OBJEKTIVITET I SAMFUNDSVIDENSKABERNE ET METODEPROBLEM

Af G. RASCH *

1. *Nødvendigheden af at relationer er generelle.* Om det lykkes at løse en konkret opgave, hvori der indgår samspil mellem økonomiske, demografiske, sociologiske og/eller andre variable, afhænger selvsagt af om de relationer, man mener at kunne disponere efter, nu også passer og er fyldestgørende under de forhold opgaven angiver.

Relationerne kan være udledt gennem rent teoretiske ræsonnementer eller helt eller delvist være fastlagt på grundlag af empiriske data. Men skal man frit kunne anvende dem, må man sikre sig, at de gælder tilstrækkelig generelt.

Der er visselig grund til at beundre f. eks. opsendelsen af raketter til månen, men baggrunden for at det lykkes er, at projekterne gennemtænkes og -arbejdes uhyre nøje i alle detaljer under udnyttelse af en række fysiske love i statiken, dynamiken, elektroniken, etc.: Konstruktørerne forlader sig på, at *de basale love gælder hvor som helst og når som helst indenfor deres arbejdsområde*, ellers kunne de ikke bygge eller konstruere noget som helst uden at risikere det værste.

Og skulle det værste alligevel ske – og ske gør det jo af og til – så taler man om, at »der er begået en teknisk fejl«, hvilket vil sige, at man ikke fuldt ud har respekteret de fysiske love, konstruktionen skulle baseres på, hvad enten det skyldes uforsigtighed eller manglende viden, eventuelt langt tilbage i et hjørne af fysiken, der ikke var helt tilstrækkeligt udforsket.

Hvis ligefrem foreliggende iagttagelser skal kunne anvendes, det være sig til indbygning i teoriens videreudvikling eller direkte i praksis, så er det altså ikke tilstrækkeligt, at de relationer, der uddrages af dem, giver en ad hoc beskrivelse, hvor god den så end er, af netop det foreliggende materiale – at den kun kan garanteres at gælde »her og nu« – *de udledte relationer må være generelle.*

2. *Begrundelse af en fysisk lov: Ufuldstændig induktion og cirkelslutning?* Men kan noget sådant overhovedet lade sig gøre?! Man kan jo aldrig råde

* Professor ved Københavns Universitet. Afskedsforelæsning den 9. marts 1972.

OBJEKTIVITET I SAMFUNDSVIDENSKABERNE ET METODEPROBLEM

Af G. RASCH *

1. *Nødvendigheden af at relationer er generelle.* Om det lykkes at løse en konkret opgave, hvori der indgår samspil mellem økonomiske, demografiske, sociologiske og/eller andre variable, afhænger selvsagt af om de relationer, man mener at kunne disponere efter, nu også passer og er fyldestgørende under de forhold opgaven angiver.

Relationerne kan være udledt gennem rent teoretiske ræsonnementer eller helt eller delvist være fastlagt på grundlag af empiriske data. Men skal man frit kunne anvende dem, må man sikre sig, at de gælder tilstrækkelig generelt.

Der er visselig grund til at beundre f. eks. opsendelsen af raketter til månen, men baggrunden for at det lykkes er, at projekterne gennemtænkes og -arbejdes uhyre nøje i alle detaljer under udnyttelse af en række fysiske love i statiken, dynamiken, elektroniken, etc.: Konstruktørerne forlader sig på, at *de basale love gælder hvor som helst og når som helst indenfor deres arbejdsområde*, ellers kunne de ikke bygge eller konstruere noget som helst uden at risikere det værste.

Og skulle det værste alligevel ske – og ske gør det jo af og til – så taler man om, at »der er begået en teknisk fejl«, hvilket vil sige, at man ikke fuldt ud har respekteret de fysiske love, konstruktionen skulle baseres på, hvad enten det skyldes uforsigtighed eller manglende viden, eventuelt langt tilbage i et hjørne af fysiken, der ikke var helt tilstrækkeligt udforsket.

Hvis ligefrem foreliggende iagttagelser skal kunne anvendes, det være sig til indbygning i teoriens videreudvikling eller direkte i praksis, så er det altså ikke tilstrækkeligt, at de relationer, der uddrages af dem, giver en ad hoc beskrivelse, hvor god den så end er, af netop det foreliggende materiale – at den kun kan garanteres at gælde »her og nu« – *de udledte relationer må være generelle.*

2. *Begrundelse af en fysisk lov: Ufuldstændig induktion og cirkelslutning?* Men kan noget sådant overhovedet lade sig gøre?! Man kan jo aldrig råde

* Professor ved Københavns Universitet. Afskedsforelæsning den 9. marts 1972.

over mere end et endeligt antal observationer, og her forlanges, at der deraf skulle kunne udledes noget alment!

Nej, selvfølgelig kan *det* ikke lade sig gøre – det ville være et rent formelt idealkrav. Men lad os se, hvor langt man kan komme, idet vi til den ende underkaster en af de simpleste fysiske love en omhyggelig analyse for at afdække, hvorledes den principielt set kunne begrundes.

Opstillingen af ligningerne for hvordan faste legemer bevæger sig beror bl.a. på følgende lov (Newtons anden lov): *Den kraft F (= force) der giver et fast legeme en hastighedsforøgelse på A (= acceleration) er proportional med produktet af accelerationen og legemets masse M:*

$$F = G \cdot M \cdot A, \tag{1}$$

hvor værdien af proportionalitetskonstanten G afhænger af de enheder F, M og A er udtrykt i.

At kontrollere rigtigheden af en sådan relation skulle synes ret enkelt, i hvert fald indenfor visse grænser: Tag en samling (m) af faste legemer med vidt forskellige masser, der bevæger sig i samme retning i forhold til Jorden og udsæt hver af dem for en række (n) mekaniske instrumenter, der skubber dem i deres bevægelsesretning, men med vidt forskellige kræfter. I hvert af de $m \cdot n$ forsøg måles accelerationen, og man regner efter, om relationen passer – i hvert fald for *de* legemer og *de* instrumenter.

Ja, gid det var så nemt, men det er det ikke, og det ligger først og fremmest i, at i de beskrevne forsøg skulle man i forvejen kende den kraft, hvert instrument udøver, foruden den masse hvert af legemerne besidder.

Og her er vi ved et af de kontroversielle emner i den klassiske fysik: Hvad er masse? Og hvad er kraft? Eller, hvis man ikke kan få at vide *hvad* det ene og det andet *er*, hvordan kan man *måle* dem?

Det er spørgsmål, der stadig skrives tykke bøger om[1]. Og de synes at munde ud i, at hvis man vidste, hvad masse var, så kunne man sige, hvad kraft er – og omvendt!

3. *Datastruktur og simultan indførelse af masse og kraft.* Det kunne lyde som om man ikke kunne komme videre, men det betyder i virkeligheden blot, at forsøget måtte baseres på, at man til at begynde med hverken kender legemers masse eller instrumenters kraft – eller endnu mere agnostisk: At man end ikke ved, om der er noget som helst, der kan betegnes som masse og kraft, og at man derfor heller ikke har en relation, som den anførte at efterprøve. At det eneste man virkelig *ved*, er det man *observerer*, nemlig at når et

1. F.eks. Jammer, Max (1957) og (1961).

fast legeme L_i bevæger sig med en vis (temporært) jævn hastighed V_i i forhold til f.eks. Jorden og modtager et stød i bevægelsens retning af et dertil egnet instrument I_j, så ændres legemets hastighed med en acceleration A_{ij}, *som kan måles* (at dette kan gøres er altså forudsat).

Det ovenfor skitserede forsøg resulterer da i $m \cdot n$ observationer A_{ij}, der kan arrangeres i et rektangulært skema:

		Instrumenter		
		$I_1, \ldots,$	$I_j, \ldots,$	I_n
	L_1	$A_{11}, \ldots,$	$A_{1j}, \ldots,$	A_{1n}
	.			
Faste	.	. . . .	. . . .	. . . .
	.			
	L_i	$A_{i1}, \ldots,$	$A_{ij}, \ldots,$	A_{in}
	.			
legemer	.	. . . .	. . . .	. . . .
	.			
	L_m	$A_{m1}, \ldots,$	$A_{mj}, \ldots,$	A_{mn}

(2)

Om disse resultater forsikrer fysikerne mig, at hvis man virkelig udførte et sådant forsøg – hvilket i øvrigt ikke kunne falde dem ind, da udfaldet gennem andre erfaringer ville være kendt på forhånd – så ville accelerationerne danne et nydeligt multiplikativt system: Hver række ville være proportional med enhver anden række og hver søjle med enhver anden søjle, så at enhver acceleration A_{ij}, på nær en proportionalitetskonstant G, kan spaltes i et produkt af en rækkefaktor P_i og en søjlefaktor Q_j:

$$A_{ij} = G \cdot P_i \cdot Q_j. \tag{3}$$

Den kan altså, på nær konstanten, beskrives som produktet af en parameter P_i for legemet L_i og en parameter Q_j for instrumentet I_j. Og dermed ville vi ad empirisk vej have fundet en relation af den anførte form (1), hvori man da skulle have

$$Q_j = F_j \quad \text{og} \quad P_i^{-1} = M_i. \tag{4}$$

Men just denne måde at skrive parametrene på – altså som Q_j selv, men den reciprokke værdi af P_i – kræver en begrundelse udover (3) og dens formelle omskrivning til (1). Denne gives i to supplerende forsøg – atter »tankeeksperimenter«. Af det ene fremgår, at hvis man lader to instrumenter I_j og I_k virke umiddelbart efter hinanden på samme legeme L_i, så er virkningen den samme, som var det ét instrument med parameteren

$$Q_{(jk)} = Q_j + Q_k \tag{5}$$

eller i henhold til (4)

$$F_{(jk)} = F_j + F_k. \tag{5a}$$

Det andet forsøg viser, at hæfter man to legemer L_h og L_i solidt sammen, så fungerer de som ét legeme, når de påvirkes af et instrument I_j, men at parameteren $P_{(hi)}$ for det sammensatte legeme tilfredsstiller relationen

$$P_{(hi)}^{-1} = P_h^{-1} + P_i^{-1}, \tag{6}$$

altså med betegnelsen (4):

$$M_{(hi)} = M_h + M_i. \tag{6a}$$

Herved indses først og fremmest, at de parametre, der indgår som »masse« og »kraft« i lovmæssigheden (1) ikke behøver at defineres hver for sig, ej heller ved hinanden, de kan indføres simultant gennem det, der kan bestemmes, nemlig *strukturen af accelerationerne i tankeeksperimentet* (2), *hvori der er indbygget sammensatte legemer og instrumenter, der virker i serie.*

Hertil kan for øvrigt føjes, at i additiviteterne (5) og (6) for de parametre, der indgår i (3) ligger en motivering for at hæfte betegnelserne »masse« og »kraft« på henholdsvis P_i^{-1} og Q_j. I den intuitive opfattelse af fænomenet »kraft« ligger nemlig ikke blot, at virkningen stiger med stigende »kraftudfoldelse«, men også at dette sker »kvantitativt«, dvs. at f.eks. anvendelsen af samme kraft to gange lige efter hinanden på samme genstand har samme effekt som den »dobbelte kraftudfoldelse«. Ligeledes ligger det i den intuitive opfattelse af fænomenet »masse«, at f.eks. to ens legemer der er bundet fast sammen har »samme træghed« – er lige så svær at flytte – som ét legeme med den »dobbelte masse«.

4. *Hypoteseprøvning ctr. ufuldstændig induktion.* Selv om vi hermed har fået placeret *begreberne* i (F, M, A)-konstellationen har vi endnu ikke fået klarlagt begrundelsen for (1) som en generel lov. Thi forsøg med 20 eller 200 legemer, hvad enten de udsættes for 7 eller 7000 instrumenter, kan stadig kun frembringe *et endeligt antal observationer* – og selvom fysikerne påberåber sig alskens erfaringer som begrundelse for tankeeksperimentets udfald, så er deres omfang, omend kolossalt omfattende, dog stadig begrænset. Selv et nok så stort forsøg og/eller et nok så velfunderet tankeeksperiment begrunder altså i princippet ikke relationen som *generelt* gyldig. Som antydet i afsn. 2: Generel gyldighed kan simpelthen ikke opnås ad empirisk vej. Uanset erfaringens omfang forbliver dokumentationen *en ufuldstændig induktion.*

Ikke desto mindre danner (1) et af de faste fundamenter for hele den klassiske fysik og dens tekniske anvendelser. Hvorledes kan den da begrundes?

Love som (1) sammen med (5a) og (6a) kan tænkes udledt deduktivt ud fra i forvejen accepteret teori, men det flytter for så vidt blot problemet et skridt længere tilbage, med mindre man netop vil bruge nævnte lov som en prøvesten for deres præmisser. Under alle omstændigheder havner man i, at et empirisk materiale af større eller mindre omfang kan føre til den *formodning*, at der gælder en eller anden lovmæssighed. In casu, at hvert legeme L_i kan tilforordnes en parameter M_i, og at hvert mekanisk flytningsinstrument I_j kan tilforordnes en parameter F_j, der tilsammen tilfredsstiller både den multiplikative accelerationsrelation (1) og de to additive relationer (5a) og (6a).

Tentativt kan denne formodning ophøjes til *en generel hypotese*, som man derpå benytter enhver lejlighed til at afprøve for mange slags faste legemer og mange slags mekaniske flytningsinstrumenter – dels direkte, dels indirekte gennem konsekvenser af dem, f. eks. ved at man vitterligt kan opsende og styre raketter planmæssigt.

Altså: *man beviser ikke en lovmæssighed* som (1) eller dens parametriserede form (3) – med eller uden de additive love (5a) og (6a) – *iagttagelser inspirerer til at opstille den som en hypotese, der derefter testes på et meget bredt grundlag.*

Dermed har vi svaret på det i afsn. 2 stillede spørgsmål om den principielle begrundelse af en lov som (1).

5. *Afgrænsning af gyldighedsområdet.* Medens mange slags afprøvninger til visse har styrket tilliden til den fremsatte hypotese, så har de også tjent til at afgrænse dens gyldighedsområde: den gælder *indenfor en bestemt referenceramme*, hvori legemerne er faste, hvori instrumenterne udelukkende virker mekanisk og hvori reaktionerne er accelerationer af legemerne.

Udvider man referencerammen, behøver hypotesen ikke mere at gælde. Sparker man f. eks. til 1 kg smør ved 20 °C bliver det hængende på skoen, og virker et instrument ikke blot mekanisk, men også kraftigt magnetisk, så vil genstande af sten og jern reagere ganske forskelligt. Og tages noget andet end accelerationer som reaktioner – f. eks. hastigheder eller positioner, for slet ikke at tale om legemernes farve eller tilbagekastning af lys – så holder (1) selvfølgelig helt op med at gælde.

Hovedsagen er, at man efter en god start med velvalgte legemer, instrumenter og reaktioner – udvalgt efter dagligdags kriterier – kan forsøge at udvide referencerammen i forskellige retninger og afgrænse den klasse af legemer, resp. instrumenter, for hvilken den afprøvede hypotese gælder og til syvende og sidst finde ud af, hvilke fysiske egenskaber, de må have, i modsætning til dem for hvilke loven ikke gælder.

Derved kan man efterhånden nå frem til en præcisering af lovens gyldighedsområde.

6. *Sammenligninger indenfor referencerammen.* Lad os dernæst se nærmere på indholdet af loven (3).

Først tænkte vi os, at der forelå m faste legemer $L_1, \ldots, L_m$, men blev klar over, at generaliteten krævede, at mange flere måtte inddrages i undersøgelsen. Faktisk ville man ikke kunne sige stop efter noget som helst angivet antal: mængden af legemer potentielt på prøve er *ubegrænset* eller, for at sige det rent ud, den generelle lov kan kun formuleres for en mængde legemer, der er *uendelig*. Vi betegner en sådan mængde med $\mathcal{L}$.

For instrumenterne forholder det sig på samme måde: loven kan kun formuleres for en uendelig mængde $\mathcal{I}$.

Hvad endelig accelerationerne angår danner de mulige værdier en mængde $\mathcal{A}$, der også må opfattes som uendelig, da ethvert endeligt, positivt reelt tal er muligt.

Referencerammen for den diskuterede lov er da sættet af de tre mængder

$$[\mathcal{L}, \mathcal{I}, \mathcal{A}] \tag{7}$$

og selve loven er (3), hvori i og j er indices, der nu ikke forudsættes numerable, selv om de i det følgende formelt optræder som numre; men herved tænkes der på et konkret – og derfor endeligt – sæt af data.

Af (3) som gyldig for $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ kan de tilsvarende parametre P_i og Q_j bestemmes ud fra A'erne, dog kun på nær proportionalitetsfaktoren G, der kan fastlægges ved, at man vælger enhederne for P og Q således at f.eks.

$$P_1 = Q_1 = 1, \tag{8}$$

hvorved vi får

$$G = A_{11}. \tag{8a}$$

Pointen i denne banale bemærkning er, at P_i og Q_j ikke kan bestemmes absolut, men kun i forhold til noget andet, her P_1, resp. Q_1.

L_i kan altså kun vurderes gennem sammenligning med et andet legeme i $\mathcal{L}$ og I_j kun gennem sammenligning med et andet instrument i $\mathcal{I}$.

Benyttes samme instrument I_j til etablering af sammenligningen mellem to vilkårlige legemer L_h og L_i i $\mathcal{L}$, så sker det på grundlag af de to accelerationer A_{hj} og A_{ij}, hvilket i henhold til (3) bringes således til udtryk:

$$\frac{A_{hj}}{A_{ij}} = \frac{G \cdot P_h Q_j}{G \cdot P_i Q_j} = \frac{P_h}{P_i}. \tag{9}$$

Resultatet af denne sammenligning har to iøjnefaldende egenskaber:

a. *Det er uafhængigt af alle andre legemer i* $\mathcal{L}$, specielt af de øvrige legemer i en aktuel samling $L_1, \ldots, L_m$.

b. *Det er uafhængigt af hvilket instrument i* $\mathcal{I}$, *der benyttes til etablering af* *sammenligningen*, specielt af de øvrige instrumenter i en aktuel samling $I_1, \ldots, I_n$.

Tilsvarende sammenlignes to hvilke som helst instrumenter I_j og I_k i $\mathcal{J}$ gennem de to accelerationer A_{ij} og A_{ik} de fremkalder hos et og samme legeme L_i, idet

$$\frac{A_{ij}}{A_{ik}} = \frac{G \cdot P_i\, Q_j}{G \cdot P_i\, Q_k} = \frac{Q_j}{Q_k}, \tag{10}$$

som kun afhænger af de to instrumenter, men hverken af de andre instrumenter i $\mathcal{J}$ (jf. a) eller af det anvendte legeme (jf. b).

7. *Den specifike objektivitet af sammenligninger.* Nu er alle de mulige iagttagelsessituationer defineret ved den fastlagte referenceramme $[\mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{A}]$: Legemerne i $\mathcal{L}$ skal sammenlignes med hensyn til de accelerationer ($\mathcal{A}$) som instrumenter i $\mathcal{J}$ påfører dem. Og instrumenterne sammenlignes analogt.

Dermed forudsættes implicit, at iagttagelserne foregår indenfor et isoleret system, så at de er upåvirkede af hvad der sker i verden udenfor. Altså både af stjernernes stilling, af forbirullende lastbiler og af storpolitiske problemer. Men i øvrigt forudsættes også, at observationsarrangementet – den hertil nødvendige manipulation med legemer og instrumenter samt registreringen af accelerationerne – ikke griber ind i observationssituationen.

Dette strengt isolerede system er således fuldstændigt karakteriseret ved referencerammen $[\mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{A}]$ med de tilhørende parametre. Indenfor denne ramme er alle mulige A'er potentielt set givne data – i en aktuel observationssituation er A_{ij}; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ de faktisk givne data – medens *parametrene P og Q er ukendte, men de er det eneste, der er ukendt i* $[\mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{A}]$. Udsagnene *a* og *b* siger da, at med relationen (3) som almengyldigt grundlag indenfor referencerammen kan *parametrene for to hvilke som helst legemer sammenlignes ud fra, hvad der er kendt, nemlig observerede accelerationer, og resultatet er upåvirket af alt hvad der er ukendt indenfor referencerammen.*

At det analoge gælder for sammenligning af instrumentparametre er en selvfølge.

I denne præcise forstand kan vi betegne sammenligningerne som objektive. Imidlertid bruges dette udtryk – både i videnskab og i daglig debat – i mangelunde betydninger, og derfor skærper jeg terminologien ved at *betegne sammenligningerne som specifikt objektive*, nemlig specificerede ved referencerammen.

8. *Skalære latent additive relationer.* Den analyse af Newtons anden lov som her er foretaget, har sine paralleler i den elementære klassiske fysiks

basale love hvoraf mange er multiplikative i lighed med (1), og i flere tilfælde følges de op af analogier til de additive love (5a) og (6a). Men uanset om de sidste forefindes eller ej, kan den specifikt objektive sammenligning etableres gennem (1).

Imidlertid er denne lovmæssighed ikke ene om at frembringe slige sammenligninger. Man kunne tænke sig andre objekter O end faste legemer, der kom i kontakt med andre agentier A end just flytningsmekanismer, og at der derved fremkom andre reaktioner R end netop accelerationer. Endvidere at O, A og R med henblik på dette samspil karakteriseredes fuldstændigt ved éndimensionale – såkaldt skalære – reelle parametre o, a og r. Idet R tænkes bestemt af O og A, må r være en entydig funktion af o og a:

$$r = r(o, a). \tag{11}$$

I vort foregående eksempel var

$$r = o \cdot a \tag{12}$$

der transformeret logaritmisk kan udtrykkes additivt

$$\log r = \log o + \log a, \tag{12a}$$

hvilket anvendt på m objekter, n agentier og $m \cdot n$ reaktioner giver

$$\log r_{ij} = \log o_i + \log a_j, \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n \tag{13}$$

eller

$$\overline{r_{ij}} = \overline{o_i} + \overline{a_j}, \tag{13a}$$

hvor markeringen med streger her skal indicere den logaritmiske transformation.

I dette additive system – der selvfølgelig er ækvivalent med det multiplikative system (12) – kan o_h og o_i sammenlignes ved

$$\overline{o_h} - \overline{o_i} = \overline{r_{hj}} - \overline{r_{ij}} \tag{14}$$

som gælder for ethvert j og derfor er et specifikt objektivt udsagn. Det analoge gælder for sammenligning af to a'er.

En handig kontrol på additiviteten, der samtidig bestemmer addenderne på nær en additiv konstant, får man ved i (13a) at danne gennemsnit over dels i, dels j:

$$\overline{r_{i.}} = \overline{o_i} + \overline{a_.}, \quad \overline{r_{.j}} = \overline{o_.} + \overline{a_j}, \tag{15}$$

som indsat i (13a) giver

$$\overline{r_{ij}} = \overline{r_{i.}} + (\overline{a_j} - \overline{a_.}), \overline{r_{ij}} = \overline{r_{.j}} + (\overline{o_i} - \overline{o_.}). \tag{16}$$

For fastholdt j vil differensen $\overline{r_{ij}} - \overline{r_{i.}}$ altså være konstant, så at $\overline{r_{ij}}$ tegnet op mod $\overline{r_{i.}}$, $i = 1, \ldots, m$ skal give punkter, der ligger på en ret linie med hældningen 1. Analogt for $\overline{r_{ij}}$ tegnet op mod $\overline{r_{.j}}$, $j = 1, \ldots, n$.

Det samme ræsonnement gælder imidlertid også, hvis blot r afhænger således af o og a, at der findes 3 funktioner

$$\bar{r} = f(r), \quad \bar{o} = g(o), \quad \bar{a} = h(a) \tag{17}$$

af r, o og a som tilfredsstiller den additive relation

$$\bar{r} = \bar{o} + \bar{a}. \tag{18}$$

I så fald betegner vi systemet $[o, a, r]$ som *latent additivt*, her forudsat *skalært*, og ved nu, at *et sådant system sikrer muligheden for specifikt objektive sammenligninger mellem objekter indbyrdes og mellem agentier indbyrdes.*

9. *Betingelse for latent skalær additivitet.* At undersøge om et system af skalære variable er latent additivt er i princippet ret enkelt, idet man ved at differentiere den med (18) ækvivalente ligning

$$f(r) = g(o) + h(a) \tag{18a}$$

med hensyn til dels o, dels a får de to relationer

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial o} \cdot f'(r) &= g'(o) \\ \frac{\partial r}{\partial a} \cdot f'(r) &= h'(a) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

hvoraf $f'(r)$ elimineres ved division

$$\frac{\partial r}{\partial o} \Big/ \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{g'(o)}{h'(a)}. \tag{20}$$

Hvilket udsiger, at forholdet mellem de to partielle differentialkvotienter af reaktionsfunktionen r skal danne et multiplikativt system.

Om det gør det, kan man undersøge ved at tage logaritmerne og ved den gennem formlerne (15) og (16) skitserede teknik undersøge om de da danner et additivt system. Hvis de gør det, får man samtidigt bestemt $g'(o)$ og $h'(a)$ – på nær en multiplikativ konstant – og kan ved integration danne $g(o)$ og $h(a)$ – på nær additive konstanter.

Da (20) ikke blot er en nødvendig, men også en tilstrækkelig betingelse for latent skalær additivitet, må summen $g(o) + h(a)$ nødvendigvis være en funktion af r. Man kan derfor sluttelig bestemme $f(r)$ af (18a).

Tilstrækkeligheden af (20) ses ved i den modificerede form

$$\frac{1}{g'(o)} \cdot \frac{\partial r}{\partial o} = \frac{1}{h'(a)} \cdot \frac{\partial r}{\partial a} \tag{20a}$$

at opfatte $r(o,a)$ som en funktion $\bar{r}$ af $\bar{o}$ og $\bar{a}$. For denne fås nemlig

$$\frac{\partial \bar{r}(\bar{o}, \bar{a})}{\partial \bar{o}} = \frac{\partial \bar{r}(\bar{o}, \bar{a})}{\partial \bar{a}}, \tag{21}$$

hvis almindelige løsninger er en vilkårlig (differentiabel) funktion af $\bar{o} + \bar{a}$:

$$r(o, a) = \bar{r}(\bar{o} + \bar{a}) \tag{22}$$

der, vendt om til

$$\bar{o} + \bar{a} = f(r), \tag{23}$$

er identisk med (18a).

10. *Specifik objektivitet og latent skalær additivitet.* I afsn. 7 blev det påpeget, at den generalitet der ligger i specifik objektivitet indenfor en given referenceramme kan opnås, hvis reaktionssystemet er latent additivt i endimensionale parametre. Men om denne betingelse kan det vises, at den også er nødvendig for specifik objektivitet af sammenligninger af objekter, for så vidt som alle tre sæt parametre o, a og r er skalære.

At en sammenligning mellem to objekter O_h og O_i kan foretages specifikt objektivt betyder først og fremmest, at man af deres reaktioner R_{hj} og R_{ij} på et vilkårligt agens A_j kan aflede et udsagn $U\{R_{hj}, R_{ij}\}$ som er uafhængigt af A_j, men afhænger af O_h og O_i. Da både objekter, agentier og reaktioner er fuldt karakteriserede ved deres parametre, drejer det sig om eksistensen af et udsagn om r_{hj} og r_{ij} – hvilket vil sige en funktion af dem – som kun afhænger af o_h og o_i. Objektiviteten fordrer altså, at der eksisterer to funktioner u og v, hver af to variable, for hvilke

$$u(r_{hj}, r_{ij}) = v(o_h, o_i). \tag{24}$$

Med den ovenfor anvendte betegnelse (11) kan vi skrive

$$r_{hj} = r(o_h, a_j) \tag{25}$$

og dermed antager (24) formen

$$u(r(o_h, a_j), r(o_i, a_j)) = v(o_h, o_i) \tag{24a}$$

Begge former kan benyttes efter behov.

Den her opstillede betingelse for specifik objektivitet gælder uanset dimensionaliteten af de tre sæt parametre, men i det følgende skal vi – i fortsættelse af de foregående betragtninger – begrænse os til referencesystemer, hvori parametrene for både objekter, agentier og reaktioner er skalære.

Ydermere vil det for analysen af hvad (24) indebærer være påkrævet i nogen grad at specialisere den klasse af sammenligninger, der ønskes dækket. Her begrænser vi denne klasse ved at fordre, at de tre funktioner $r(x, y)$, $u(x, y)$ og $v(x, y)$ i de betragtede områder for o og a har kontinuerte partielle differentialkvotienter af første orden.

Under denne forudsætning kan man differentiere (24) med hensyn til enhver af de tre variable o_h, o_i og a_j. I henhold til kædereglen fås derved

$$\frac{\partial r_{hj}}{\partial o_h} \cdot \frac{\partial u}{\partial r_{hj}} = \frac{\partial v}{\partial o_h}, \quad \frac{\partial r_{ij}}{\partial o_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial r_{ij}} = \frac{\partial v}{\partial o_i}, \quad \frac{\partial r_{hj}}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial r_{hj}} + \frac{\partial r_{ij}}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial r_{ij}} = 0 \tag{26}$$

hvor man ved hjælp af de to øverste ligninger kan eliminere differentialkvotienterne af u i den nederste ligning:

$$\frac{\partial r_{hj}}{\partial a_j}\cdot\left(\frac{\partial r_{hj}}{\partial o_h}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial v}{\partial o_h}+\frac{\partial r_{ij}}{\partial a_j}\cdot\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial o_i}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial v}{\partial o_i}=0. \tag{27}$$

Idet denne relation skal gælde for vilkårlige o_h, o_i og a_j kan vi i første instans holde a_j konstant, lad os sige $= a_0$. Koefficienten til f. eks. $\frac{\partial v}{\partial o_h}$ kommer derved til kun at afhænge af o_h, og det står os frit for at betegne den $1 : g'(o_h)$. Anvendt på begge led på venstre side af (27) viser denne specialisering, at $v(o_h, o_i)$ må tilfredsstille en partiel differentialligning af formen

$$\frac{1}{g'(o_h)}\cdot\frac{\partial v}{\partial o_h}+\frac{1}{g'(o_i)}\cdot\frac{\partial v}{\partial o_i}=0 \tag{28}$$

og heraf følger, ved samme ræsonnement som i slutningen af afsn. 8, at v må være en funktion af differensen mellem

$$\overline{o}_h = g(o_h) \quad \text{og} \quad \overline{o}_i = g(o_i), \tag{29}$$

dvs. af formen

$$v(o_h, o_i) = \overline{v}(\overline{o}_h - \overline{o}_i) \tag{30}$$

Funktionen v er altså latent subtraktiv.

I anden instans lader vi a_j variere frit i (27), men eliminerer differentialkvotienterne af v ved hjælp af (28). Derved får vi

$$\frac{\partial r_{hj}}{\partial a_j}\cdot\left(\frac{\partial r_{hj}}{\partial o_h}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{g'(o_h)}=\frac{\partial r_{ij}}{\partial a_j}\cdot\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial o_i}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{g'(o_i)}. \tag{31}$$

Men da venstre side er uafhængig af o_i og højre af o_h, må hver side være uafhængig af det pågældende o, altså kun afhænge af a_j. Vi kan derfor sætte

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial a_j}\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial o_i}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{g'(o_i)}=h'(a_j), \tag{32}$$

der kan ommøbleres til

$$\frac{1}{g'(o_i)}\cdot\frac{\partial r(o_i, a_j)}{\partial o_i}=\frac{1}{h'(a_j)}\cdot\frac{\partial r(o_i, a_j)}{\partial a_j}, \tag{33}$$

og heraf følger at *funktionen r er latent additiv*, dvs. af formen

$$r(o_i, a_j) = \overline{r}(\overline{o}_i + \overline{a}_j) \tag{34}$$

hvori vi foruden (29) har sat

$$\overline{a}_j = h(a_j). \tag{35}$$

Idet dette resultat kombineres med slutningen af afsn. 9 har vi vist en af hovedsætningerne i teorien for specifik objektivitet:

Er parametrene for både objekter, agentier og reaktioner reelle tal er det en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for specifikt objektive parvise sammenligninger af objekterne, at reaktionsparameteren er en latent additiv funktion af objekt- og agensparameter.

Hertil kan føjes, at definitionen af begrebet sammenligning af to objekter kan udvides umiddelbart til sammenligning mellem flere objekter og at betingelsen for dennes specifike objektivitet også er den latente additivitet af reaktionsfunktionen.

Endelig kan det bemærkes, at på grund af at objekter og agentier optræder fuldstændig symmetrisk *er den latente additivitet også nødvendig og tilstrækkelig for specifikt objektive sammenligninger mellem agentier.* De to slags objektiviteter følges ad.

11. *Produktion som bestemt af kapital og arbejde.* Da jeg ikke har haft lejlighed til at afprøve det følgende på adækvate talmaterialer, skal det – i hvert fald indtil videre – ikke tages særlig højtideligt, kun som en smagsprøve på, hvorledes det kan tage sig ud, når man forsøger at flytte den latente skalære additivitet over i økonomien.

Produktion som funktion af kapital og arbejde

$$P = F(K, A) \tag{36}$$

specialiseres ofte til Cobb-Douglas-typen

$$P = C \cdot K^{\alpha} \cdot A^{1-\alpha} \qquad O < \alpha < 1, \ c \text{ konstant.} \tag{37}$$

Umiddelbart ser den ikke multiplikativ ud, men man kunne sige, at kendte man eksponenten α, så havde man med

$$K' = K^{\alpha}, \qquad A' = A^{1-\alpha} \tag{38}$$

udtrykt kapital og arbejde i en ny metrik, hvori P er multiplikativ.

Med terminologien fra de foregående afsnit kunne man også sige, at systemet (37) er latent additivt og at transformationerne til additivitet er

$$\overline{P} = \log P, \ \overline{K} = \alpha \log K, \ \overline{A} = (1 - \alpha) \log A. \tag{39}$$

Selvfølgelig, har man adækvate data, er det let nok at estimere α fra dem, hvis modellen ellers passer godt nok, men man kunne måske også lade det spørgsmål stå åbent, hvilken metrik P, K og A skulle måles i for at bringe samspillet mellem K og A til udtryk i additiv form, hvis dette er muligt.

Med denne problemstilling ville man spørge om eksistensen af tre funktioner f, g og h for hvilke

$$f(P) = g(K) + h(A), \tag{40}$$

og disse funktioner måtte bestemmes empirisk som angivet i afsn. 9.

Selvfølgelig kan problemstillingen modificeres, f.eks. ved – inspireret af Cobb-Douglas – at indføre forholdet $L = K/A$ og A selv som de variable, der bestemmer P, men for selve tankegangen er det en detalje.

En hovedvanskelighed ser jeg i fremskaffelse af adækvate data, for hvilke de to – eller, for den sags skyld, flere – determinerende variable man hæfter sig ved, skulle variere frit i forhold til hinanden, men jo ofte, f. eks. når en enkelt virksomhed iagttages over en årrække, netop følges ad. Men lader den sig overvinde, f. eks. ved at inddrage flere, forskelligt dimensionerede virksomheder, der fremstiller det samme produkt, får man, når den latente skalære additivitet er til stede, i tilgift en objektivitet, som skulle kunne udnyttes i lighed med fysiske love, (jf. afsn. 1), ifald referencerammen kan gøres tilstrækkelig omfattende.

12. *Latent additivitet og sandsynlighedsmodeller.* Når der i de foregående afsnit er talt om multiplikative og additive relationer, eksempelvis (3), (5) og (6), samt om differentialligninger, så gælder de strengt taget kun, når de givne data, værdierne af reaktionsfunktionen $r(o, a)$, ikke er mærkbart belastede med målefejl eller andre tilfældige variationer.

Det matematiske apparat, der bruges til behandling af slige variationer, er som bekendt sandsynlighedsregningen. Man står da overfor den opgave at indbygge de latent additive strukturer i *sandsynlighedsmodeller*, hvori det grundlæggende princip, den specifikke objektivitet af de sammenligninger, der skal foretages, bliver bevaret.

Afsnit 13 og 14 eksemplificerer hvorledes man til tider kan arbejde sig frem til en sådan model.

13. *Latent additivitet i procenter som er organiseret i en 4×4-tabel.* For ca. 100 år siden benyttede den franske sociolog Durkheim sig i sine berømte studier over selvmord af en egenartet teknik ved beskrivelse af tabeller der skulle demonstrere, hvorledes selvmordsfrekvenser varierer med to forskellige sociale faktorer.

Ideen i hans metode kan illustreres gennem tabel 1 som er et uddrag af materialet i tabel 5.4 hos Bent Bøgh Andersen (1972):

Heri betegner »tidsperspektivet« en gennem et spørgeskema målt holdning af den enkelte elev til planlægning af egen fremtid.

Det er iøjnefaldende, at procenterne i hver række og hver søjle er monotont faldende, så at det traditionelle »χ^2-test for uafhængighed« er uden interesse. Det kan være fristende med Durkheim at læse tabellens procenter på skrå og stadig finde systematisk gang i tallene. Detaljer i denne måde at anskue tabellen på er beskrevet af rapportens forfatter (p. 63), som har draget den Durkheimske teknik frem af næsten glemsel.

For at komme frem til en klar beskrivelse af tabellens struktur synes en mere systematisk analyseteknik dog påkrævet. Hvad vi vil gøre, er da at

Tabel 1. 2672 elever i 8. skoleår fordelt på 1. real og 8. klasse og efter faders sociale status samt eget »tidsperspektiv«.

Faders sociale status	Klasse	a ant.	a %	b ant.	b %	c ant.	c %	d ant.	d %	Total ant.	Total %
	1. real	114	85,1	94	78,2	60	69,8	33	54,1	301	75,1
I-II	8. kl.	20		26		26		28		100	
	i alt	134		120		86		61		401	
	1. real	155	62,8	149	58,2	130	45,6	87	40,0	521	51,8
III	8. kl.	92		107		155		131		485	
	i alt	247		256		285		218		1006	
	1. real	67	50,0	66	47,5	62	39,5	78	28,4	273	38,8
IV	8. kl.	67		73		95		196		431	
	i alt	134		139		157		274		704	
	1. real	44	43,6	53	40,7	42	25,9	22	13,1	161	28,6
V	8. kl.	57		77		120		146		400	
	i alt	101		130		162		168		561	
	1. real	380	61,7	362	56,1	294	42,6	220	30,5	1256	47,0
Total	8. kl.	236		283		396		501		1416	
	i alt	616		645		690		721		2672	

undersøge om der bagved de systematiske træk kan erkendes en latent additiv struktur.

Det er klart, at da procenter er låst inde mellem 0 og 100 kan de ikke selv danne et additivt system, men må transformeres således at tallene får i princippet fri bevægelighed mellem $-\infty$ og $+\infty$. Det kan man opnå gennem en såkaldt *logistisk transformation*[2]

$$lg\ p = \log \frac{p}{100-p}, \tag{41}$$

hvor p betegner en given procent. Ved at anvende den på tabel 1's procenter p_{ij} hvor i står for faders sociale status, j for tidsperspektivet, får man indmaden ($l_{ij} = lg\ p_{ij}$) af tabel 2.

For at se om vi allerede med denne simple transformation skulle have haft held til at bringe additiviteten frem, kan man bygge på den gennem formlerne (13a), (15) og (16) i afsnit 8 skitserede teknik og her beregne gennemsnittet af hver række ($l_{i.}$) og af hver søjle ($l_{.j}$) samt det totale gennemsnit ($l_{..}$). Hvis man teoretisk set skulle have relationen

$$l_{ij} = c + s_i + t_j \tag{42}$$

2. Der er også andre muligheder, men denne er i flere henseender den simpleste.

Tabel 2. Analyse af procenterne i tabel 1: l_{ij}, deres gennemsnit og estimerede addender.

$i \backslash j$	a	b	c	d	$l_{i.}$	s_i
I-II	+0,756	+0,558	+0,284	+0,072	+0,418	+0,443
III	+0,226	+0,144	—0,076	—0,177	+0,029	+0,054
IV	0,000	—0,043	—0,186	—0,400	—0,157	—0,132
V	—0,113	—0,162	—0,456	—0,822	—0,388	—0,363
$l_{.j}$	+0,217	+0,124	—0,109	—0,332	—0,025	
t_j	+0,242	+0,149	—0,084	—0,307		

– hvor s_i og t_j fikseres ved at deres gennemsnit sættes til 0 – måtte vi have

$$c \approx l_{..}\,,\quad s_i \approx l_{i.} - l_{..}\,,\quad t_i \approx l_{.j} - l_{..}\,, \tag{43}$$

hvori tegnet $\approx$ angiver at højre side er et skøn over (estimerer) parameteren på venstre side.

Til kontrol af om – eller hvor godt – modellen passer i det foreliggende tilfælde kan man indsætte skønnene (43) i stedet for selve parametrene c, s_i og t_j i (42). Derved får vi de »beregnede værdier«

$$\overline{l_{ij}} = l_{i.} + l_{.j} - l_{..} \tag{44}$$

Tabel 3. Beregninger til kontrol af den logistiske additivitet af materialet i tabel 1.

$i \backslash j$	a	b	c	d
I-II	+0,660	+0,569	+0,334	+0,111
III	+0,271	+0,178	—0,055	—0,278
IV	+0,085	—0,008	—0,241	—0,464
V	—0,146	—0,239	—0,472	—0,695

i tabel 3, at sammenligne med de oprindelige l_{ij} i tabel 2, f. eks. gennem et diagram med l_{ij}'erne som ordinater mod de tilsvarende $\overline{l_{ij}}$'er som abscisser. Resultatet ses i fig. 1, hvori punkterne slynger sig tæt om identitetslinjen, som de skulle ligge på i fald l_{ij}'erne kunne fremstilles præcist ved formel (42).

Tabel 4. Sammenligning mellem observerede og udfra $\overline{l_{ij}}$ beregnede procenter.

	a		b		c		d	
	obs.	ber.	obs.	ber.	obs.	ber.	obs.	ber.
I-II	85,1	82,1	78,2	78,7	65,8	68,9	54,1	56,4
III	62,8	65,0	58,2	60,1	45,6	46,8	40,0	34,6
IV	50,0	55,0	47,5	49,5	39,5	36,4	28,4	25,6
V	43,6	41,7	40,7	36,5	25,9	25,2	13,1	17,0

Til overflod kan man i tabel 4 se, hvor godt de fra $\bar{l}_{ij}$ tilbageregnede procenter stemmer overens med de observerede procenter p_{ij}.

14. *Opstilling af en additiv sandsynlighedsmodel.* En præcis fremstilling kan der selvfølgelig ikke være tale om. Procenter som hvert p_{ij} må, som velkendt, i allerbedste fald formodes at være underkastet tilfældige variationer i overensstemmelse med binomialloven med en eller anden parameter z_{ij}. Idet n_{ij} er det antal elever, der er karakteriseret ved kombinationen (i, j) og a_{ij} betegner det antal af dem der kom i 1. real, skulle sandsynligheden for netop dette antal da være

$$p\{a_{ij}\} = \binom{n_{ij}}{a_{ij}} z_{ij}^{\ a_{ij}} (1 - z_{ij})^{\ n_{ij} - a_{ij}} \tag{45}$$

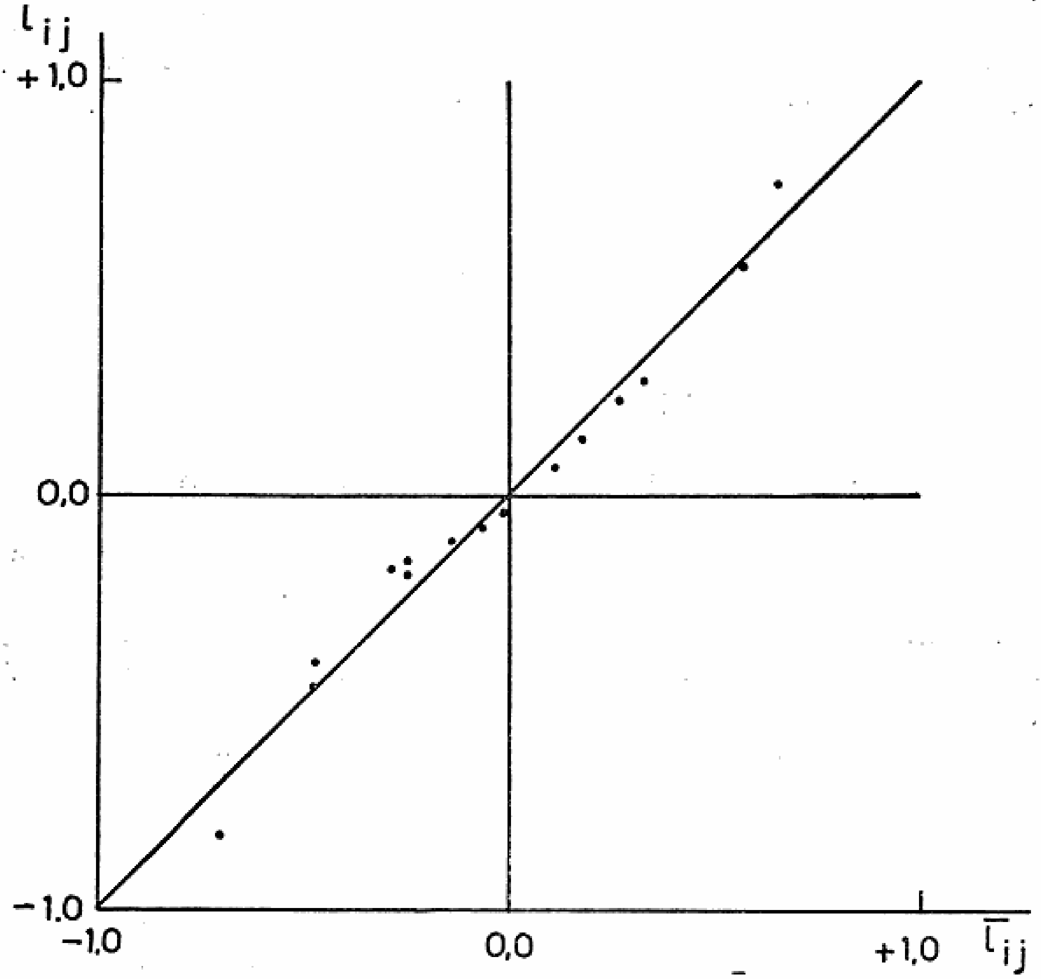

Fig. 1. Modelkontrol: l_{ij} tegnet op mod $\bar{l}_{ij}$.

Da middelværdien af a_{ij} i denne fordeling er

$$M\{a_{ij}\} = n_{ij}\, z_{ij} \tag{46}$$

ville $a_{ij}/n_{ij} = p_{ij}/100$ kunne tages som et skøn over z_{ij}. Dermed skulle også l_{ij} være et skøn over den logistiske transformation af z_{ij}.

Hvad analysen i afsnit 13 har vist er da, at der er en god mulighed for at

$$lg\, z_{ij} = \log \frac{z_{ij}}{1 - z_{ij}} = c + s_i + t_j. \tag{47}$$

Løst med hensyn til z_{ij} udsiger denne relation at

$$z_{ij} = \frac{e^{c+s_i+t_j}}{1+e^{c+s_i+t_j}}, \tag{48}$$

der med betegnelserne

$$e^{c+s_i} = S_i,\ e^{t_j} = T_j \tag{49}$$

forenkles til

$$z_{ij} = \frac{S_i\, T_j}{1 + S_i\, T_j},\ 1 - z_{ij} = \frac{1}{1 + S_i\, T_j}. \tag{50}$$

Denne model er for så vidt den samme som den, der i de senere år i udstrakt grad har været anvendt til analyse af enkeltpersoners sekvenser af responser på en serie af spørgsmål, hvert med to svarmuligheder (se f.eks. Kap. 12 og 13 i Ulf Christiansen og Jon Stene (1969), herefter citeret som GR's Lærebog), men her er den anvendt til studium af befolkningsgrupper.

Referencerammen fra afsnittene 8 og 10 med objekter, agentier og reaktioner fungerer også her: objekterne kan være tidsperspektiverne, der udsættes for fædrenes sociale status som agentier og resulterer i bestemte sandsynligheder for som 8. års skoleelever at komme i 1. real. Hertil føjes så at i reaktionen, som helt bestemt af objekt- og agensparameter, ligger en forudsætning om, at *alle elever i samme* (i, j)*-gruppe har samme sandsynlighed* z_{ij} *for at havne i 1. real.* In casu er denne sandsynlighed bestemt af de to parametre S_i og T_j, nemlig gennem formel (50), hvis exponentielle version (48) viser, at *denne reaktion er latent skalært additiv.*

Idet endelig de tilfældige momenter i elevernes placeringer formodes at være hinanden uvedkommende, hvilket formaliseres som »stokastisk uafhængighed«, følger binomialfordelingen (45), der med specialiseringen (50) antager formen

$$p\{a_{ij}\} = \binom{n_{ij}}{a_{ij}} \cdot \frac{S_i^{a_{ij}} \cdot T_j^{a_{ij}}}{(1 + S_i\, T_j)^{n_{ij}}}. \tag{51}$$

Denne form for anvendelse af de såkaldte »Målingsmodeller« er behandlet i GR's Lærebog under betegnelsen »Fordelingsanalyse«, hvor modellen (51) dog kun er nævnt en passant, men en vis side af teorien for den er udarbejdet af Poul Chr. Pedersen (1971).

15. *Adskillelse af parametre og specifikt objektiv estimation.* Beregningerne i afsnit 13 ville have ført til en specifikt objektiv bestemmelse af parametrene c, s_i og t_j, i fald (48) havde været en fremstilling af selve de iagttagne relative hyppigheder. Men da dette ikke er tilfældet, står det spørgsmål tilbage om det er muligt at estimere parametrene med specifik objektivitet. Det skal nu undersøges, idet vi her begrænser os til sammenligningen af to tidsperspektiver j og k på grundlag af en vilkårlig status i.

Da grupperne (i, j) og (i, k) består af forskellige elever tør stokastisk uafhængighed mellem a_{ij} og a_{ik} forudsættes. Ifølge (51) har vi da

$$p\{a_{ij}, a_{ik}\} = p\{a_{ij}\}\, p\{a_{ik}\} = \binom{n_{ij}}{a_{ij}}\binom{n_{ik}}{a_{ik}} \frac{S_i^{a_{ij}+a_{ik}} \cdot T_j^{a_{ij}}\, T_k^{a_{ik}}}{(1+S_iT_j)^{n_{ij}}(1+S_iT_k)^{n_{ik}}}. \tag{52}$$

I dette udtryk optræder S_i i potensen $a_{ij}+a_{ik}$ og sandsynligheden for en bestemt værdi r af denne sum finder man ved at skrive sandsynligheden $p\{a_{ij}, a_{ik}\}$ ned for hvert eneste muligt værdipar (a_{ij}, a_{ik}) med denne sum og lægge dem sammen. Derved får vi

$$p\{r\} = \frac{f_r(T_j, T_k)\, S_i^r}{(1+S_i\, T_j)^{n_{ij}}\, (1+S_i\, T_k)^{n_{ik}}} \tag{53}$$

hvori polynomiet

$$f_r(T_j, T_k) = \sum_{a_{ij} + a_{ik} = r} \binom{n_{ij}}{a_{ij}}\binom{n_{ik}}{a_{ik}} T_j^{a_{ij}}\, T_k^{a_{ik}} \tag{54}$$

er homogent af graden r i T_j og T_k.

Divideres sandsynligheden (53) op i $p\{a_{ij}, a_{ik}\}$ givet ved (52), får man den betingede sandsynlighed for netop de to antal a_{ij} og a_{ik} under forudsætning af at deres sum er r:

$$p\{a_{ij}, a_{ik} \mid a_{ij} + a_{ik} = r\} = \binom{n_{ij}}{a_{ij}}\binom{n_{ik}}{a_{ik}} \cdot \frac{T_j^{a_{ij}}\, T_k^{a_{ik}}}{f_r(T_j, T_k)} \tag{55}$$

Det vil ses, at ved denne procedure er S_i blevet elimineret, så at sandsynligheden (55) ikke afhænger af andre parametre end forholdet mellem T_j og T_k.

Dette forhold kan man altså estimere på grundlag af ethvert i, og under forudsætning af modellen skal alle disse estimater (in casu 4) være statistisk forligelige.

Om de er det kan man i konkrete tilfælde efterprøve ved at sammenholde de enkelte par (a_{ij}, a_{ik}) med totalen (a_{oj}, a_{ok}), men formlen herfor, såvel som et udvidet formelsystem der inddrager alle (16) par (i, j) på én gang, skal jeg lade ligge ved denne lejlighed.

Her skal omtales hovedresultatet, hvoraf den første del er en generalisation af (55):

Ethvert sæt af T'er kan estimeres og vurderes uafhængigt af både de øvrige T'er og alle S'er og omvendt, for såvidt som modellen (51) i forbindelse med stokastisk uafhængighed af de observerede antal, er rigtig.

Modelhypotesen kan efterprøves uafhængigt af alle parametrene.

For den her omtalte *stokastiske model* gælder det samme som blev fremhævet for de *determinerede modeller* i afsnit 7, at *det eneste ukendte i referencesystemet er parametrene, og at sammenligninger mellem objekter såvel som mellem agentier (jf. formel (55)) kan foretages ud fra hvad der er kendt* – nemlig de observerede data (a_{ij}, givet n_{ij}) – *upåvirket af alt hvad der er ukendt indenfor referencesystemet. De herpå beroende statistiske udsagn om parametrene kan derfor betegnes som specifikt objektive.*

Det er herefter et oplagt spørgsmål, hvilke modeller der har denne bemærkelsesværdige egenskab. Matematisk set er mulighederne stærkt begrænsede. Idet vi holder os til den foreliggende situation med kun *to mulige udfald i hvert enkelt tilfælde og stokastisk uafhængighed mellem tilfældenes udfald, så er den med (45) og (50) givne sandsynlighedsmodel* – på nær trivielle transformationer – *den eneste der tillader specifikt objektiv adskillelse af objekt- og agensparametre.*

For beviset kan henvises til kapitel 13 i G.R.'s Lærebog.

16. *Orientering mod processer.* Den teori for specifik objektivitet og latent skalær additivitet, der er udviklet i afsnittene 1-7 og 8-10 såvel som de to anvendelser i afsnittene 11 og 13-15 behandler kun stillestående systemer, hvor alle reaktioner er bestemt af to faste sæt af parametre.

Gennem de to næste eksempler skal vi nærme os problemstillinger der har med ændringer af et system at gøre. På sådanne områder ligger de stokastiske problemer imidlertid adskilligt dybere end i det sociologiske eksempel, så ved denne lejlighed må jeg begrænse mig til antydninger.

I behandlingen af de to talmaterialer skal vi derfor lade disse problemer ligge og nøjes med at påpege »de store træk« – hvorved de i øvrigt bliver eksempler på, hvad jeg ved anden lejlighed har kaldt »numerisk statistik«. Herved fremtræder strukturer, der ved senere studier må søges indarbejdet i de »stokastiske processer« der kan tænkes at have frembragt talmaterialerne.

17. *Præliminær analyse af en række lønudviklingskurver.* Fra Arbejdsgiverforeningens publikation *Statistikken* for årene 1953-69 har P. Toft-Nielsen og Steffen Møller ekstraheret timelønnen pr. år i 9 større områder, »industrier«, og stillet materialet til rådighed for mig. Ordnet efter timelønnen i 1969 er det gengivet i tabel 5[3], som i fig. 2 er illustreret med forløbet i 4 karakteri-

3. Ved et uheld blev *J*, der er totalen af alle 9 industrier regnet som endnu en industri, men som det vil kunne ses af fig. 3 nedenfor kommer det ikke til at spille nogen praktisk rolle for den følgende analyse.

Tabel 5. Gennemsnitlige timelønninger $x_i(t)$

Industrier	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
E Papir og Grafik	404	428	451	502	524	545	609
J Fremstillingsvirksomheder i alt(*)	390	408	423	457	479	498	541
I Jern og Metal	418	422	440	473	498	518	550
D Træ og Møbler	394	407	421	453	476	485	547
H Sten, Ler og Glas	373	392	405	438	457	473	518
A Nærings- og Nydelsesmidler	340	357	372	403	425	441	481
G Kemisk	349	373	387	422	438	454	490
F Læder og Lædervarer	407	416	437	473	490	504	558
B Tekstil	318	331	341	373	390	405	429
C Beklædning og Fodtøj	307	319	333	360	380	391	435

Note: (*) Jf. teksten.

stiske tilfælde. De resterende forløber efter mønstret i de 3 kurver, medens retningen af den fjerde kurve (F) går på tværs af alle de 8 øvrige. Disse 8 kurver forløber i forskelligt niveau og med forskellig stigning, men selv om nogle kan være praktisk taget sammenfaldende *skærer* de ikke hinanden. Hvad den singulære F angår så skærer den flere af de 8 kurver til gavns, men det typiske forløb – i begyndelsen en svag stigning, som efterhånden afløses af en stærkere og stærkere stigning, hvilket frembringer et kraftigt krumliniet forløb med hulheden vendende opad – har den fælles med de 8, blot er stigningstakten svagere.

Hermed synes der at være grund til at søge efter en fælles struktur for alle 9 industrier, eventuelt en latent skalær additivitet. Denne mulighed er – i virkeligheden dog kun for fuldstændigheds skyld – efterprøvet under anvendelse af den i afsnit 9 anførte metode med et resultat, som – hvad dog ikke skal demonstreres her – var komplet negativt.

Men det var netop hvad der måtte forventes, da lønningerne i de successive år jo ikke er et fikseret system hvor hvert års timeløn bestemmes uden hensyn til niveauet i de foregående år. Det er netop et system i bevægelse: hvert års timeløn i en industri fremgår – gennem overenskomstforhandlinger og lønglidninger – af det (eller de) foregående års timeløn.

Som en første, muligvis anvendelig, approksimation skal vi undersøge om lønstigningen mellem to tidspunkter t_1 og t_2 for den enkelte industri (nr. i) kan formaliseres som en kontinuert forløbende proces, hvis retning på hvert mellemliggende tidspunkt t er betinget af 3 faktorer: industriens timeløn på dette tidspunkt, de for alle industrierne fælles øjeblikkelige generelle økonomiske forhold, og de særlige forhold der gælder for den betragtede industri og som tænkes konstant over hele åremålet.

Idet industriens timeløn på tidspunktet t betegnes $x_i(t)$, vil stigningens hastighed $x_i'(t)$ da afhænge af $x_i(t)$ selv, af en »generel økonomisk udvik-

for 9 industrier i årene 1953-69.

1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
650	734	784	854	931	1046	1175	1277	1426	1558
579	659	719	776	839	942	1059	1156	1277	1411
601	676	747	803	864	958	1079	1164	1261	1387
585	651	715	768	836	930	1035	1117	1253	1373
542	637	683	733	789	887	993	1085	1203	1339
510	585	619	668	723	829	935	1023	1158	1298
522	611	647	700	748	835	950	1048	1173	1287
567	620	674	715	763	855	950	1018	1153	1227
458	516	558	611	665	745	840	918	1031	1137
455	515	569	617	671	756	845	918	1029	1122

lingsfunktion« $f'(t)$ for alle industrierne, og af en konstant parameter b_i der er speciel for den pågældende industri.

Hvis der i dette system skulle herske en latent skalær additivitet eller, in

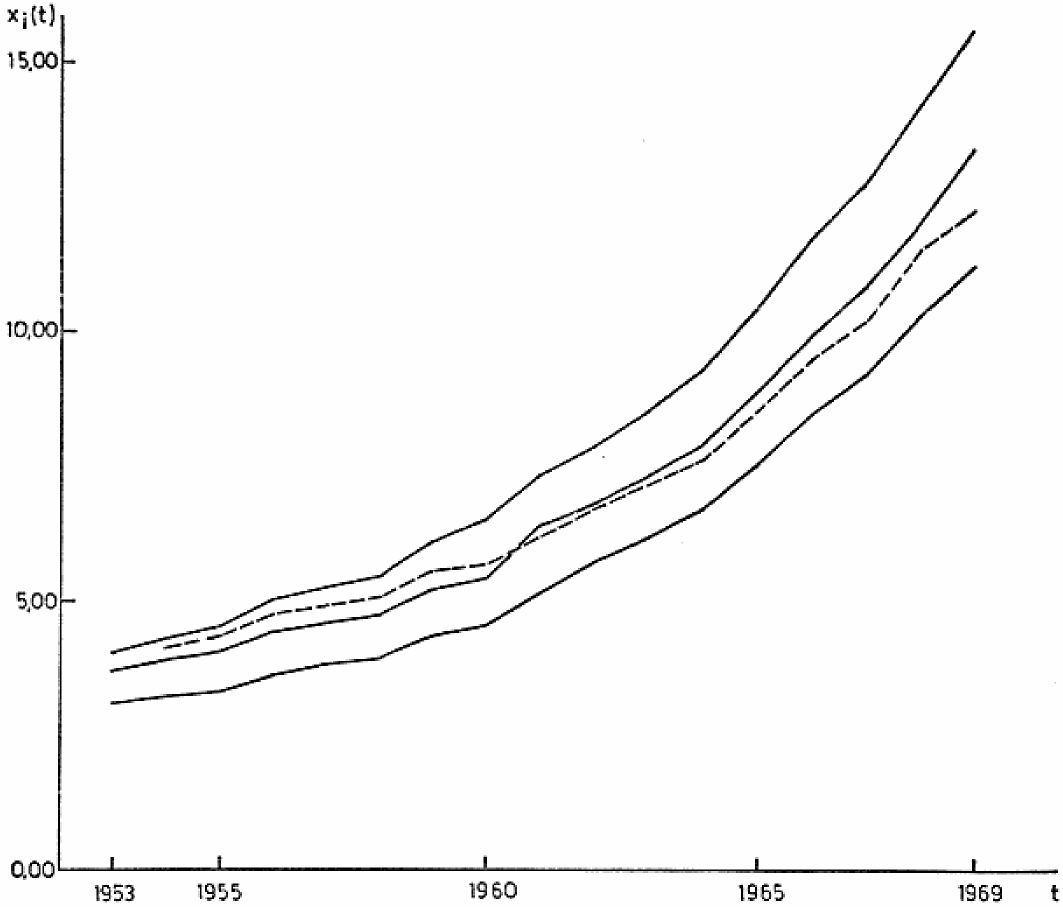

Fig. 2. De gennemsnitlige timelønninger $x_i(t)$ mod tiden t i 4 udvalgte industrier.

Tabel 6. Logaritmerne til timelønningerne $y_i(t) = \log x_i(t)$, i tabel 5.

$i \backslash t$	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
E	2,606	2,631	2,654	2,701	2,719	2,736	2,785	2,813	2,866	2,894
J	2,591	2,611	2,626	2,660	2,680	2,697	2,733	2,763	2,819	2,857
I	2,621	2,625	2,643	2,675	2,697	2,714	2,740	2,779	2,830	2,873
D	2,595	2,610	2,624	2,656	2,678	2,686	2,738	2,767	2,814	2,854
H	2,572	2,593	2,607	2,641	2,660	2,675	2,714	2,734	2,804	2,834
A	2,531	2,553	2,571	2,605	2,628	2,644	2,682	2,708	2,767	2,792
G	2,543	2,572	2,588	2,625	2,641	2,657	2,690	2,718	2,786	2,811
F	2,610	2,619	2,640	2,675	2,690	2,702	2,747	2,754	2,792	2,829
B	2,502	2,520	2,533	2,572	2,391	2,607	2,632	2,661	2,713	2,747
C	2,487	2,504	2,522	2,556	2,580	2,592	2,638	2,658	2,712	2.755
$y.(t)$	2,565	2,583	2,601	2,635	2,656	2,671	2,710	2,736	2,790	2,824
$g(t)$	–0,239	–0,221	–0,203	–0,169	–0,148	–0,133	–0,094	–0,068	–0,014	0,020

casu mere bekvemt, en latent skalær multiplikativitet, måtte der eksistere to sådanne funktioner den ene, f, af reaktionen $x_i'(t)$ og den anden, h, af det ene agens $x_i(t)$ – medens der ikke er grund til at transformere b_i og $g'(t)$ – for hvilke det gælder at

$$f(x_i'(t)) = b_i\, g'(t)\, h(x_i(t)). \tag{56}$$

At bestemme de ubekendte – funktionerne f, g, h og konstanterne b_i – direkte udfra $x_i'(t)$ og $x_i(t)$ *som eksakt givne*, ville måske nok være teoretisk muligt, men da vi i så fald skulle op til differentialkvotienter af både 3. og 4. orden, vil det i hvert fald være uigennemførligt når de pågældende data er belastet med, hvad der må anses for målefejl og andre tilfældige variationer.

For nærværende skal vi i stedet forsøge den ganske simple antagelse

$$f(x_i'(t)) = x_i'(t), \quad h(x_i(t)) = x_i(t), \tag{57}$$

altså gå ud fra ligningen

$$x_i'(t) = b_i\, g'(t)\, x_i(t) \tag{58}$$

der integreres til

$$\log x_i(t) = a_i + b_i\, g(t), \tag{59}$$

hvori a_i er en integrationskonstant.

En afprøvning af denne model samtidig med en empirisk bestemmelse af funktionen $g(t)$ og de to sæt konstanter a_i og b_i er en relativt let sag: Beregnes gennemsnittet af

$$y_i(t) = \log x_i(t) \tag{60}$$

over industrierne fås

$$y.(t) = a. + b.\, g(t). \tag{61}$$

Gennemsnit $y.(t)$ af $y_i(t)$ over i samt hældning b_i og position a_i af linierne i fig. 3.

	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	$a_i = \overline{y}_i$	b_i
E	2,932	2,969	3,020	3,070	3,110	3,154	3,192	2,862	1,024
J	2,890	2,924	2,974	3,025	3,063	3,106	3,149	2,820	1,020
I	2,905	2,937	2,981	3,033	3,066	3,100	3,142	2,832	0,970
D	2,885	2,922	2,968	3,015	3,048	3,098	3,138	2,815	0,992
H	2,865	2,897	2,948	2,997	3,035	3,080	3,127	2,797	1,000
A	2,825	2,859	2,919	2,971	3,010	3,063	3,114	2,760	1,044
G	2,845	2,874	2,922	2,978	3,020	3,069	3,110	2,775	1,016
F	2,854	2,883	2,932	2,978	3,008	3,062	3,085	2,802	0,870
B	2,786	2,823	2,872	2,924	2,963	3,013	3,056	2,725	0,994
C	2,790	2,827	2,879	2,927	2,963	3,012	3,046	2,715	1,024
$y.(t)$	2,858	2,891	2,941	2,991	3,029	3,076	3,116	$\overline{y}.=2{,}804$	
$g(t)$	0,054	0,087	0,137	0,187	0,225	0,272	0,312		

Hvis der eksisterer et $g(t)$ kan vi som et sådant simpelthen tage $y.(t)$ (eller en lineær transformation af det), hvilket indsat i (59) giver

$$y_i(t) = a_i' + b_i' y.(t), \quad b_i' = b_i/b., \; a_i' = a_i - a.b_i'. \tag{62}$$

Denne ligning udsiger at, hvis modellen (59) holder og vi for hver industri tegner et diagram med de successive værdier af $y_i(t)$ for $t = 1953, \ldots, 1969$ som ordinater mod de tilsvarende værdier af $y.(t)$ som abscisser, så skal punkterne ligge på en ret linie hvis hældning er b_i'. Som position kan vi vælge f. eks. den ordinat på linien hvis abscisse er $\overline{y}.$ = gennemsnittet af $y.(t)$ over t. Vi sætter altså

$$g(t) = y.(t) - \overline{y}. \,. \tag{63}$$

I praksis får vi selvfølgelig kun en slags skøn over a_i'er, b_i'er og $g(t)$, og kontrollen kan i bedste fald kun give punkter der ligger mere eller mindre tæt omkring rette linier.

I tabel 6 findes logaritmerne til timelønningerne samt deres gennemsnit over i, og fig. 3 viser kontroldiagrammerne med ordinatnulpunkterne for de forskellige industrier parallelforskudt i forhold til hinanden.

Det ses at punkterne smyger sig temmelig tæt omkring de respektive rette linier så at modellen (59) og dermed (58) må siges at give en tilfredsstillende fremstilling af de foreliggende data.

Det bemærkes at hældningen for industrien F, som det måtte ventes, er en del mindre end for de øvrige otte, men også at forskelle af en vis betydning mellem disse hældninger kan erkendes[4].

4. Under supplerende forudsætninger om de tilfældige variationer kan man selvfølgelig gennemføre en regulær statistisk analyse, som jeg til det foreliggende formål har afstået fra. Et muligt middel hertil er givet af C. R. Rao (1958).

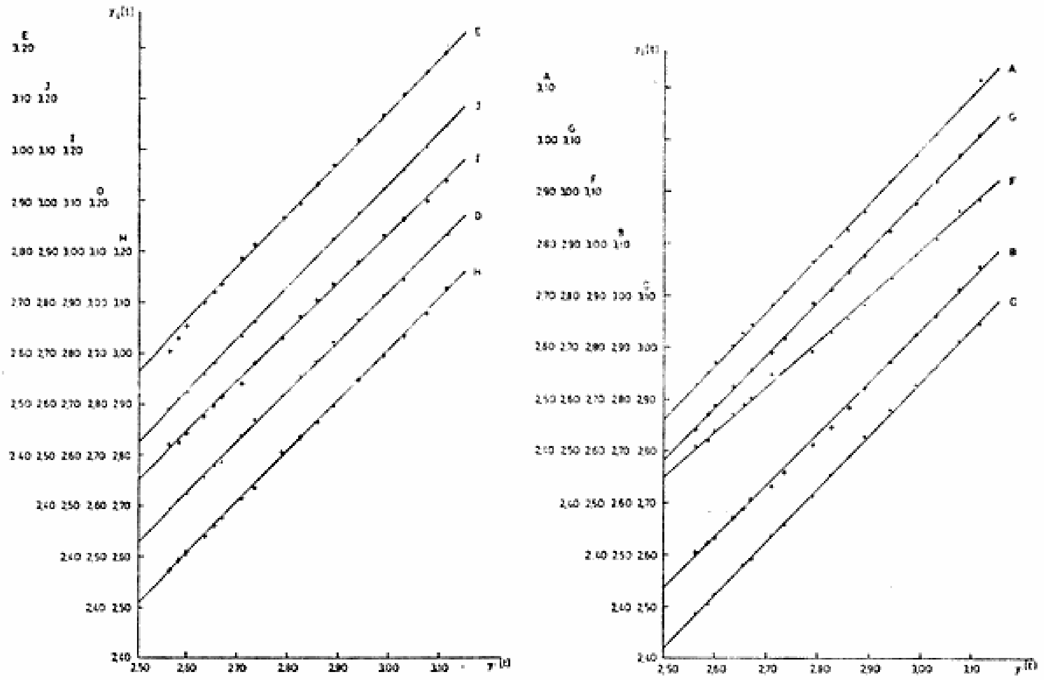

Fig. 3. Logaritmerne til de årlige timelønninger pr. virksomhed $y_i(t)$ mod deres gennemsnit $y.(t)$.

Estimatet af funktionen $g(t)$ er anført som nederste linie i tabel 6, hvori også skønnene over positioner a_i og hældninger b_i findes som de to yderste søjler til højre.

For fuldstændigheds skyld er den fundne funktion tegnet op i fig. 4, hvoraf man kan aflæse at i de første 5 år svarer forløbet af $g(t)$ til en årlig lønstigning omkring 5%, medens den i de sidste 5 år har ligget på omkring 11%, for F noget lavere og for A lidt højere.

18. *Objektiv vurdering af procesparametre.* Med de fundne resultater er det, også teknisk set, helt klart hvorfor den første afprøvning brød fuldstændig sammen: $x_i(t)$ som bestemt af tidspunkt og industri indeholder *en skalær parameter* $g(t)$ *pr. tidspunkt, men en todimensional parameter* (a_i, b_i) *pr. industri,* medens teorien i afsnittene 1-10 forudsætter, at der kun foreligger éndimensionale parametre.

Under betragtningen af lønudviklingen som en proces får vi derimod, som det ses af (58) omskrevet til

$$\frac{x_i'(t)}{x_i(t)} = \frac{d\log x_i(t)}{dt} = b_i\, g'(t), \tag{64}$$

multiplikativiteten frem, når vi opfatter log $x_i(t)$, og ikke $x_i(t)$ selv, som det der ændrer sig.

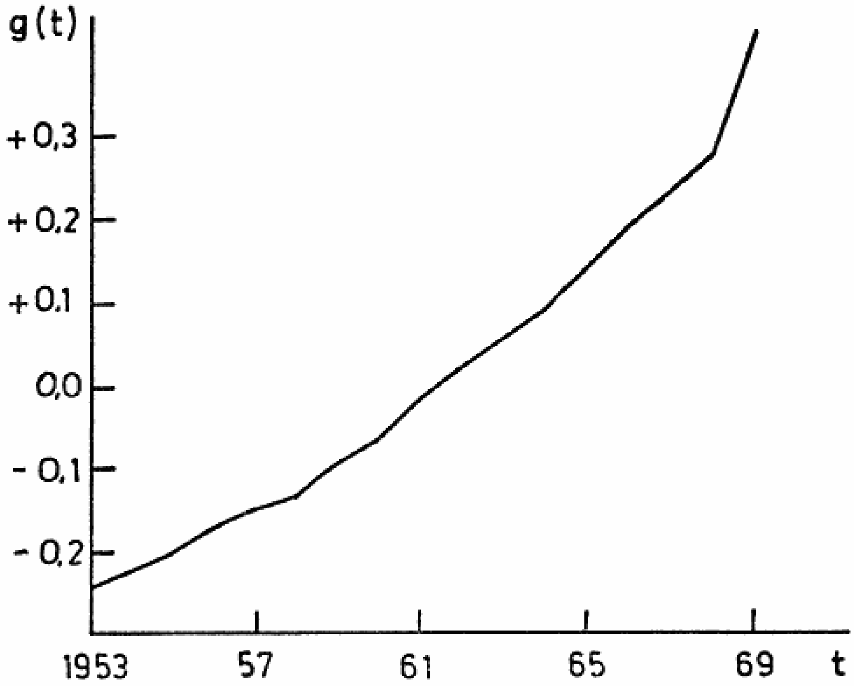

Fig. 4. Forløbet af $g(t) = y.(t) - \bar{y}.$ med tiden.

Under dette processynspunkt er vi således kommet frem til den latente skalære additivitet af to sæt parametre, industriparameteren b_i og den generelle forløbsparameter $g'(t)$, som dermed kan vurderes specifikt objektivt. Derimod falder bestemmelsen af a_i udenfor den udviklede objektivitetsteori.

For øvrigt svarer formuleringen (64) til, at man under lønforhandlinger og -glidninger måske nok *taler om* kroner og ører, men i virkeligheden *tænker i* relative lønforbedringer (jf. slutbemærkningen i afsnit 17).

19. *En struktur i et dødelighedsmateriale.* Det tredje eksempel, som er hentet fra demografien, handler om variationen af dødsintensiteten med alderen for mænd i Danmark i årene 1906-1955, alderen x (5-75 år) for hvert 5. år og kalenderåret t grupperet i intervaller på 5 år. Ved dødsintensiteten forstås her – i princippet – den andel, beregnet pr. 100 000, blandt dem der i tidsrummet (t, $t+5$) fyldte x år, som døde før deres næste fødselsdag.

Grundmaterialet i tabel 7 udviser selvsagt meget store variationer med alderen, hvilket vanskeliggør umiddelbare sammenligninger mellem alderstrinnene. Som et forsøg på at bøde herpå tages logaritmerne som ses i tabel 8, og virkningen heraf er illustreret i fig. 5 som for hvert alderstrin viser, hvorledes log q_{xt} har ændret sig i løbet af 50 år. Forløbene er ret jævne – for aldrene op til 40 år dog afbrudt af kraftige knæk opad for $t = 1916$, dvs. for femåret

Tabel 7. Dødsintensiteter q_{xt} for Mænd i Danmark 1906-55 (x = alder; t = tidsrum).

x \ t	1906	1911	1916	1921	1926	1931	1936	1941	1946	1951
5	285	275	299	183	168	134	136	113	86	68
10	181	160	194	127	118	113	98	88	59	42
15	248	206	265	160	163	147	108	113	73	53
20	386	405	654	323	288	256	206	209	158	122
25	404	412	638	328	249	266	224	225	170	128
30	447	462	664	328	291	268	228	223	187	145
35	528	530	647	335	323	324	281	258	211	157
40	689	609	644	434	450	401	389	335	291	221
45	938	804	756	588	562	584	525	462	455	364
50	1187	1138	1024	805	830	832	754	740	664	618
55	1707	1538	1487	1220	1208	1244	1191	1087	1053	986
60	2389	2342	2066	1937	1977	1866	1885	1710	1626	1536
65	3403	3358	3200	3059	2989	3097	2886	2633	2493	2473
70	5363	5122	4730	4755	4660	4825	4901	4375	4053	3951
75	8079	8316	7589	7794	7671	7837	7729	7044	6668	6484

Kilde: Befolkningsudvikling og Sundhedsforhold 1901-60, udg. af Det statistiske Departement, Statistiske Undersøgelser, nr. 19. København 1966, tabel 23.

Tabel 8. Logaritmer til dødsintensiteter $l_{xt} = \log q_{xt}$.

x \ t	1906	1911	1916	1921	1926	1931	1936	1941	1946	1951	a_x	d_x
5	2,455	2,439	2,476	2,262	2,225	2,127	2,134	2,053	1,940	1,833	2,21	1,62
10	2,258	2,204	2,258	2,104	2,072	2,053	1,991	1,944	1,771	1,623	2,03	1,54
15	2,394	2,314	2,423	2,204	2,212	2,167	2,033	2,053	1,863	1,724	2,15	1,60
20	2,587	2,607	2,816	2,509	2,459	2,408	2,314	2,320	2,199	2,086	2,41	1,30
25	2,606	2,615	2,805	2,516	2,396	2,425	2,350	2,352	2,233	2,107		
30	2,650	2,665	2,822	2,516	2,464	2,428	2,358	2,348	2,272	2,161	2,47	1,30
35	2,723	2,724	2,811	2,525	2,509	2,511	2,449	2,412	2,324	2,196		
40	2,838	2,785	2,809	2,637	2,653	2,603	2,590	2,525	2,464	2,344	2,63	1,32
45	2,972	2,905	2,879	2,769	2,750	2,766	2,720	2,665	2,657	2,561	2,79	0,98
50	3,074	3,056	3,010	2,906	2,919	2,920	2,877	2,869	2,822	2,791	2,92	0,68
55	3,232	3,187	3,172	3,086	3,082	3,095	3,076	3,036	3,022	2,994	3,11	0,52
60	3,378	3,370	3,315	3,287	3,296	3,271	3,275	3,233	3,210	3,186	3,29	0,48
65	3,532	3,526	3,505	3,486	3,476	3,491	3,460	3,420	3,397	3,393	3,47	0,36
70	3,729	3,709	3,675	3,677	3,668	3,683	3,690	3,641	3,608	3,597	3,67	0,28
75	3,907	3,920	3,880	3,892	3,885	3,894	3,888	3,848	3,824	3,812	3,88	0,32
$l_{.t}$	2,956	2,935	2,978	2,825	2,804	2,789	2,747	2,715	2,641	2,561		

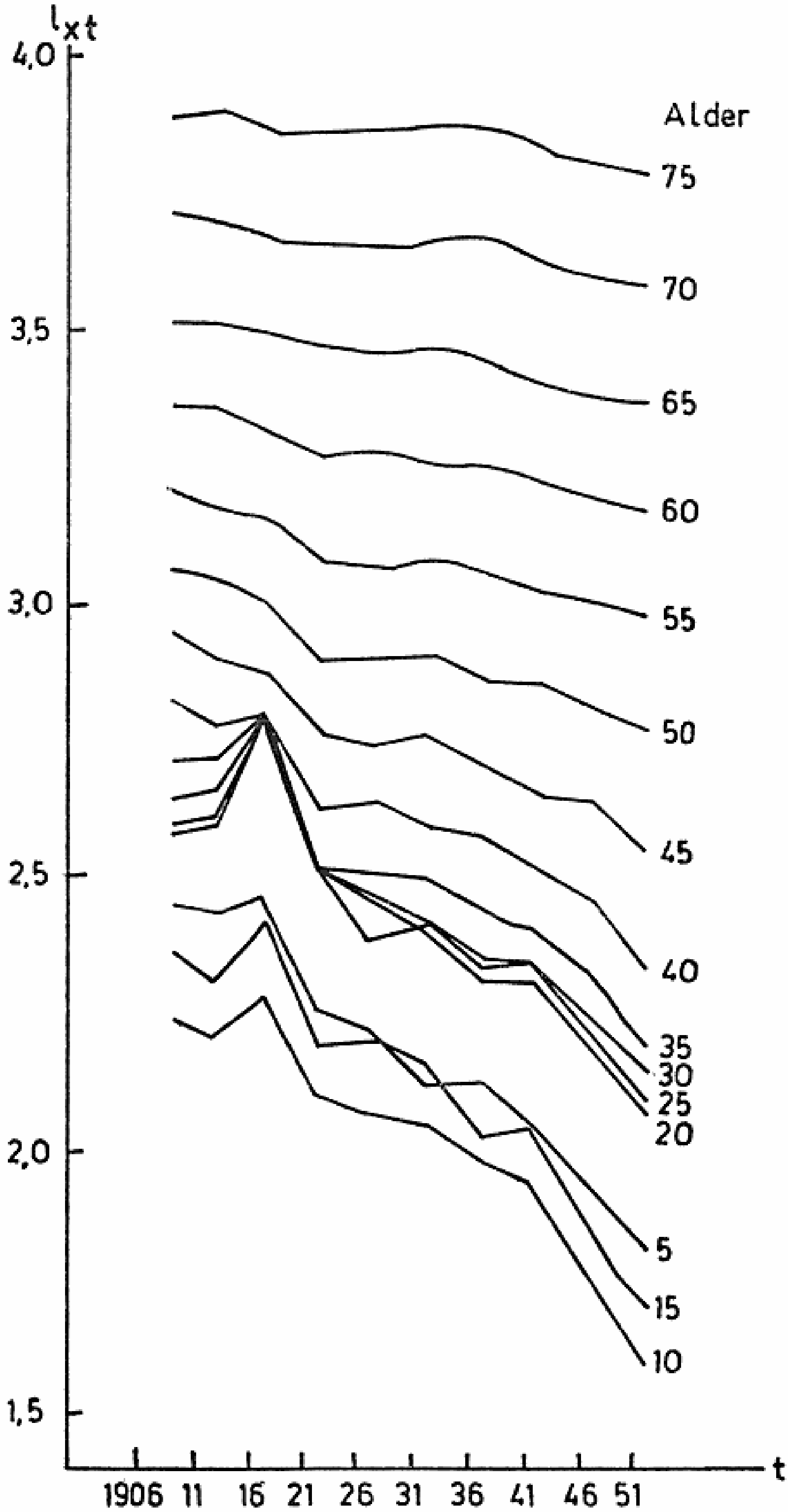

Fig. 5. Forløbet af logaritmen til dødsintensiteten med tiden for hvert alderstrin.

1916-20 med de to store epidemier af »den spanske syge«. Men udenfor denne periode – og tilsyneladende uden større varige virkninger af den – iagttages et jævnt fald gennem årene, kraftigst for børn og unge, stadig anseligt fra 40 til ca. 60 år, men fladende ud mere og mere for de ældre.

Denne iagttagelse frister til at søge en struktur, men belært af erfaringen med timelønningerne søger vi ikke direkte en latent additiv struktur, men vi skal, uanset manglen på et holdepunkt som (58), spørge rent geometrisk om kurverne i fig. 5 – i lighed med de 9 industriers logaritmiske lønninger – kan transformeres lineært over i hinanden.

Den nederste række i tabel 7 giver os gennemsnittet (»uvejet«) over aldrene for hvert tidspunkt, og med disse som abscisser indtegnes i fig. 6 for hvert alderstrin et diagram med værdierne af $l_{xt} = \log q_{xt}$ som ordinater ($x = 25$ og 35 er udeladt, da de næsten falder sammen med henholdsvis $x = 20$ og $x = 30$). Punkterne for 1916 er indrammet af cirkler og ligger som helhed ikke i flugt med de øvrige punkter, der ellers for hvert alderstrin samler sig om en ret linie. Variationerne er iøjnefaldende nok, og det er for så vidt ikke utænkeligt at man gennem nøjere granskning kunne afdække endnu et strukturlag. Men hovedsagen er, at der i hvert fald er en iøjnefaldende primær struktur der kan udtrykkes som l_{xt}'s lineære relation til $l_{.t}$ for hver aldersgruppe:

$$l_{xt} \approx a'_x + d_x\, l_{.t} = a_x + d_x\, l_t, \quad l_t = l_{.t} - \overline{l}_{.}\,. \tag{65}$$

De rette liniers hældninger d_x og positionerne a_x, bestemt som ordinaterne til abscissen for $\overline{l}_{.}$ = gennemsnittet over t af $l_{.t}$, er aflæst og indført som de to sidste søjler i tabel 7. Forløbet af tidsfunktionen $l_{.t}$ ses i fig. 7; på nær et hak opefter i det ovenfor omtalte $t = 1916$ udviser den et jævnt fald. Af fig. 8 ses, at hældningen d_x i store træk aftager monotont med alderen, dog med et plateau fra 20 til 40 år; svingningerne derudover er måske reelle nok, men kan delvist ligge i usikkerheden på den grafiske bestemmelse af hældningerne, da den er følsom overfor punkternes variationer om linierne, som jo ikke er helt små. Denne variation påvirker ikke i synderlig grad aflæsningen af positionerne a_x der da også, som det ses af fig. 9, udviser et jævnt monotont forløb på nær faldet fra 5 til 10 år, som imidlertid er ganske reelt og fremgår klart allerede af fig. 5.

20. *En kommentar til den fundne struktur.* Strukturrelationen (65) er af en nok så ejendommelig form, idet den siger, at i den pågældende periode var dødsrisikoen for mænd stort set kun bestemt af deres alder x og det tidspunkt t de havde den på, medens det der var sket forud i deres levetid – både i hygiejne, medicin, teknik, sociale forhold m.v. – i hvert fald kun spillede en sekundær rolle i forhold til den øjeblikkelige tilstand i samfundet på det tidspunkt talen er om.

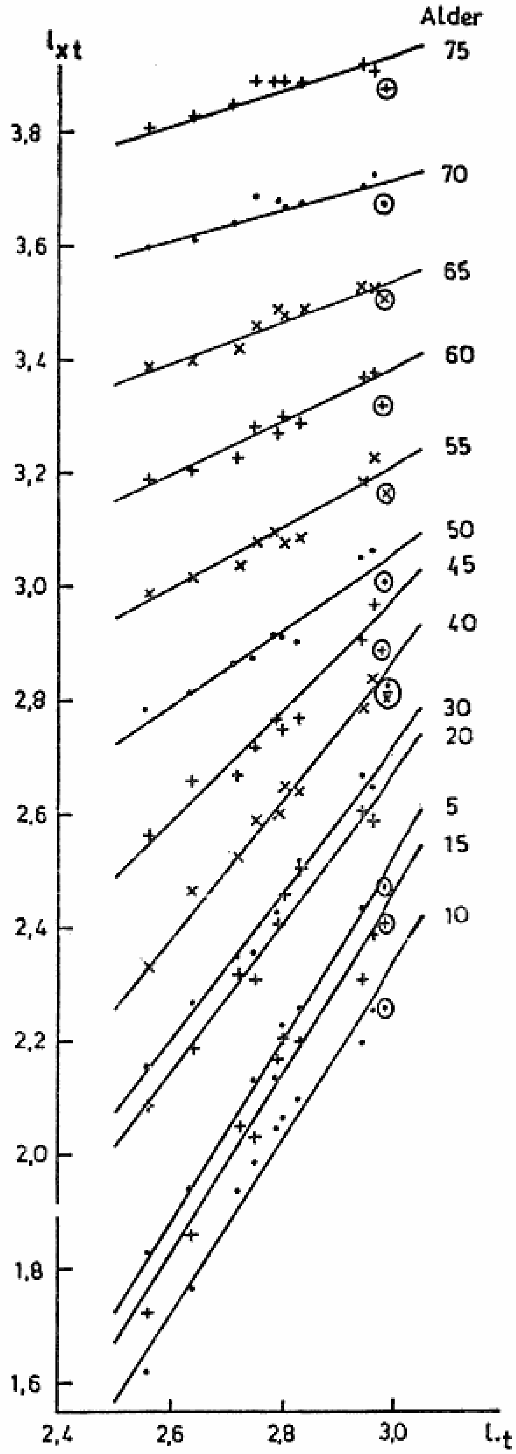

Fig. 6. Logaritmerne l_{xt} til dødsintensiteterne, for hver aldersklasse tegnet op mod deres gennemsnit $l_{\cdot t}$ pr. tidspunkt.

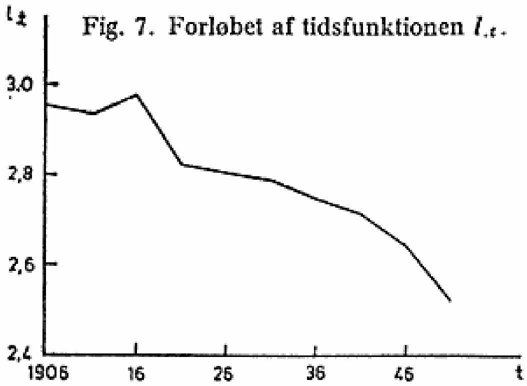

Fig. 7. Forløbet af tidsfunktionen $l_{\cdot t}$.

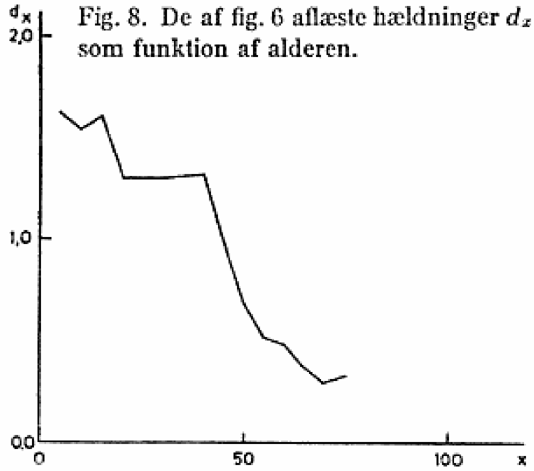

Fig. 8. De af fig. 6 aflæste hældninger d_x som funktion af alderen.

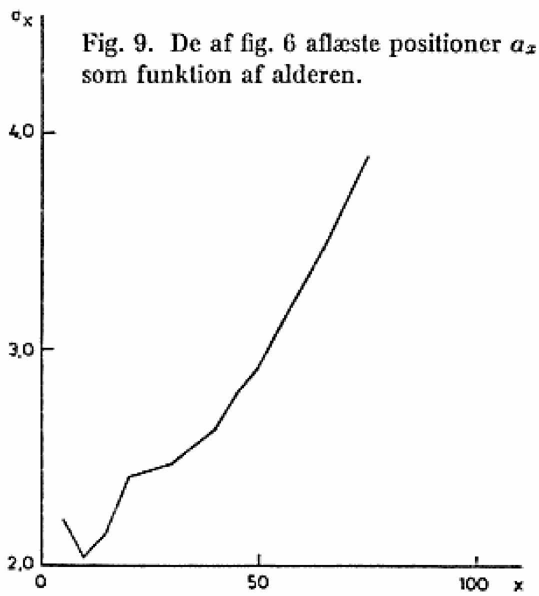

Fig. 9. De af fig. 6 aflæste positioner a_x som funktion af alderen.

Kunne et så mærkværdigt resultat mon ikke tænkes at være et – omend næsten utroligt – statistisk puds, som disse data netop fra Danmark i just de 50 år havde spillet os?

Hertil er imidlertid at sige, at P. C. Matthiessen for en halv snes år siden foretog en tilsvarende undersøgelse af svenske data og fandt et ganske lignende resultat (upubliceret). Endvidere at blandt de dødelighedsdata fra mange lande, der findes i publikationen United Nations (1955) blev 19, som havde mindst 4 registreringstidspunkter, udvalgt til en præliminær undersøgelse i et seminar på Statistisk Institut i foråret 1969 og senere analyseret mere indgående af Peter Allerup i en examensopgave: Overalt fandtes samme struktur.

Den i det danske materiale afslørede struktur synes det derefter at man må affinde sig med – om ikke som andet, så i hvert fald som et første skridt henimod formuleringen af en for mange steder i Verden fælles struktur i den regel mennesket dør efter med alderen under påvirkning af lokale temporære forhold.

21. *Objektivitetsproblemet in casu.* Med henblik på objektivitetsproblemet må først bemærkes, at betragtet lokalt har vi i (65) en lignende situation som i (64), nemlig en éndimensional parameter l_t pr. tidspunkt, men en todimensional (a_x, d_x) pr. alderstrin. Den dækkes ikke af den hidtil udviklede teori, men opfordrer til en udvidelse af rammerne så restriktionerne til éndimensionalitet af parametrene for både objekter, agentier og reaktioner løsnes. En udvidelse til højere dimensioner foreligger ganske vist, men kun under den betingelse at alle 3 slags parametre har *samme* dimension, og det er dette bånd der kan være grund til at søge ophævet.

Imidlertid kan man, ligesom i løneksemplet, anlægge det synspunkt at det der observeres, her dødsrisikoen for mænd i given alder, er noget der ændrer sig med tiden, og for denne ændring i tidsrummet (t_1, t_2) har vi ifølge (65)

$$l_{xt_2} - l_{xt_1} \approx d_x(l_{t_2} - l_{t_1}), \tag{66}$$

altså latent additivitet og dermed specifik objektivitet.

Nu er dødsintensiteterne – om man vil: deres matematiske korrelat – defineret som de logaritmiske differentialkvotienter af den andel af befolkningen – på et givet tidspunkt – der har overlevet givne aldre. Betegnes denne andel L_{xt} er altså

$$q_{xt} = \frac{\partial \log L_{xt}}{\partial x} = \frac{1}{L_{xt}} \cdot \frac{\partial L_{xt}}{\partial x}. \tag{67}$$

Men hermed er allerede indført et processynspunkt: hvorledes populationen uddør med alderen. Hvad der føjes til i (66) – eller dens differentielle modstykke

$$\frac{\partial l_{xt}}{\partial t} = d_x \cdot \frac{dl_t}{dt} \tag{66a}$$

er, også at anlægge processynspunktet på tidsforløbet.

Vi kommer da til den konklusion, at *erstattes det helt statiske synspunkt, altså populationens fordeling på alder på et givet tidspunkt, med processynspunktet for ændringer af dødsrisikoen med både alder og tid, så opnås i det betragtede tilfælde specifikt objektiv adskillelse af de skalære parametre der herefter er tilbage.*

22. *Specifik objektivitet i processer?* Analyserne af lønudviklingen indenfor industrisektoren i årene 1953-69 og af dødsrisikoens ændringer for mænd i Danmark i årene 1906-55 pegede på muligheden af at opnå specifik objektivitet i tilfælde, hvor der sker ændringer indenfor observationsperioden og hvor derfor hver iagttagelse fremstår på grundlag af den eller de foregående.

Specielt pegede de på det vigtige i, som betingelse for at få latent additivitet, ikke at tage selve lønnen, resp. selve dødsrisikoen, men ændringerne i disse som reaktion.

Disse to tilfælde må betegnes som kinetiske da talen kun er om ændringer gennem tiden, ikke om de påvirkninger der frembringer dem. Men kinetiske og dynamiske foreteelser kan sammenfattes under begrebet *processer*, hvis agentier kan være såvel egentlige påvirkninger som tidspunkter og -intervaller.

23. *Den dynamiske problemstilling.* For at få et indblik i den dynamiske problemstilling vender vi tilbage til de faste legemer der påvirkes af mekaniske flytningsinstrumenter, men fører diskussionen lidt videre.

På et vist tidspunkt bevæger et legeme L sig i forhold til Jorden med en hastighed V_0 der ændres til V_1 under en påvirkning i bevægelsesretningen af et instrument I, som meddeler det en acceleration $A = V_1 - V_0$.

I den tidligere diskussion (afsnit 2 og 3) fandt vi, at denne acceleration er proportional med en parameter for instrumentet, dets »kraft«, og omvendt proportional med en parameter for legemet, dets »masse«.

Legemet som først befandt sig i en tilstand hvori det havde hastigheden V_0, bringes ved påvirkningen over i en anden tilstand hvori det har hastigheden

$$V_1 = V_0 + G \cdot \frac{F_1}{M}, \tag{68}$$

hvor F_1 betegner instrumentets kraft og M legemets masse, jf. afsnit 3, formlerne (3) og (4).

Men nu kan legemet i sin nye tilstand påvirkes af et andet (eller det samme) instrument med kraften F_2, modtage accelerationen GF_2/M og derved bringes over i en ny tilstand med hastigheden

$$V_2 = V_1 + G \cdot \frac{F_2}{M} = V_o + G \cdot \frac{F_1 + F_2}{M}, \tag{69}$$

jf. formel (5a). Og således videre. Gennem n sådanne påvirkninger ændres initialhastigheden V_o efterhånden til

$$V_n = V_o + G \cdot \frac{F_1 + \ldots + F_n}{M} \tag{70}$$

Gennem disse ændringer bevarer legemet sin *permanente parameter*, massen M, medens *tilstandsparametren*, hastigheden V_j, gennemløber skiftende værdier.

24. *Referencerammen for processer.* Vi kan nu opstille en referenceramme for processer, i fortsættelse af den i afsnit 6 opstillede for statiken.

Vi har atter objekter O, agentier A og reaktioner R, men hertil kommer, at et objekt kan befinde sig i forskellige tilstande T og at overgangen fra en tilstand til en anden sker ved en transformation, der frembringes af den reaktion R et agens A fremkaldte på objektet i den foregående tilstand. Forløbet kan skematiseres således:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A_1 & & & & A_2 & & \ldots \\ O_o^{(1)} & : & R_1^{(1)} & \rightarrow & O_1^{(1)} & : & R_2^{(1)} & \rightarrow & O_2^{(1)} : \ldots \\ O_o^{(2)} & : & R_1^{(2)} & \rightarrow & O_1^{(2)} & : & R_2^{(2)} & \rightarrow & O_2^{(2)} : \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{71}$$

hvori O's øvre index er objektets identifikation som bevares under hele processen, medens O's nedre index markerer de skiftende tilstande.

Formålet med den følgende analyse er at udvikle redskaber til sammenligninger indenfor denne referenceramme: Sammenligninger mellem objekter med henblik på, hvorledes den betragtede slags processer forløber. Heri ligger at problemstillingen ikke er beskrivelsen af et enkelt forløb, f. eks. en enkelt tidsrække, lad os sige i prisudviklingen for kartofler i Danmark fra 1919 til 1965, men snarere prisudviklingen for mange slags grønsager og andre fødevarer, evt. andre varer. Endvidere sammenligninger mellem tilstande, uanset hvilke objekter de optræder hos. Og endelig sammenligninger mellem agentier, sådan som de virker på hvilkesomhelst tilstande hos hvilkesomhelst objekter.

25. *Parametrisering og specifik objektivitet for processer.* I parametriseringen indgår agensparametre a, objekternes permanente parametre o og deres til-

standsparametre t samt reaktionernes parametre r, som i hver given situation er entydigt bestemt af de 3 andre parametre:

$$r = r(o, t, a). \tag{72}$$

I lighed med hvad der blev gjort i det statiske tilfælde i afsnit 10 betegner vi her en sammenligning af f.eks. to objekter med parametrene o_1 og o_2 som specifikt objektiv, hvis den er uafhængig af de øvrige parametre i referencerammen. Idet udsagnet må være baseret på hvad der er kendt, nemlig de observerede reaktioner r, indebærer kravet eksistensen af en funktion u af de to r'er, som kun afhænger af de to o'er, der skal sammenlignes, altså

$$u(r(o_1, t, a),\ r(o_2, t, a)) = v(o_1, o_2), \tag{73}$$

jf. formel (24).

Idet vi stadig begrænser os til skalære parametre kan det vises, at *stiller man kravet om specifik objektivitet i alle 3 retninger, så må reaktionen r være latent additiv i alle 3 variable.*

Beviset herfor forløber omtrent parallelt med det, der blev givet i afsnit 10.

Ved skiftevis at differentiere (73) med hensyn til alle 4 variable fås 4 ligninger hvoraf de to differentialkvotienter af u med hensyn til $r_1 = r(o_1, t, a)$ og $r_2 = r(o_2, t, a)$ kan elimineres, hvorved man får

$$\frac{\partial r_1}{\partial t}\left(\frac{\partial r_1}{\partial o_1}\right)^{-1}\frac{\partial v}{\partial o_1} + \frac{\partial r_2}{\partial t}\left(\frac{\partial r_2}{\partial o_2}\right)^{-1}\frac{\partial v}{\partial o_2} = 0 \tag{74}$$

og den analoge med differentiation med hensyn til a. Giver man heri t og a specielle værdier t_0 og a_0 og indfører betegnelsen

$$\left.\frac{\partial r(o, t, a)}{\partial t}\left(\frac{\partial r(o, t, a)}{\partial o}\right)^{-1}\right|_{\substack{t = t_0 \\ a = a_0}} = f_1^{-1}(o)\,, \tag{75}$$

fås

$$\frac{\partial r_1}{\partial t}\left(\frac{\partial r_1}{\partial o_1}\right)^{-1} f_1(o_1) = \frac{\partial r_2}{\partial t}\left(\frac{\partial r_2}{\partial o_2}\right)^{-1} f_1(o_2) \tag{76}$$

og den analoge ligning. Heraf følger at disse fire udtryk kun afhænger af t og a, og vi kan derfor samle ligningerne i

$$f_1^{-1}(o)\ \frac{\partial r}{\partial o} = g_1^{-1}(t, a)\ \frac{\partial r}{\partial t} = h_1^{-1}(t, a)\ \frac{\partial r}{\partial a}\,. \tag{77}$$

For den specifike objektivitet i de to andre retninger fås på samme måde

$$f_2^{-1}(t)\ \frac{\partial r}{\partial t} = g_2^{-1}(o, a)\ \frac{\partial r}{\partial o} = h_2^{-1}(o, a)\ \frac{\partial r}{\partial a} \tag{78}$$

og

$$f_3^{-1}(a)\,\frac{\partial r}{\partial a} = g_3^{-1}(o,\,t)\,\frac{\partial r}{\partial o} = h_3^{-1}(o,\,t)\,\frac{\partial r}{\partial t}\,. \tag{79}$$

Men skal de tre sæt ligninger gælde samtidigt må de kunne reduceres til ét sæt af formen

$$f_1^{-1}(o)\,\frac{\partial r}{\partial o} = f_2^{-1}(t)\,\frac{\partial r}{\partial t} = f_3^{-1}(a)\,\frac{\partial r}{\partial a}\,, \tag{80}$$

der med

$$\bar{o} = \int f_1(o)do,\quad \bar{t} = \int f_2(t)dt,\quad a = \int f_3(a)da \tag{81}$$

som nye variable og med betegnelsen

$$r(o,\,t,\,a) = \bar{r}\,(\bar{o},\,\bar{t},\,\bar{a}) \tag{82}$$

reduceres til

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{o}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial r}{\partial \bar{a}} \tag{83}$$

med en vilkårlig funktion af $\bar{o} + \bar{t} + \bar{a}$ som den fuldstændige løsning.

26. *Status og perspektiver.* Min hensigt med denne afskedsforelæsning har været at give tilhørerne et indblik i de tankebaner, som studier indenfor psykologien i 50'erne og som overtagelsen af lærestolen i Teoretisk Statistik som Redskab indenfor Samfundsvidenskaberne provokerede mig til at tage op på en bred basis.

Teorien er, så vidt den er udformet, allerede ganske omfattende, så ved denne lejlighed var en kraftig beskæring nødvendig. Denne er foretaget i to retninger, dels gennem en begrænsning til tilfælde hvor alle parametre er éndimensionale, hvilket medfører at både resultater og beviser bliver relativt simple; dels ved i indetermineredc tilfælde at nøjes med den situation, hvor kun 2 forskellige responser er mulige.

Endimensionaliteten sikrer at reaktionerne – som i det indeterminerede tilfælde er sandsynlighedsfordelingerne af de to mulige responser – bliver latent additive. Og de kun to responser fører over i en så simpel fordelingstype, (50), som vel kan tænkes.

Udvider man dimensionstallet, men fastholder, at de tre slags parametre – for objekter, agentier og reaktioner – skal have samme dimension[5], så gælder stadig udledelsen af differentialligningen (28), når de anvendte betegnelser tolkes som vektorer og matricer, men heraf følger en flerdimensional latent additivitet kun under stærkt skærpende forudsætninger, som for øvrigt ikke kan siges at være helt kortlagt endnu. Imidlertid er dog en i udstrakt grad anvendelig tilstrækkelig betingelse til rådighed.

Udvides, i den stokastiske problemstilling, antallet af responser udover 2

5. Manglende balance mellem dimensionerne er endnu ikke behandlet tilfredsstillende.

fører den omtalte tilstrækkelige betingelse til en matematisk set stærkt begrænset, men alligevel for praksis særdeles omfattende klasse af fordelinger, de såkaldte »målingsmodeller«. Disse modeller, der naturligvis omfatter den simple dichotome model (50) som et specielt tilfælde, kan endvidere udvides til tilfælde hvor responserne kan være fordelt over hele den reelle akse, såvel som i planen eller i rummet, og giver os dermed en anselig udvidelse af det klassiske statistiske arsenal.

En udvidelse i en tredje retning, som nok har været forudset, men endnu ikke dyrket intensivt, begynder at trænge sig på. Den går ud på interaktioner mellem flere arter af elementer end objekter og agentier. Udvidelsen er fornylig påpeget af H. Scheiblechner (1971) som et væsentligt værktøj indenfor sociologi og socialpsykologi og vil givetvis være helt væsentligt i analyser af økonomiske systemer.

Den art af matematiske problemer denne udvidelse rejser, har allerede sneget sig ind i behandlingen af procesproblemet i afsnit 25, hvor der optræder et samspil mellem 3 slags parametre: en for agentier, to for objekter, nemlig en permanent for objekterne som sådanne og en for deres skiftende tilstande.

Dette beskedne glimt ind i teorien for processer åbner vide perspektiver, idet alle de foreliggende resultater fra statikens objektivitet kan føres direkte over på processerne – også sådanne hvor samspillet foregår mellem flere end to slags elementer. Det vil gælde for både de determinerede processer og de stokastiske processer, så at målingsmodellerne føres videre til »målingsprocesser«.

Med alt dette til rådighed vil vi have et instrumentarium, hvormed mange slags problemer i samfundsvidenskaberne kan formuleres og håndteres med de samme typer af matematiske redskaber som fysiken råder over – uden at der bliver tale om overfladiske analogier.

Men hvorfor standse ved samfundsvidenskaberne. Min vision går videre til *alle videnskaber, hvis emner er sammenligninger der skal være objektive.*

Litteratur

Andersen, Bent Bøgh. 1972. *Aspekter af den »kulturelle« barriere mod uddannelsessøgning.* Socialforskningsinstituttet, Studie 21. København.

Christiansen, Ulf og Jon Stene. 1968/69. *G. Rasch's lærebog i teoretisk statistik.* ½ Bd. København.

Jammer, Max. 1957. *Concepts of force.* Cambridge, Mass.

Jammer, Max. 1961. *Concepts of mass.* Cambridge, Mass.

Pedersen, P. C. 1971. Analyse af gymnasiefrekvens for befolkningsgrupper opdelt efter indkomst og social status. Tillæg II til ERIK JØRGEN HANSEN: *Ungdom og Uddannelse.* Socialforskningsinstituttet, Publikation 47, København.

fører den omtalte tilstrækkelige betingelse til en matematisk set stærkt begrænset, men alligevel for praksis særdeles omfattende klasse af fordelinger, de såkaldte »målingsmodeller«. Disse modeller, der naturligvis omfatter den simple dichotome model (50) som et specielt tilfælde, kan endvidere udvides til tilfælde hvor responserne kan være fordelt over hele den reelle akse, såvel som i planen eller i rummet, og giver os dermed en anselig udvidelse af det klassiske statistiske arsenal.

En udvidelse i en tredje retning, som nok har været forudset, men endnu ikke dyrket intensivt, begynder at trænge sig på. Den går ud på interaktioner mellem flere arter af elementer end objekter og agentier. Udvidelsen er fornylig påpeget af H. Scheiblechner (1971) som et væsentligt værktøj indenfor sociologi og socialpsykologi og vil givetvis være helt væsentligt i analyser af økonomiske systemer.

Den art af matematiske problemer denne udvidelse rejser, har allerede sneget sig ind i behandlingen af procesproblemet i afsnit 25, hvor der optræder et samspil mellem 3 slags parametre: en for agentier, to for objekter, nemlig en permanent for objekterne som sådanne og en for deres skiftende tilstande.

Dette beskedne glimt ind i teorien for processer åbner vide perspektiver, idet alle de foreliggende resultater fra statikens objektivitet kan føres direkte over på processerne – også sådanne hvor samspillet foregår mellem flere end to slags elementer. Det vil gælde for både de determinerede processer og de stokastiske processer, så at målingsmodellerne føres videre til »målingsprocesser«.

Med alt dette til rådighed vil vi have et instrumentarium, hvormed mange slags problemer i samfundsvidenskaberne kan formuleres og håndteres med de samme typer af matematiske redskaber som fysiken råder over – uden at der bliver tale om overfladiske analogier.

Men hvorfor standse ved samfundsvidenskaberne. Min vision går videre til *alle videnskaber, hvis emner er sammenligninger der skal være objektive.*

Litteratur

Andersen, Bent Bøgh. 1972. *Aspekter af den »kulturelle« barriere mod uddannelsessøgning.* Socialforskningsinstituttet, Studie 21. København.

Christiansen, Ulf og Jon Stene. 1968/69. *G. Rasch's lærebog i teoretisk statistik.* ½ Bd. København.

Jammer, Max. 1957. *Concepts of force.* Cambridge, Mass.

Jammer, Max. 1961. *Concepts of mass.* Cambridge, Mass.

Pedersen, P. C. 1971. Analyse af gymnasiefrekvens for befolkningsgrupper opdelt efter indkomst og social status. Tillæg II til ERIK JØRGEN HANSEN: *Ungdom og Uddannelse.* Socialforskningsinstituttet, Publikation 47, København.

Rao, C. R. 1958. Some statistical methods for comparing growth curves. *Biometrics 14:* 1-17.

Scheiblechner, H. 1971. The separation of individual- and system- influences on behaviour in social contexts. *Acta Psychologica* 35: 442-60.

United Nations. 1955. *Age-sex patterns of mortality*. Population Studies, No. 22. New York.