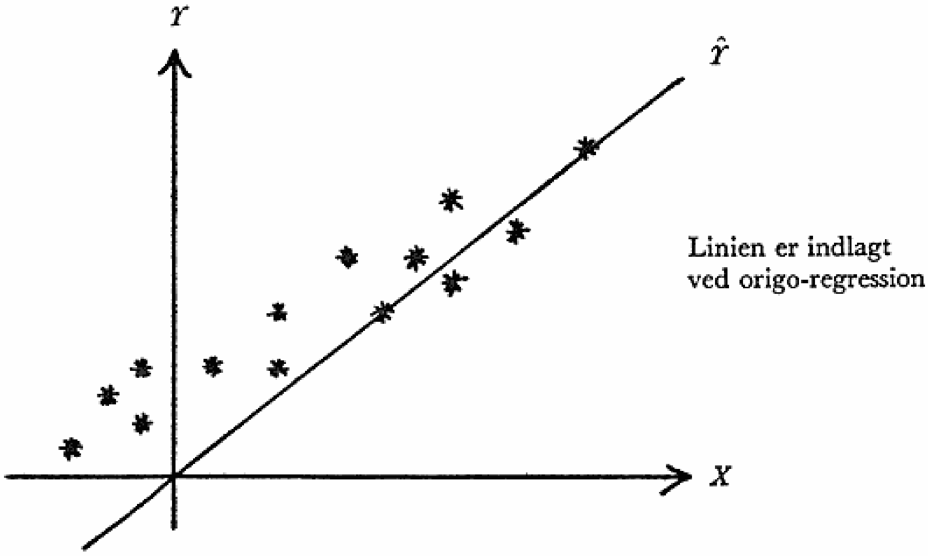

FIG. 2.

hvor små bogstaver angiver centrerede variable:

$$\Sigma y^2 \equiv \Sigma \hat{y}_i^2 + \Sigma e_i^2 + 2 \Sigma \hat{y}_i e_i \tag{10}$$

I almindelig regression, hvor beregnede værdier og residualer er ukorrelerede, er sidste led på højre side nul, således at den samlede variation er summen af den forklarede variation og den uforklarede variation. I origoregression er sidste led ikke nul, men kan være ubegrænset stor eller lille. Derfor gælder for origoregression:

$$\Sigma \hat{y}_i^2 / \Sigma y_i^2 \neq 1 - \Sigma e_i^2 / \Sigma y_i^2 \tag{11}$$

I øvrigt kan leddet på venstre side blive større end én, leddet på højre side kan til gengæld blive negativt; det vil sige, man kan få negative værdier eller værdier over én for korrelationskoefficienten efter hvilken formel, der anvendes.

Spørgsmålet er nu, om den simple korrelationskoefficient mellem faktisk og beregnet værdi i stedet kan anvendes som mål for godheden af origoregressionen. Svaret herpå er ubetinget nej. Den simple korrelationskoefficient måler nemlig kun i hvilken grad, de variable ligger på en ret linie, mens der ønskes et mål for, i hvilken grad de variable er sammenfaldende[2]. Da de fra origoregression beregnede *y*-værdier kan føres over i de fra almindelig regression beregnede ved en lineær transformation, er begge sæt lige lineært forbundne med de observerede værdier, og korrelationskoefficienten er derfor den samme i almindelig og origoregression. Som selvstændigt mål for kvaliteten af origoregression i relation til almindelig regression duer den simple korrelationskoefficient derfor ikke.

2. Dette problem findes ikke i almindelig regression. Når residualerne har middeltallet nul og er ukorrelerede med de beregnede værdier, er den bedste lineære sammenhæng mellem faktiske og beregnede værdier 45°-linien.

3. *Konklusion*

Sammenfattende må det slås fast, at de sædvanlige udtryk for den multiple korrelationskoefficient ikke er brugbare, når relationen tvinges gennem origo. Faren for fejltagelser er nærliggende, da en del af standardregressionsprogrammerne udskriver udtryk for korrelationskoefficienten, eksempelvis TSP og ECON; i TSP manualen findes dog en advarsel: »R^2 . . . not applicable if the constant is suppressed«.

Alternativt kan (som f.eks. i BMD-programmerne) anvendes korrelationsudtryk i de ikke-centrerede variable. Anvendes disse er kvadratsummen af de beregnede endogene variable og af residualerne tilsammen lig den faktiske endogenes kvadratsum, og det gælder både ved almindelig og ved origo-regression. Problemet med disse udtryk er imidlertid, at de ikke er sammenlignelige med de sædvanlige udtryk for den multiple korrelationskoefficient, og at de kun, når det a priori vides, at relationen går gennem origo, giver noget indtryk af, hvor godt relationen er bestemt.

APPENDIX 2: *Relationer i relative ændringer*[1]

1. *Indledning*

En række af de nyeste økonometriske undersøgelser i Danmark er estimeret på relationer mellem variable målt som vækstprocenter. Dette gælder en del af relationerne i SMEC II, og også produktionsfunktionen i PPII, jfr. Groes (1974). Der kan derfor være grund til at se nærmere på, hvad en sådan specifikation indebærer.

Når en relation $y = f(x)$ skal estimeres, kan flere hensyn komme på tale ved specifikationen. Det afgørende må naturligvis være, hvilken sammenhæng man faktisk tror eksisterer; men denne vil ofte kunne skrives på flere identiske former, hvorved der bliver plads for hensyntagen til det statistisk hensigtsmæssige (linearitet i parametrene, passende stor variation af de uafhængige variable o.s.v.)[2], f. eks. kan en lineær relation skrives både som

$$y = a + b\,x \tag{12}$$

og som

$$\Delta y = b\,\Delta x \tag{13}$$

medens tilsvarende

$$y = a\,x^b \tag{14}$$

1. Dette appendix er en udbygning af Kærgård (1972).

2. Blandt de hensyn, der kan komme på tale, er også det stokastiske leds egenskaber. Er der f. eks. positiv autokorrelation i (12), kan estimation på (13) løse dette problem, men er der ingen autokorrelation i (12), vil der være en negativ i (13).

Det stokastiske led skal imidlertid ikke diskuteres i det følgende, idet synspunktet er, at det stokastiske led i den umiddelbare sammenhæng har simple egenskaber. Spidsfindige transformationer giver derfor stokastiske led med mere komplicerede egenskaber.

er identisk med

$$\log y = c + b \log x \tag{15}$$

Det første problem er nu, om valget af relative ændringer i relationen

$$\Delta y/y = a + b\,\Delta x/x \tag{16}$$

er et statistisk begrundet valg, således at der til (16) svarer en simpel relation mellem x og y, eller en sådan relation ikke eksisterer.

I grænsen - når Δ'erne ikke er ændringer pr. tidsenhed, men ændringen i det uendeligt lille interval dt - erstattes Δy med dy/dt og Δx med dx/dt, hvorved der fås en differentialligning med løsningen

$$y = A\,e^{at}\,x^b \tag{17}$$

Det andet problem er da, hvor god en approksimation (16) er til relationer som (17), når tidsintervallerne ikke er uendelig små; eksempelvis fremkommer Groes's relation på denne måde ved en linearisering af en Cobb-Douglas-funktion, som estimeres på årstal.

2. *Relationen mellem niveauvariable svarende til en lineær relation i vækstprocenter*

Den oprindelige ligning (16) kan omskrives til relationen

$$y_t = y_{t-1}(B + b\,x_t/x_{t-1}) \tag{18}$$

hvor $B = a + 1 - b$. Et udtryk for løsningen til denne differensligning kan findes ved iteration ud fra en initialværdi y_0 og x'erne. Der fås da:

$$\begin{aligned}
&y_0\\
&y_1 = y_0(B + b\,x_1/x_0)\\
&y_2 = y_0(B + b\,x_1/x_0)\,(B + b\,x_2/x_1)\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&y_t = y_0(B + b\,x_1/x_0)\ \ldots\ (B + b\,x_t/x_{t-1})
\end{aligned} \tag{19}$$

Differentieres denne relation med hensyn til x_i, $0 < i < t$, fås et udtryk, der kan omskrives til

$$\frac{\delta y_t}{\delta x_i} = Bb\frac{y_{t+1}}{y_{t-1}}\,(1/x_{i-1} - x_{i+1}/x_i^2) \tag{20}$$

der kun er identisk nul for enten B eller b lig med nul[3]. Det vil sige, at i alle andre tilfælde

3. Hvilket svarer til, at der i disse tilfælde findes en simpel relation mellem y_t, x_t og t. For $b = 0$ får (16) form af differensligningen $\Delta y/y = a$, der har løsningen $y_t = y_0(1 + a)^t$, og $B = 0$ svarer til $y_t/y_{t-1} = bx_t/x_{t-1}$, der har løsningen $y_t = C\,b^t x_t$.

er y_t en funktion af x_i, og det er altså ikke muligt at reducere x_i'erne væk for nogle i'er. Der findes således ikke nogen til (16) svarende enkel relation mellem de variable i niveau. Gælder (16) indicerer det, at y_t er påvirket af *samtlige* historiske x'er.

3. *Relationer i vækstprocenter som linearisering*

Betragtes en funktion

$$y_t = a\, x_t^b\, z_t^c\, e^{dt} \tag{21}$$

kan logaritmen tages, og relationen for periode $t - 1$ kan subtraheres fra den for periode t[4]. Derved fås relationen:

$$\Delta \log y_t = b\, \Delta \log x_t + c\, \Delta \log z_t + d \tag{22}$$

der altså er en eksakt omskrivning af (21).

For enhver variabel v gælder nu, at

$$v_t = v_{t-1} + \Delta v_t = v_{t-1}(1 + \Delta v_t/v_{t-1}) \tag{23}$$

eller i logaritmer:

$$\log v_t = \log v_{t-1} + \log (1 + \Delta v_t/v_{t-1}) \tag{24}$$

således at

$$\Delta \log v_t = \log (1 + \Delta v_t/v_{t-1}) \tag{25}$$

Logaritmefunktionen kan rækkeudvikles ved formlen

$$\log (1 + \alpha) = \alpha - 1/2\, \alpha^2 + 1/3\, \alpha^3 - 1/4\, \alpha^4 \ldots \tag{26}$$

Anvendes denne udvikling af $\log (1 + \Delta v_t/v_{t-1})$, og bortkastes alle led i rækkeudviklingen bortset fra det første, fås

$$\Delta \log v_t = \Delta v_t/v_{t-1} \tag{27}$$

og ved indsættelse i (22):

$$\Delta y/y = b\, \Delta x/x + c\, \Delta z/z + d \tag{28}$$

(21) er nu omskrevet til en lineær relation i vækstprocenter. Det ses som specialtilfælde for $d = 0$, $b = 1$ og $c = \pm 1$ at gælde, at et produkt kan lineariseres som summen af faktorernes vækstprocenter og en kvotient som differensen mellem tæller og nævners vækstprocent.

Approksimationens godhed kan vurderes ved størrelsen af det bortkastede, der er lig $\log (1 + \Delta v_t/v_{t-1}) - \Delta v_t/v_{t-1}$. I figur 3 er denne approksimationsresidual vist som procent af $\Delta v_t/v_{t-1}$. Der ses for små vækstprocenter at være en meget nøje overensstemmelse, medens approksimationen er tvivlsom for større værdier.

4. De følgende omskrivninger er til en vis grad hentet fra Abert (1969).

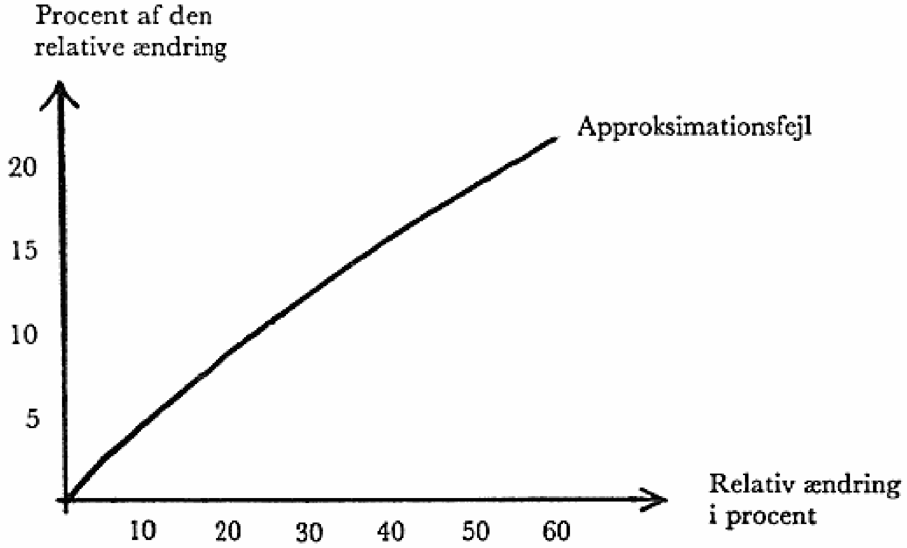

FIG. 3.

4. *Sammenfatning*

Sammenfattende må det siges, at relationer mellem variables vækstprocenter *ikke* medfører nogen direkte relation mellem de tilsvarende niveauvariable. Det er derfor kun rimeligt at specificere en model i vækstprocenter, hvis man tror, at adfærden bestemmes af disse og ikke af de variables absolutte størrelse.

Det ovenfor anførte må modificeres for multiplikative modeller, som kan lineariseres i vækstprocenter; men denne linearisering kan kun anbefales, når alle vækstprocenterne er små. For større vækstprocenter er approksimationen ikke god, og da en linearisering ved transformation til logaritmer eller absolutte ændringer i logaritmer ikke er vanskeligere at foretage, bør disse transformationer, som gælder eksakt, anvendes.

Litteratur

ABERT, J. G. 1969. *Economic Policy and Planning in the Netherlands 1950-1965.* New Haven, Conn.

ANDERSEN, E. og N. KÆRGÅRD. 1974. *Problemer ved regression gennem origo.* Københavns Universitets Økonomiske Instituts Cykelafdelings memoserie nr. 25. København.

Biomedical Computer Programs. 1971. Los Angeles. (Henvisninger gælder specielt BMDO2R).

ECON. 1970. University of Pennsylvania.

GROES, N. 1974. Kapitalberegningerne i PP-II. *Juristen og Økonomen.*

KÆRGÅRD. N. 1972. *Relationer estimeret i relative ændringer.* Københavns Universitets Økonomiske Instituts Cykelafdelings memoserie nr. 6. København.

ROSTED, J., A. SCHAUMANN og C. SØRENSEN. 1974. Finanseffekt og multiplikatorer i SMEC II. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 112: 267-97.

PP-II. Perspektivplan-redegørelse 1972-1987. København 1973.

Time Series Processor - Users Manual. 1971. Princeton University.

3. *Konklusion*

Sammenfattende må det slås fast, at de sædvanlige udtryk for den multiple korrelationskoefficient ikke er brugbare, når relationen tvinges gennem origo. Faren for fejltagelser er nærliggende, da en del af standardregressionsprogrammerne udskriver udtryk for korrelationskoefficienten, eksempelvis TSP og ECON; i TSP manualen findes dog en advarsel: »R^2 . . . not applicable if the constant is suppressed«.

Alternativt kan (som f. eks. i BMD-programmerne) anvendes korrelationsudtryk i de ikke-centrerede variable. Anvendes disse er kvadratsummen af de beregnede endogene variable og af residualerne tilsammen lig den faktiske endogenes kvadratsum, og det gælder både ved almindelig og ved origo-regression. Problemet med disse udtryk er imidlertid, at de ikke er sammenlignelige med de sædvanlige udtryk for den multiple korrelationskoefficient, og at de kun, når det a priori vides, at relationen går gennem origo, giver noget indtryk af, hvor godt relationen er bestemt.

APPENDIX 2: *Relationer i relative ændringer*[1]

1. *Indledning*

En række af de nyeste økonometriske undersøgelser i Danmark er estimeret på relationer mellem variable målt som vækstprocenter. Dette gælder en del af relationerne i SMEC II, og også produktionsfunktionen i PPII, jfr. Groes (1974). Der kan derfor være grund til at se nærmere på, hvad en sådan specifikation indebærer.

Når en relation $y = f(x)$ skal estimeres, kan flere hensyn komme på tale ved specifikationen. Det afgørende må naturligvis være, hvilken sammenhæng man faktisk tror eksisterer; men denne vil ofte kunne skrives på flere identiske former, hvorved der bliver plads for hensyntagen til det statistisk hensigtsmæssige (linearitet i parametrene, passende stor variation af de uafhængige variable o.s.v.)[2], f. eks. kan en lineær relation skrives både som

$$y = a + b\,x \tag{12}$$

og som

$$\Delta y = b\,\Delta x \tag{13}$$

medens tilsvarende

$$y = a\,x^b \tag{14}$$

1. Dette appendix er en udbygning af Kærgård (1972).

2. Blandt de hensyn, der kan komme på tale, er også det stokastiske leds egenskaber. Er der f. eks. positiv autokorrelation i (12), kan estimation på (13) løse dette problem, men er der ingen autokorrelation i (12), vil der være en negativ i (13).

Det stokastiske led skal imidlertid ikke diskuteres i det følgende, idet synspunktet er, at det stokastiske led i den umiddelbare sammenhæng har simple egenskaber. Spidsfindige transformationer giver derfor stokastiske led med mere komplicerede egenskaber.

er identisk med

$$\log y = c + b \log x \tag{15}$$

Det første problem er nu, om valget af relative ændringer i relationen

$$\Delta y/y = a + b\, \Delta x/x \tag{16}$$

er et statistisk begrundet valg, således at der til (16) svarer en simpel relation mellem x og y, eller en sådan relation ikke eksisterer.

I grænsen - når Δ'erne ikke er ændringer pr. tidsenhed, men ændringen i det uendeligt lille interval dt - erstattes Δy med dy/dt og Δx med dx/dt, hvorved der fås en differentialligning med løsningen

$$y = A\, e^{at}\, x^{b} \tag{17}$$

Det andet problem er da, hvor god en approksimation (16) er til relationer som (17), når tidsintervallerne ikke er uendelig små; eksempelvis fremkommer Groes's relation på denne måde ved en linearisering af en Cobb-Douglas-funktion, som estimeres på årstal.

2. *Relationen mellem niveauvariable svarende til en lineær relation i vækstprocenter*

Den oprindelige ligning (16) kan omskrives til relationen

$$y_t = y_{t-1}(B + b\, x_t/x_{t-1}) \tag{18}$$

hvor $B = a + 1 - b$. Et udtryk for løsningen til denne differensligning kan findes ved iteration ud fra en initialværdi y_0 og x'erne. Der fås da:

$$\begin{aligned} &y_0 \\ &y_1 = y_0(B + b\, x_1/x_0) \\ &y_2 = y_0(B + b\, x_1/x_0)\,(B + b\, x_2/x_1) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &y_t = y_0(B + b\, x_1/x_0)\ \ldots\ (B + b\, x_t/x_{t-1}) \end{aligned} \tag{19}$$

Differentieres denne relation med hensyn til x_i, $0 < i < t$, fås et udtryk, der kan omskrives til

$$\frac{\delta y_t}{\delta x_i} = Bb\frac{y_{t+1}}{y_{t-1}}\,(1/x_{i-1} - x_{i+1}/x_i^2) \tag{20}$$

der kun er identisk nul for enten B eller b lig med nul[3]. Det vil sige, at i alle andre tilfælde

3. Hvilket svarer til, at der i disse tilfælde findes en simpel relation mellem y_t, x_t og t. For $b = 0$ får (16) form af differensligningen $\Delta y/y = a$, der har løsningen $y_t = y_0(1 + a)^t$, og $B = 0$ svarer til $y_t/y_{t-1} = bx_t/x_{t-1}$, der har løsningen $y_t = C\, b^t x_t$.

er y_t en funktion af x_i, og det er altså ikke muligt at reducere x_i'erne væk for nogle i'er. Der findes således ikke nogen til (16) svarende enkel relation mellem de variable i niveau. Gælder (16) indicerer det, at y_t er påvirket af *samtlige* historiske x'er.

3. *Relationer i vækstprocenter som linearisering*

Betragtes en funktion

$$y_t = a\, x_t^b\, z_t^c\, e^{dt} \tag{21}$$

kan logaritmen tages, og relationen for periode $t - 1$ kan subtraheres fra den for periode t [4]. Derved fås relationen:

$$\Delta \log y_t = b\,\Delta \log x_t + c\,\Delta \log z_t + d \tag{22}$$

der altså er en eksakt omskrivning af (21).

For enhver variabel v gælder nu, at

$$v_t = v_{t-1} + \Delta v_t = v_{t-1}(1 + \Delta v_t/v_{t-1}) \tag{23}$$

eller i logaritmer:

$$\log v_t = \log v_{t-1} + \log (1 + \Delta v_t/v_{t-1}) \tag{24}$$

således at

$$\Delta \log v_t = \log (1 + \Delta v_t/v_{t-1}) \tag{25}$$

Logaritmefunktionen kan rækkeudvikles ved formlen

$$\log (1 + \alpha) = \alpha - 1/2\,\alpha^2 + 1/3\,\alpha^3 - 1/4\,\alpha^4 \ldots \tag{26}$$

Anvendes denne udvikling af $\log (1 + \Delta v_t/v_{t-1})$, og bortkastes alle led i rækkeudviklingen bortset fra det første, fås

$$\Delta \log v_t = \Delta v_t/v_{t-1} \tag{27}$$

og ved indsættelse i (22):

$$\Delta y/y = b\,\Delta x/x + c\,\Delta z/z + d \tag{28}$$

(21) er nu omskrevet til en lineær relation i vækstprocenter. Det ses som specialtilfælde for $d = 0$, $b = 1$ og $c = \pm 1$ at gælde, at et produkt kan lineariseres som summen af faktorernes vækstprocenter og en kvotient som differensen mellem tæller og nævners vækstprocent.

Approksimationens godhed kan vurderes ved størrelsen af det bortkastede, der er lig $\log (1 + \Delta v_t/v_{t-1}) - \Delta v_t/v_{t-1}$. I figur 3 er denne approksimationsresidual vist som procent af $\Delta v_t/v_{t-1}$. Der ses for små vækstprocenter at være en meget nøje overensstemmelse, medens approksimationen er tvivlsom for større værdier.

4. De følgende omskrivninger er til en vis grad hentet fra Abert (1969).

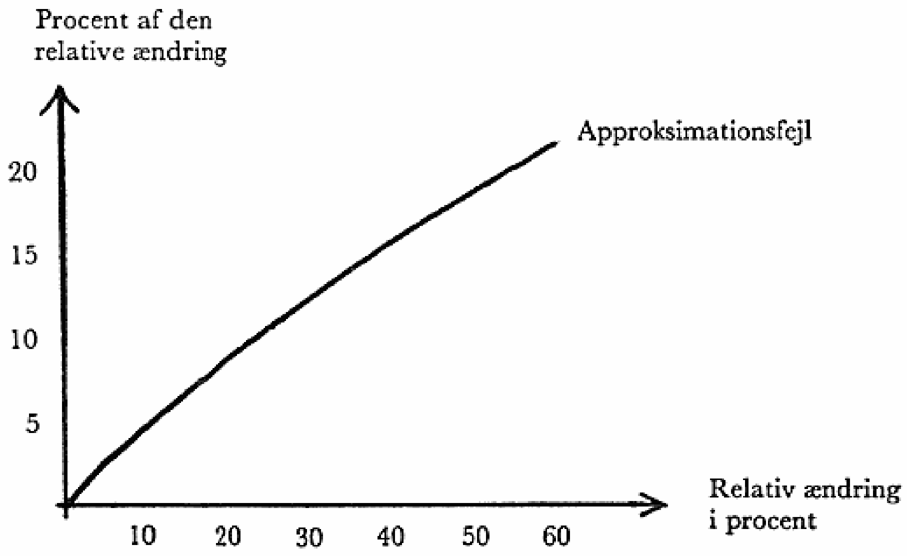

FIG. 3.

4. *Sammenfatning*

Sammenfattende må det siges, at relationer mellem variables vækstprocenter *ikke* medfører nogen direkte relation mellem de tilsvarende niveauvariable. Det er derfor kun rimeligt at specificere en model i vækstprocenter, hvis man tror, at adfærden bestemmes af disse og ikke af de variables absolutte størrelse.

Det ovenfor anførte må modificeres for multiplikative modeller, som kan lineariseres i vækstprocenter; men denne linearisering kan kun anbefales, når alle vækstprocenterne er små. For større vækstprocenter er approksimationen ikke god, og da en linearisering ved transformation til logaritmer eller absolutte ændringer i logaritmer ikke er vanskeligere at foretage, bør disse transformationer, som gælder eksakt, anvendes.

Litteratur

ABERT, J. G. 1969. *Economic Policy and Planning in the Netherlands 1950-1965.* New Haven, Conn.

ANDERSEN, E. og N. KÆRGÅRD. 1974. *Problemer ved regression gennem origo.* Københavns Universitets Økonomiske Instituts Cykelafdelings memoserie nr. 25. København.

Biomedical Computer Programs. 1971. Los Angeles. (Henvisninger gælder specielt BMDO2R).

ECON. 1970. University of Pennsylvania.

GROES, N. 1974. Kapitalberegningerne i PP-II. *Juristen og Økonomen.*

KÆRGÅRD. N. 1972. *Relationer estimeret i relative ændringer.* Københavns Universitets Økonomiske Instituts Cykelafdelings memoserie nr. 6. København.

ROSTED, J., A. SCHAUMANN og C. SØRENSEN. 1974. Finanseffekt og multiplikatorer i SMEC II. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 112: 267-97.

PP-II. Perspektivplan-redegørelse 1972-1987. København 1973.

Time Series Processor - Users Manual. 1971. Princeton University.