OM AGGREGERING AF PRODUKTIONSFUNKTIONER

Af JØRGEN DRUD HANSEN*

1. Analysens formål

I de sidste 25 år er der foretaget en række analyser af sammenhængen mellem mikro- og makrorelationer. Et fælles træk for disse analyser er, at de er matematisk prægede og derfor vanskeligt tilgængelige uden en del matematiske forkundskaber. I det følgende vil der udelukkende blive set på sammenhængen mellem mikro- og makroproduktionsfunktioner. Formålet er at give en oversigtsmæssig fremstilling af de analyser, der foreligger på dette område, idet der dog her vil blive lagt vægt på at redegøre for problemstillingerne og resultaterne uden at anvende en kompliceret matematisk fremstillingsform.

I mikroteorien er der ikke mange forståelsesmæssige problemer forbundet med at operere med produktionsfunktioner. Output og input er homogene mængder eller ydelser, og man løber derfor ikke ind i måleproblemer af teoretisk art med de variable, man opererer med. Dertil kommer, at selve funktionssammenhængen i regelen kan betragtes som en ren teknisk sammenhæng, som det i alt fald i teorien skulle være muligt at vinde klarhed over ved at anstille forsøg[1]. Helt anderledes stiller sagen sig, når der er tale om produktionsfunktioner i makroteorien. Makroproduktionsfunktioner er nok i formel henseende af ganske samme art som mikroproduktionsfunktioner, idet der er tale om en funktionel sammenhæng mellem output og input, men output og input er nu aggregater, d.v.s. mål for en række forskelligartede output og inputtyper, der er aggregeret eller sammenvejet efter en eller anden aggregeringsprocedure. Dertil kommer, at man næppe kan opfatte makroproduktionsfunktioner som rene tekniske sammenhænge, idet et samfunds mange-

* Forskningsstipendiat ved Handelshøjskolen i København. Artiklen bygger på forfatterens 3 mdr.s opgave ved Københavns Universitet afleveret i september 1969. På grundlag af et udkast til den foreliggende artikel har forfatteren haft lejlighed til at diskutere problemstillingen på et seminar ved Nationaløkonomisk Institut på Handelshøjskolen i København, hvorved der på flere punkter blev opnået forbedringer i den endelige fremstilling.

1. Output fremstillingen er dog ofte et resultat af en række tekniske omvekslingsprocesser. Bag mikroproduktionsfunktionen ligger derfor ikke blot rent tekniske forhold men også en optimering af den samlede indsats af input mellem de enkelte omvekslingsprocesser. Jfr. Dano (1966, kap. 9).

OM AGGREGERING AF PRODUKTIONSFUNKTIONER

Af JØRGEN DRUD HANSEN*

1. Analysens formål

I de sidste 25 år er der foretaget en række analyser af sammenhængen mellem mikro- og makrorelationer. Et fælles træk for disse analyser er, at de er matematisk prægede og derfor vanskeligt tilgængelige uden en del matematiske forkundskaber. I det følgende vil der udelukkende blive set på sammenhængen mellem mikro- og makroproduktionsfunktioner. Formålet er at give en oversigtsmæssig fremstilling af de analyser, der foreligger på dette område, idet der dog her vil blive lagt vægt på at redegøre for problemstillingerne og resultaterne uden at anvende en kompliceret matematisk fremstillingsform.

I mikroteorien er der ikke mange forståelsesmæssige problemer forbundet med at operere med produktionsfunktioner. Output og input er homogene mængder eller ydelser, og man løber derfor ikke ind i måleproblemer af teoretisk art med de variable, man opererer med. Dertil kommer, at selve funktionssammenhængen i regelen kan betragtes som en ren teknisk sammenhæng, som det i alt fald i teorien skulle være muligt at vinde klarhed over ved at anstille forsøg[1]. Helt anderledes stiller sagen sig, når der er tale om produktionsfunktioner i makroteorien. Makroproduktionsfunktioner er nok i formel henseende af ganske samme art som mikroproduktionsfunktioner, idet der er tale om en funktionel sammenhæng mellem output og input, men output og input er nu aggregater, d.v.s. mål for en række forskelligartede output og inputtyper, der er aggregeret eller sammenvejet efter en eller anden aggregeringsprocedure. Dertil kommer, at man næppe kan opfatte makroproduktionsfunktioner som rene tekniske sammenhænge, idet et samfunds mange-

* Forskningsstipendiat ved Handelshøjskolen i København. Artiklen bygger på forfatterens 3 mdr.s opgave ved Københavns Universitet afleveret i september 1969. På grundlag af et udkast til den foreliggende artikel har forfatteren haft lejlighed til at diskutere problemstillingen på et seminar ved Nationaløkonomisk Institut på Handelshøjskolen i København, hvorved der på flere punkter blev opnået forbedringer i den endelige fremstilling.

1. Output fremstillingen er dog ofte et resultat af en række tekniske omvekslingsprocesser. Bag mikroproduktionsfunktionen ligger derfor ikke blot rent tekniske forhold men også en optimering af den samlede indsats af input mellem de enkelte omvekslingsprocesser. Jfr. Dano (1966, kap. 9).

artede og komplicerede produktionsaktiviteter ikke uden videre lader sig beskrive ved en makroproduktionsfunktion.

I makromodellerne lægger man som oftest blot ud med en makroproduktionsfunktion i forudsætningsgrundlaget uden nærmere overvejelser. I kortsigtsmodellerne opererer man således med en makroproduktionsfunktion af formen (1.1).

$$Y^* = F(L^*) \tag{1.1}$$

Y^* er et aggregat for den samlede produktion og L^* et aggregat for den samlede beskæftigelse[2]. Kapitalen medtages ikke eksplicit i produktionsfunktionen, idet investeringerne ikke i det korte løb når at ændre kapitalstocken væsentligt, og udnyttelsesgraden af kapitalstocken er enten eksogent givet, hvis der er substitutionsmuligheder mellem kapital og arbejdskraft eller varierende med arbejdsindsatsen, hvis substitutionsmulighederne er begrænsede. Tekniske fremskridt ser man også bort fra i en kortsigtsanalyse, da denne form for ændringer i produktionsbetingelserne ligeledes er en tidkrævende proces.

I en langsigtsanalyse må man derimod tage hensyn til ændringer i kapitalapparatets størrelse og til tekniske fremskridt. I den neoklassiske vækstteori klarer man dette ved at operere med en produktionsfunktion af typen (1.2), hvor den samlede produktion Y^* er en funktion af det samlede kapitalapparat K^*, den samlede arbejdsstyrke L^* samt en tidsfaktor t, idet man går ud fra, at de tekniske fremskridt fremkommer blot i kraft af, at tiden går.

$$Y^* = F(K^*, L^*, t) \tag{1.2}$$

I disse vækstmodeller forudsætter man videre, at kapital og arbejdskraft er substituerbare, at produktionsfunktionen er homogen af første grad og eventuelt af Cobb-Douglas typen, samt at de tekniske fremskridt udelukkende virker som en effektivitetsforøgelse af arbejdsstyrken.

Disse forudsætninger synes at være meget restriktive. Når man alligevel lader vækstmodellen hvile på dem, skyldes det, at de sammen med modellens øvrige forudsætninger kan skabe nogle elegante sammenhænge.

I det følgende vil forudsætningsgrundlaget være skubbet tilbage til en mikroøkonomi. Det vil være mikroproduktionsfunktionerne, der betragtes som givne, og det skal da undersøges, om produktionsforholdene også lader sig beskrive med en makroproduktionsfunktion. Herved rejser der sig et aggregeringsproblem, der dels består af et måleproblem, idet de enheder, der skal aggregeres, er mere eller mindre heterogene og dels af et allokeringsproblem,

2. Aggregater vil overalt i det følgende blive betegnet med *.

idet produktionen i et samfund foregår ude på en række selvstændige produktionsaktiviteter. Selv om man fjernede måleproblemet ved at forudsætte, at de størrelser, der skulle sammenvejes, var homogene, ville der alligevel stå et allokeringsproblem tilbage, fordi det generelt måtte antages, at den samlede produktion i økonomien afhang af, hvorledes ressourcerne var fordelt mellem de enkelte produktionsaktiviteter.

2. *Aggregering af variable, der indgår i samme produktionsfunktion*

I første omgang vil der udelukkende blive set på mulighederne for at sammenveje input- eller outputvariable, der indgår i samme produktionsfunktion. Mulighederne for dette er bl.a. afhængig af, om input eller output indsættes i produktionsfunktionen efter et eller andet mønster, f.eks. at de er tilpasset et sæt priser, og at de relative priser for den gruppe variable, der ønskes aggregeret, holder sig konstant. Forudsætninger af denne art vil ikke blive gjort i dette afsnit, idet det spørgsmål, der skal klarlægges, er, om produktionsfunktionen som sådan tillader, at en gruppe af dens input- eller outputvariable aggregeres.

Lad der konkret være givet en produktionsfunktion, hvor der fremstilles én type output ved hjælp af én type kapital og to typer arbejdskraft.

$$Y = f(K, L_1, L_2) \tag{2.1}$$

Problemet er da, om det er muligt at finde et mål for L_1 og L_2, der er uafhængig af andre variable i produktionsfunktionen, og som samtidig kan anvendes som input i en aggregeret produktionsfunktion. Der søges med andre ord en aggregeringsfunktion

$$L^* = L^*(L_1, L_2), \tag{2.2}$$

således at

$$Y = F(K, L^*). \tag{2.3}$$

Betingelsen for, at dette er muligt, er at sammenhængen mellem input af de to typer arbejdskraft i den oprindelige produktionsfunktion (2.1) er uafhængig af størrelsen af kapital, thi kun derved er det muligt at sammenveje de to typer arbejdskraft uforstyrret af, hvilke værdier K har. Dersom produktionsfunktionen har denne egenskab, siges den at være funktionel separabel med hensyn til grupperne arbejdskraft og kapital. Denne betingelse blev første gang opstillet af Leontief (1947). Det er ret let at se geometrisk, hvad der fordres af produktionsfunktionen (2.1), for at den er funktionel separabel. Fastholdes kapitalinput, kan produktionsfunktionen afbildes i et isokvantdiagram, således som det er vist i fig. 2.1.

Isokvantkortet foreskriver, hvorledes arbejdskraften skal aggregeres. Således er arbejdskraftkombinationer på samme isokvant ækvivalente og må indsat i aggregeringsfunktionen give samme værdi for aggregatet, og jo længere ude i isokvantkortet en kombination ligger, desto større må arbejdskrafts-

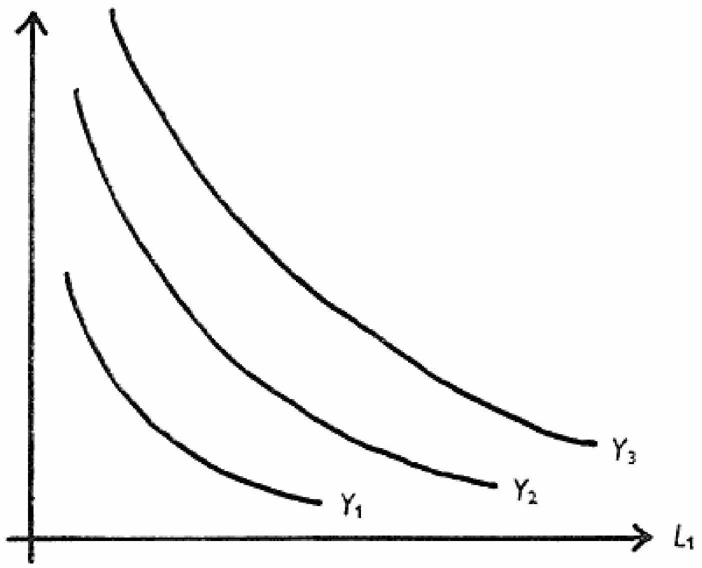

Fig. 2.1.

aggregatet være. Ved hjælp af isokvantkortet er man således altid i stand til at opstille en rangfølge (en ordinal måling) af forskellige arbejdskraftskombinationer. Skal arbejdskraftsaggregeringen kunne foretages uafhængigt af kapitalinput, må det betyde, at den ved hjælp af isokvantkortet opstillede rangfølge ikke ændres, dersom kapitalinput blev ændret. En ændring i kapitalinput må således kun ændre produktnummereringen af isokvanterne, men ikke selve isokvantkortets form. Er produktionsfunktionen differentiabel, kan man også udtrykke denne betingelse ved, at forholdet mellem grænseprodukterne for de to typer arbejdskraft skal være uafhængig af kapitalinput, idet forholdet mellem grænseprodukterne netop afspejler isokvantens hældning.

I fig. 2.1 er isokvanterne krumme, og det vil derfor ikke være muligt at aggregere de to typer arbejdskraft ved en lineær sammenvejning, d.v.s. anvende en aggregeringsfunktion af typen $L^* = aL_1 + bL_2$, hvor a og b er konstanter. Skal dette være muligt, vil det dels kræve, at produktionsfunktionen er funktionel separabel og dels, at isokvanterne mellem de to typer arbejdskraft er lineære og ligedannede (parallelle), og hyppigt simplificeres aggregeringsproblemerne netop ved et sådant sæt af forudsætninger.[3]

Cobb-Douglas funktionen $Y = aK^{\alpha} L_1^{\beta} L_2^{\gamma}$ er et eksempel på en produktionsfunktion, der er funktionel separabel, idet isokvanternes form mellem

3. Jfr. f.eks. Ølgaard (1966, del 1).

L_1 og L_2 udelukkende bestemmes af β og γ.[4] Funktionel separabilitet er dog næppe nogen realistisk forudsætning. Det, der karakteriserer en bestemt type specialuddannet arbejdskraft, er nemlig ofte, at denne type arbejdskraft gennem tillæring har fået en færdighed i at anvende en bestemt type realkapital, og bytteforholdet mellem forskellige kategorier af arbejdskraft vil derfor være meget afhængig af forsyningen af kapitalgoder.

Hidtil har der udelukkende været set på arbejdskraftsaggregering. De foreliggende resultater kan dog umiddelbart udstrækkes til også at gælde aggregering af flere typer kapital eller output. Generelt kan man aggregere flere typer output, kapital og arbejdskraft, der indgår i samme produktionsfunktion, blot denne funktion er funktionel separabel med hensyn til de tre grupper af variable. Det vil sige, den partielle sammenhæng i produktionsfunktionen mellem to vilkårlige variable inden for den gruppe af variable, der ønskes aggregeret, skal være uafhængig af størrelsen af de variable, der er uden for gruppen.

I de næste afsnit vil der blive tage hensyn til, at økonomien i virkeligheden består af en række selvstændige produktionsaktiviteter, der hver kan beskrives med en mikroproduktionsfunktion. Det viser sig dog, at funktionel separabilitet også bliver af betydning ved afklaring af de aggregeringsproblemer, der da opstår.

3. Aggregering af mobile variable

I det følgende vil vi gå ud fra, at producenterne har mulighed for at tilpasse både produktionens størrelse samt input af arbejdskraft og rå- og hjælpestoffer. Disse variable vil derfor blive betegnet som mobile. Derimod vil kapitalen blive betragtet som immobil, idet vi vil gå ud fra, at det enkelte kapitalanlæg er bundet til den produktionsaktivitet, hvor det engang i fortiden er stillet op, således at producenten kun har mulighed for at variere dets udnyttelsesgrad.

I de enkelte mikroproduktionsfunktioner indgår som input dels output fra andre produktionsaktiviteter i økonomien og dels input af arbejdskraft og ydelser fra kapitalanlægget, og output anvendes enten som endelig efterspørgsel, d.v.s. forbrug eller investering, eller som input i andre produktionsaktiviteter. Økonomien forudsættes m.a.o. at være lukket, idet alt output, der anvendes som input, er produceret af økonomiens egne produktionsaktiviteter, og intet output til endelig efterspørgsel går til eksport.

På grund af mobilitetsevnen vil det videre blive forudsat, at output og arbejdskraft er efficient allokeret, hvilket vil sige, at det ikke er muligt at øge produktionen til endelig efterspørgsel af én type output uden produktionen

4. Arbejdskraften lader sig således sammenveje ved aggregeringsfunktionen $L^* = L_1^{\beta} L_2^{\gamma}$ og den aggregerede produktionsfunktion får da formen $Y = a K^{\alpha} L^*$.

af én eller flere andre typer output til endelig efterspørgsel bliver mindre, blot ved at ændre allokeringen af de mobile variable mellem produktionsaktiviteterne.[5] Denne forudsætning indebærer m.a.o., at man ikke med den givne samlede arbejdsstyrke og med de givne produktionsanlæg hverken vertikalt eller horisontalt kan ændre produktionstilrettelæggelsen eller fordelingen af arbejdskraften og derved få mere produktion frem til endelig efterspørgsel af én type output, uden der fremkommer fald i produktionen til endelig efterspørgsel af andre typer output. Dersom der hersker fuldkommen konkurrence i økonomien og ikke findes external economies, vil markedskræfterne selv sørge for, at de mobile variable allokeres efficient, men man kunne naturligvis også tænke sig dette tilvejebragt ved en eller anden planlæggende myndigheds dispositioner. Overalt i det følgende vil vi antage, at der ikke findes external economies, således at sammenhængen mellem input og output i den enkelte mikroproduktionsfunktion er uafhængig af input og output i andre mikroproduktionsfunktioner.

For kapitalens vedkommende vil der ikke blive gjort nogen allokeringsforudsætning på grund af denne produktionsfaktors manglende mobilitetsevne, og herved bliver betingelserne for kapitalaggregering helt anderledes end betingelserne for aggregering af arbejdskraft og output.

I dette afsnit vil der udelukkende blive set på mulighederne for at opstille en kortsigtsmakroproduktionsfunktion. Kapitalapparatets størrelse i de enkelte produktionsaktiviteter betragtes som givne, og det vil derfor ikke være nødvendigt eksplicit at medtage input af kapital i mikroproduktionsfunktionerne. Problemet indskrænker sig således til at få aggregeret de mobile variable output og arbejdskraft.

Lad os først se på det tilfælde, hvor der kun produceres én type output og anvendes én type arbejdskraft. Dersom der i alt findes n produktionsaktiviteter, kan produktionsforholdene i hele økonomien beskrives ved følgende sæt af mikroproduktionsfunktioner.

$$Y_i = f_i(L_i) \qquad i = 1, \ldots . n \text{ og } Y_i \geqq 0, L_i \geqq 0. \tag{3.1}$$

Både output og arbejdskraft er homogene, og man kan derfor aggregere hver af disse variable ved en simpel uvejet summation.

$$\begin{aligned} Y^* &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} Y_i & (3.2)\\ &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} f_i(L_i) \\ L^* &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} L_i & (3.3) \end{aligned}$$

5. Output og arbejdskraft er klassificeret i så stort et antal typer, at enhederne indenfor samme type er homogene.

Det er videre forudsat, at den samlede arbejdsstyrke L^* har aflejret sig på de enkelte produktionsanlæg, således at Y^* bliver størst mulig. L^* giver herved en entydig bestemmelse af Y^*, hvilket vil sige, at produktionsforholdene i økonomien kan beskrives ved makroproduktionsfunktion af typen (3.4).

$$Y^* = F(L^*) \tag{3.4}$$

Makroproduktionsfunktionens udseende vil være bestemt af, hvilke antagelser man gør om produktionsforholdene i mikroøkonomien. Flere forhold kunne dog tale for, at makroproduktionsfunktionen får faldende grænseprodukt. Hvis alle mikroproduktionsfunktionerne har faldende grænseprodukt, vil en given beskæftigelsesudvidelse delt ud på de enkelte produktionsaktiviteter give en stadig mindre tilvækst i den samlede produktion, jo større beskæftigelsen i forvejen er, og makroproduktionsfunktionen vil således i dette tilfælde få faldende grænseprodukt. En anden begrundelse for, at makroproduktionsfunktionen skulle få faldende grænseprodukt, er, at produktionsaktiviteterne er af forskellig effektivitet, således at en beskæftigelsesudvidelse hovedsagelig må ske ved, at mindre effektive produktionsanlæg bemandes. Dette forhold vil man i rendyrket form få frem, hvis det antages, at mikroproduktionsfunktionerne er homogene af første grad og limitationale med hensyn til indsatsen af arbejdskraften og ydelser fra kapitalanlægget. Der vil i så fald for den enkelte mikroproduktionsfunktion være proportionalitet mellem output og input af arbejdskraft ud til en af det faste anlæg bestemte kapacitetsgrænse.

Der knytter sig en særlig interesse til dette tilfælde. Lad os derfor antage, at økonomien består af lutter sådanne produktionsaktiviteter, hvoraf der er afbildet to i fig. 3.1.a og 3.1.b.

Den enkelte produktionsaktivitets effektivitet er bestemt af kvaliteten af det faste anlæg, og kan karakteriseres ved den indsats af arbejdskraft a, der med-

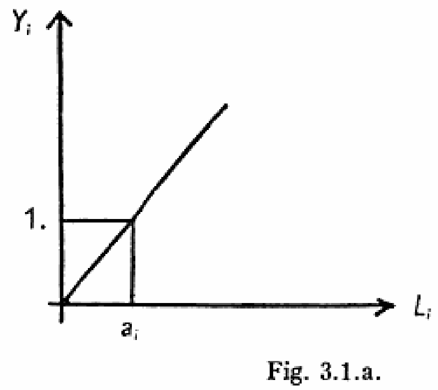

Fig. 3.1.a.

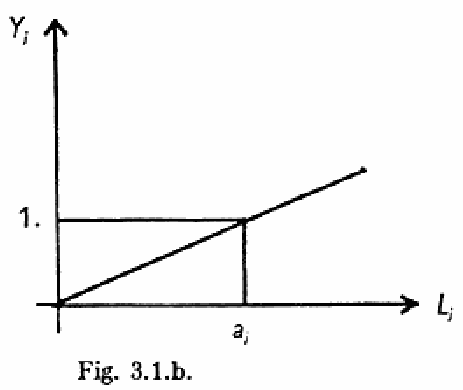

Fig. 3.1.b.

går til fremstilling af én outputenhed. Produktionsaktivitet i er således mere effektiv end produktionsaktivitet j, idet $a_i < a_j$. Når den samlede beskæftigelse er lav, er det kun de mest effektive produktionsaktiviteter, der bemandes, og disse knytter arbejdskraft til sig ud til kapacitetsgrænsen. En beskæftigelsesudvidelse kan kun ske ved, at mindre effektive produktionsaktiviteter bemandes.

Hvis produktionsaktiviteterne spreder sig jævnt m. h. t. effektivitet, og den enkelte produktionsaktivitet kun har en forsvindende produktionskapacitet i forhold til produktionskapaciteten i hele økonomien, vil makroproduktionsfunktionen få et jævnt faldende grænseprodukt som vist i fig. 3.2.

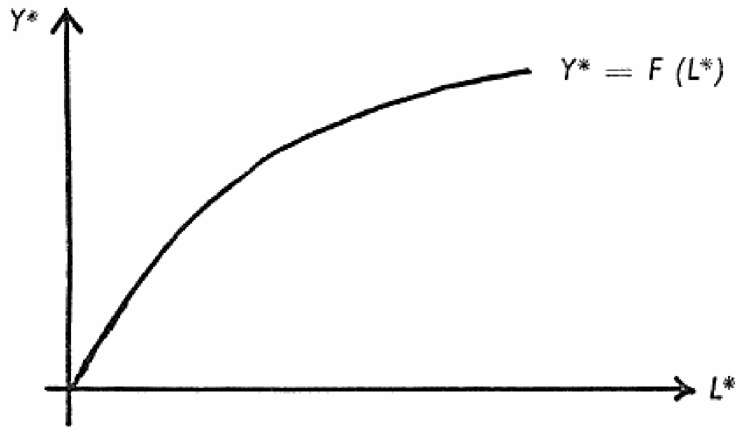

Fig. 3.2.

Den nøjagtige funktionssammenhæng for makroproduktionsfunktionen vil kunne udregnes, hvis man har kendskab til, hvor meget produktionskapacitet, der findes i forskellige effektivitetsintervaller. Sådanne analyser er bl.a. gennemført af Houthakker (1955/1956) og Levhari (1968), og da de er meget klargørende i relation til sammenhængen mellem produktionsforholdene i mikroøkonomien og makroøkonomien, vil der her blive opstillet en simplificeret version af deres arbejder.

Det antages, at den samlede produktionskapacitet, der findes i et uendeligt lille effektivitetsinterval a, $a+da$ er $\varphi(a)\, da$, hvor $\varphi(a)$ er en kontinuert tæthedsfunktion. Den samlede produktionskapacitet i et bestemt effektivitetsinterval findes altså som arealet under tæthedsfunktionen i dette interval, og $\varphi(a)$ får herved ganske samme fortolkning som kontinuerte sandsynligheds-tæthedsfunktioner, idet sandsynligheder ligeledes findes som arealer under en tæthedsfunktion. $\varphi(a)$ forudsættes specielt at være af formen (3.5).

$$\varphi(a) = A \cdot a^{\alpha-1} \tag{3.5}$$

A og α er konstanter og $\alpha > 0$.

I fig. 3.3.a og 3.3.b er afbildet tæthedsfunktionerne for to værdier af α nemlig $\alpha = 1/2$ og $\alpha = 3/2$.

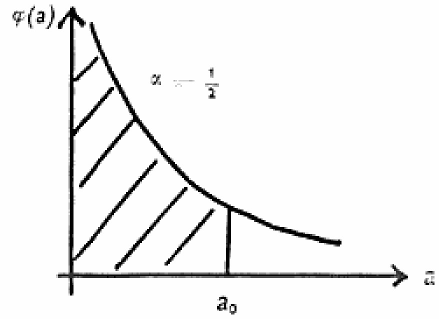

Fig. 3.3.a.

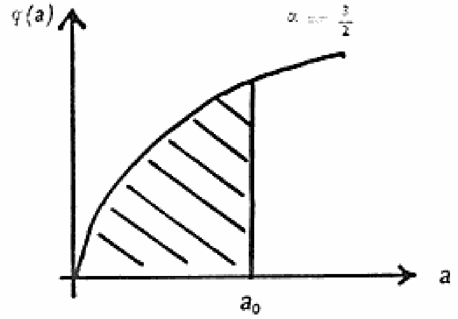

Fig. 3.3.b.

Med en given indsats af arbejdskraft L^*, vil det f. eks. kun være muligt at bemande produktionsaktiviteter i effektivitetsintervallet $0 \leqq a \leqq a_0$. Den samlede produktion i økonomien kan da beregnes som arealet under tæthedsfunktionen fra 0 til a_0, d.v.s.

$$Y^* = \int_0^{a_0} \varphi(a)\, da$$

$$= \int_0^{a_0} A\, a^{\alpha-1}\, da$$

$$= A/\alpha \Big[a^{\alpha} \Big]_0^{a_0} = (A/\alpha) \cdot a_0^{\alpha}$$

På tilsvarende vis kan den samlede arbejdsindsats beregnes.

$$L^* = \int_0^{a_0} a\, \varphi(a)\, da$$

$$= \int_0^{a_0} A\, a^{\alpha}\, da$$

$$= (A/\alpha + 1) \Big[a^{\alpha+1} \Big]_0^{a_0} = (A/\alpha+1)\, a_0^{\alpha+1}$$

a_0 lader sig eliminere af udtrykkene for Y^* og L^*, og man får da bestemt en funktionssammenhæng mellem Y^* og L^*.

$$Y^* = A/\alpha \left(\frac{\alpha+1}{A}\right)^{\alpha/\alpha+1} (L^*)^{\alpha/\alpha+1}$$

$$= \text{konstant} \cdot (L^*)^{\alpha/\alpha+1}$$

Makroproduktionsfunktionen er således i dette tilfælde af Cobb-Douglas typen. Homogenitetsgraden $^{a}/_{a+1}$ er mindre end 1, hvilket netop afspejler, at en beskæftigelsesudvidelse må ske ved, at mindre effektive produktionsanlæg forsynes med arbejdskraft.

Hidtil har aggregeringen ikke givet anledning til problemer i relation til makroproduktionsfunktionens eksistens, men der har jo også unægtelig været fjernet en væsentlig brod i analysen ved at forudsætte, at output og arbejdskraft er homogene. I virkeligheden anvendes mange typer arbejdskraft og produceres mange typer output, hvoraf nogle i større eller mindre omfang tjener som input i andre produktionsaktiviteter. På grund af forudsætningen om den efficiente allokering vil det imidlertid altid være muligt at beskrive produktionsforholdene i økonomien med en makroproduktionsfunktion, hvor der indgår et aggregat for hver type output til endelig efterspørgsel og et aggregat for hver type arbejdskraft. Produceres der i alt n typer output til endelig efterspørgsel, og anvendes der i alt m typer arbejdskraft, volder det således ikke problemer at operere med en makroproduktionsfunktion af formen (3.7).

$$F(Y_1^*, Y_2^*, \ldots Y_n^*, L_1^*, \ldots L_m^*) = 0 \qquad (3.7)$$

Hvert af outputaggregaterne $Y_1^*, \ldots Y_n^*$ er fremkommet ved en simpel uvejet summation over alle produktionsaktiviteterne af den del af output af en bestemt type, der trækkes ud til endelig efterspørgsel, og tilsvarende er hvert af arbejdskraftaggregaterne $L_1^*, \ldots L_m^*$ fremkommet ved en simpel uvejet summation over alle produktionsaktiviteterne af en bestemt type arbejdskraft. Da antallet både af outputtyper og arbejdskraftstyper i (3.7) er meget stort, rejser spørgsmålet sig, om det er muligt at nå op på et højere aggregeringsniveau, således at de forskellige typer output sammenvejes i kun ét aggregat og tilsvarende, at de forskellige typer arbejdskraft sammenvejes i kun ét aggregat.

Uden særlige forudsætninger er betingelsen for dette åbenbart, at funktionen (3.7) er funktionel separabel med hensyn til grupperne output og arbejdskraft, men her viser det sig, at denne egenskab har produktionsfunktionen ikke med mindre, der gøres meget restriktive forudsætninger om samtlige mikroproduktionsfunktioner.[6] Heldigvis synes det dog muligt i en kortsigtsanalyse at finde akceptable tillægsforudsætninger, så man alligevel kan komme igennem med denne aggregering uden særlige forudsætninger om mikroproduktionsfunktionerne.

Aggregering er således mulig, hvis konjunkturforløbet påvirker alle sekto-

6. Jfr. f.eks. Green (1964, kap. 6) samt F. M. Fisher (1968; 1969).

rer ens, således at der er et fast forhold mellem produktionen af de enkelte outputtyper til endelig efterspørgsel og et fast forhold mellem input af de forskellige arbejdskraftstyper. Betegner ${}_0Y_1^*, \ldots {}_0Y_n^*, {}_0L_1^*, \ldots {}_0L_m^*$ et sæt udgangsværdier for output og input i produktionsfunktionen (3.7), forudsættes det med andre ord, at økonomien udelukkende bevæger sig ved variationer i k og λ i (3.8).

$$F(k_0Y_1^*, \ldots k_0Y_n^*, \lambda_0L_1^*, \ldots \lambda_0L_m^*) = 0 \tag{3.8}$$

En ændring i k vil kræve en ændring i λ og omvendt. k er således en funktion af λ.

$$k = k(\lambda). \tag{3.9}$$

Da k er et mål for produktionsresultatet i hele økonomien og λ et mål for arbejdsindsatsen, kan $k = k(\lambda)$ tolkes som en makroproduktionsfunktion med kun ét output- og ét arbejdskraftsaggregat. k er i øvrigt proportional med output til endelig efterspørgsel sammenvejet efter et sæt faste priser, d.v.s. bruttonationalproduktet i faste priser, og λ proportional med arbejdsindsatsen sammenvejet efter et sæt faste lønninger. Der er derfor intet i vejen for, at man i stedet for $k = k(\lambda)$ opererer med en makroproduktionsfunktion med bruttonationalproduktet i faste priser som en funktion af beskæftigelsen i faste lønninger.

Der findes en anden forudsætning, der kan give det mening at aggregere forskellige typer output og arbejdskraft. Dersom producenterne betragter priser og lønninger som udefra givne, vil de sammensætte deres produktionssortiment og input af arbejdskraft, således at det marginale substitutionsforhold mellem to vilkårlige typer output eller arbejdskraft numerisk bliver lig med forholdet mellem de tilsvarende priser eller lønninger.[7] Hvis de relative priser eller lønninger holder sig konstant, vil disse marginale substitutionsforhold de fakto blive låst fast, og det vil da være tilladeligt at aggregere ved hjælp af de relative priser og lønninger.[8] I dette tilfælde vil man igen få en makroproduktionsfunktion, hvor bruttonationalproduktet i faste priser er en funktion af arbejdsindsatsen i faste lønninger.

I praksis vil imidlertid hverken forudsætningen om konstante mængderelationer eller forudsætningen om konstante pris- og lønrelationer være helt eksakt opfyldt, og det vil derfor ikke være realistisk at gå ud fra, at der eksisterer en makroproduktionsfunktion som en eksakt funktionssammenhæng mellem aggregaterne. På kort sigt vil begge forudsætninger dog nok være op-

7. Jfr. Danø (1966, kap. 10, p. 186).
8. Aggregering på dette grundlag findes bl.a. behandlet af Hicks (1946, kap. 2, p. 33).

fyldt i et sådant omfang, at man kan gå ud fra, at der eksisterer en løsere sammenhæng mellem bruttonationalproduktet i faste priser og arbejdsindsatsen i faste lønninger. Spørgsmålet er da, om denne usikkerhed kan tolereres i de anvendelser, man gør af makroproduktionsfunktionen. I enkle konjunkturanalyser skulle der vel næppe være grund til at afstå fra at anvende en makroproduktionsfunktion, idet man her kun bruger makroproduktionsfunktionen til at foreskrive en vis sammenhæng mellem produktion og beskæftigelse i samfundet. Men i makroøkonomisk teori anvender man undertiden også makroproduktionsfunktionen som grundlag for en efterspørgselsteori efter arbejdskraft. Både Keynes og klassikerne anvendte således arbejdskraftens grænseprodukt som efterspørgselsfunktion efter arbejdskraft, idet man antog, at producenterne i deres konkurrence om arbejdskraften og forbrugerne først ville være i ligevægt, når arbejdskraftens grænseprodukt var lig med reallønnen. Umiddelbart synes der grund til større betænkeligheder her ud fra den betragtning, at usikkerheden på makroproduktionsfunktionens grænseprodukt vil blive meget stor, hvis selve makroproduktionsfunktionen kun kan betragtes som en løsere sammenhæng.[9]

4. *Aggregering af immobile variable*

I det følgende vil der blive set på mulighederne for at foretage en sammenvejning af kapitalapparatet med henblik på at opstille en makroproduktionsfunktion a la den type, der indgår i de neoklassiske vækstmodeller. Når kapitalaggregeringen giver anledning til særlige problemer, skyldes det som nævnt, at kapitalapparatet må betragtes som immobilt, og vejen er herved blokeret for forudsætninger om et eller andet allokeringsmønster for denne produktionsfaktor. Output og arbejdskraft forudsættes fortsat at være efficient allokeret, og som det vil fremgå af det følgende, får denne forudsætning også betydning i analysen af kapitalaggregeringen. Endvidere vil aggregeringsanalysen blive holdt som en statisk analyse, hvilket indebærer, at problemt udelukkende vil bestå i at sammenveje en række givne kapitalinput. De tekniske fremskridt vil af samme grund kun indgå på den måde, at de enkelte mikroproduktionsfunktioner kan tolkes som produktionsfunktioner fra forskellige årgange.

Solow (1960; 1964) var den første, som under disse forudsætninger analyserede mulighederne for kapitalaggregering, idet han gav et eksempel på et tilfælde, hvor kapitalaggregering er mulig. I Solows eksempel antages det for simpelheds skyld, at arbejdskraft og output begge er homogene, og at der

9. Dette berører ikke sætningen om, at den maksimale gevinst for den enkelte virksomhed findes ved en beskæftigelse, hvor arbejdskraftens grænseprodukt er lig med reallønnen, forudsat virksomheden betragter priser og lønninger som udefra givne.

kun indgår ét kapitalinput i hver mikroproduktionsfunktion. Både output og arbejdskraft kan således umiddelbart aggregeres ved en simpel uvejet summation. Om mikroproduktionsfunktionerne gør Solow yderligere to særlige forudsætninger: (1) De er alle homogene af første grad; (2) De adskiller sig kun fra hinanden ved kapitaløgende tekniske fremskridt, hvilket vil sige, at alle produktionsfunktionerne kan gøres identiske ved en passende proportional ændring af måleenheden for kapitalen for hver produktionsfunktion.

Af overskuelighedsgrunde tænkes økonomien nu kun at bestå af to produktionsaktiviteter. Solows anden forudsætning betyder, at man kan gøre de to produktionsfunktioners isokvantkort identiske blot ved at strække eller trykke kapitalaksen for den ene produktionsfunktion. Der gælder altså

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_1(K_1, L_1) \\ Y_2 &= f_2(K_2, L_2) = f_1(a\,K_2, L_2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

aK_2 kan opfattes som K_2-kapitalen målt i effektivitetsenheder med K_1-kapitalen som måleenhed.

Det skal nu vises, at den samlede produktion $Y^* = Y_1 + Y_2$ er bestemt af den samlede arbejdsstyrke $L^* = L_1 + L_2$ og det samlede kapitalapparat målt i effektivitetsenheder $K^* = K_1 + aK_2$. Den samlede arbejdsstyrke vil fordele sig på de to produktionsaktiviteter, således at arbejdskraftens grænseprodukter bliver lige store.[10] Er denne betingelse ikke opfyldt, vil en overflytning af arbejdskraft fra den ene produktionsaktivitet til den anden kunne øge den samlede produktion, hvilket strider mod forudsætningen om, at arbejdskraften er efficient allokeret. Da begge produktionsfunktioner er homogene af første grad og identiske, bliver grænseprodukterne for arbejdskraften kun lige store, hvis kapitalintensiteterne er lige store, d.v.s.

$$\frac{L_1}{K_1} = \frac{L_2}{aK_2} = \frac{L_1 + L_2}{K_1 + aK_2} = \frac{L^*}{K^*}$$

Dette giver umiddelbart

$$\frac{L_1}{L^*} = \frac{K_1}{K^*} \quad \text{og} \quad \frac{L_2}{L^*} = \frac{aK_2}{K^*}$$

10. Selv om der her ræsonneres ved hjælp af grænseprodukter, er kapitalaggregeringen i Solows eks. ikke betinget af, at mikroproduktionsfunktionerne er differentiable.

Sættes nu $L_1/L^* = K_1/K^* = \lambda$ bliver input i den første produktionsaktivitet $L_1 = \lambda L^*$ og $K_1 = \lambda K^*$ og i den anden $L_2 = (1-\lambda) L^*$ og $aK_2 = (1-\lambda) K^*$. Den samlede produktion er bestemt som summen af output i de to produktionsaktiviteter, og indsætter man nu de ovenfor fundne udtryk for input, får man ved anvendelse af forudsætningen om homogenitet af første grad

$$
\begin{aligned}
Y^* &= f_1(\lambda K^*, \lambda L^*) + f_1((1-\lambda) K^*, (1-\lambda) L^*) \\
&= \lambda f_1(K^*, L^*) + (1-\lambda) f_1(K^*, L^*) \qquad (4.2) \\
&= f_1(K^*, L^*).
\end{aligned}
$$

Den samlede produktion Y^* er altså en funktion af det samlede kapitalapparat K^* og den samlede arbejdsstyrke L^*. På trods af, at der ikke er forudsat noget om kapitalens allokering, er det alligevel i dette tilfælde muligt at finde et mål for det samlede kapitalapparat, der kan indgå i en makroproduktionsfunktion. Det er i øvrigt interessant at bemærke, at makroproduktionen bliver identisk med mikroproduktionsfunktionerne (når de transformerede måleenheder for kapitalen anvendes for alle mikroproduktionsfunktioner), samt at kapitalintensiteten i makroproduktionsfunktionen bliver lig med kapitalintensiteten i de enkelte mikroproduktionsfunktioner.

Solows eksempel hviler dog på meget specielle forudsætninger. Således bemærkes det, at arbejdskraftens gennemsnitsprodukt (output-labour ratio) bliver ens for alle produktionsaktiviteter, idet mikroproduktionsfunktionerne alle er homogene af første grad, identiske og kapitalintensiteterne lige store.

I Solows eksempel er der dog kun tale om et sæt tilstrækkelige betingelser for kapitalaggregering. De nødvendige betingelser viser sig desværre stadig at være meget specielle. Ser man bort fra Solows to særlige forudsætninger om produktionsfunktionerne, men bevarer eksemplets øvrige forudsætninger, er det på grund af forudsætningen om arbejdskraftens efficiente allokering altid muligt at opstille en produktionsfunktion, hvor arbejdskraft og output er aggregeret, men hvor der medtages et kapitalinput fra hver produktionsfunktion.

$$
\begin{aligned}
Y^* &= Y_1 + Y_2 \\
&= f_1(K_1, L_1) + f_2(K_2, L_2) \qquad (4.3) \\
&= g(K_1, K_2, L^*)
\end{aligned}
$$

hvor $L^* = L_1 + L_2$

Den nødvendige betingelse for kapitalaggregering er således, at g-funktionen i (4.3) er funktionel separabel med hensyn til grupperne kapital og arbejdskraft. Med dette som udgangspunkt viste Fisher (1964; 1969), at *g*-funktionen kun bliver funktionel separabel, hvis de bagvedliggende mikroproduktionsfunktioner opfylder meget specielle krav. Hvis mikroproduktionsfunktionerne er homogene af første grad er Solows forudsætning om, at produktionsfunktionerne kun adskiller sig fra hinanden ved kapitaløgende tekniske fremskridt ikke blot en tilstrækkelig men også en nødvendig betingelse, og uanset homogenitetsgraden er kapitalaggregering kun mulig, hvis output-labour ratio er ens for alle produktionsaktiviteter.[11] Denne betingelse udelukker således, f.eks. at man kan konstruere et kapitalaggregat, der både omfatter spader og gravemaskiner.

Betingelsen om, at output-labout ratio skal være ens, er utvivlsomt så restriktiv, at man end ikke kan gå ud fra, den er opfyldt approksimativt i en realistisk økonomi. Hertil kommer yderligere, at i modsætning til output og arbejdskraft synes det ikke muligt at finde akceptable tillægsforudsætninger, der kan hjælpe ved kapitalaggregeringen. Forudsætningen om en konstant mængdestruktur eller en konstant prisstruktur mellem forskellige kapitalgoder er på forhånd mindre tilfredsstillende i en langsigtsanalyse, hvor nye kapitalgoder efterhånden flyder ind i økonomien. Ud fra samme betragtning bliver output og arbejdskraftsaggregeringen også mindre tilforladelig i en langsigtsanalyse. For kapitalens vedkommende udspringer der yderligere en vanskelighed af det forhold, at det er kapitalgoderne som sådan, producenterne køber, men det er kapitalgodernes ydelser, der indgår i produktionsprocesserne. Man kan derfor ikke gå ud fra, at forholdet mellem priserne på kapitalgoderne er lig med forholdet mellem kapitalgodernes grænseprodukter, og en forudsætning om konstante relative priser vil derfor ikke være stærk nok til at sikre en fastprisaggregering af kapitalen. Kapitalaggregeringen ville derimod ikke adskille sig fra output- og arbejdskraftsaggregeringen, hvis det forholdt sig således, at kapitalgoderne blev lejet af producenterne på sådanne vilkår, at producenterne altid havde mulighed for at tilpasse kapitalinput til de gældende lejepriser.

Det synes således svært at se, hvorledes man skulle kunne komme igennem kapitalaggregeringen på et realistisk grundlag. Konklusionen af dette er derfor, at makroproduktionsfunktioner i vækstmodeller af den neoklassiske type næppe er særlig realistiske. I en deskriptiv vækstmodel går det vel at anvende en makroproduktionsfunktion som en meget forenklet forklaring på, at produktionskapaciteten i samfundet i en eller anden forstand er bestemt af mængden af kapital og arbejdskraft. Men meget af den neoklassiske vækstteori er af normativ art. Der er således opstillet modeller, hvor målet er at

11. Der findes en meget speciel undtagelse fra denne betingelse, nemlig de additivt separable produktionsfunktioner. Jfr. Fisher (1969). Disse er dog så specielle, at der ikk er grund til at beskæftige sig nærmere med dem her.

maksimere forbruget pr. capita og midlet dertil en tilpasning af opsparingskvoten. I sådanne modeller vil den optimale opsparingskvote afhænge meget af makroproduktionsfunktionens nøjagtige udseende, og grundlaget for disse modeller synes derfor at falde væk, hvis makroproduktionsfunktionen kun kan opfattes som en meget grov sammenhæng.

Det har allerede i flere år været kendt, at kapitalen næppe lod sig aggregere,[12] og der er da også i de senere år opstillet vækstmodeller, der helt undlader at anvende en makroproduktionsfunktion. Således er der opstillet modeller, der bygger på produktionsprocesser med et teknisk bestemt fast forhold mellem output og arbejdskraft for de eksisterende produktionsanlæg, men hvor investorerne i investeringsøjeblikket kan vælge mellem kapitalgoder med forskellig kapitalintensitet og dermed forskellig output-labour ratio. Substitutionsmulighederne stivner så at sige i investeringsøjeblikket, og man har derfor givet produktionsforholdene i disse modeller betegnelsen putty-clay (kit-ler)[13]. De eksisterende produktionsanlæg er altså af samme art som dem, Houthakker og Levhari analyserede. Men medens Houthakker og Levhari holdt mængden af faste anlæg konstant med henblik på at opstille en kortsigtsmakroproduktionsfunktion, tages der i putty-clay modellerne hensyn til, at der via investeringerne skabes nye produktionsanlæg, idet formålet nu er at analysere langtidsfænomener. Kapitalaggregering vil i reglen være umulig, da output-labour ratio må antages at blive forskellig for nye og gamle kapitalanlæg – dels på grund af tekniske fremskridt, dels på grund af ændringer i investors optimale kapitalintensitet. På trods af, at produktionsforholdene således ikke kan beskrives med en makroproduktion med et kapitalaggregat, bliver disse modeller alligevel ikke uoverskuelige at operere med på grund af det faste forhold mellem output og arbejdskraft for de eksisterende produktionsanlæg.

5. *Afsluttende betragtninger over aggregeringsproblemet*

I denne fremstilling har makroproduktionsfunktionen været betragtet som subsidiær i forhold til mikroproduktionsfunktionerne, idet opståede aggregeringsvanskeligheder har betydet, at makroproduktionsfunktionens eksistens blev draget i tvivl. Når dette synes rimeligt, skyldes det, at mikroproduktionsfunktioner har ladet sig efterprøve empirisk på en langt mere overbevisende måde end makroproduktionsfunktioner.

Selvom producenter og konsumenter er økonomiens mindste beslutningstagere, kan man ikke i almindelighed sige, at mikrosammenhænge er mere rigtige end makrosammenhænge, og at makrosammenhænge nødvendigvis behøver at fremstå af en aggregering af en række mikrosammenhænge. Det

12. Jfr. f. eks. Joan Robinson (1953/1954).
13. Disse modeller er i oversigtsmæssig form behandlet af Hahn and Matthews (1964).

afgørende er, om de sammenhænge, man opererer med, er kontrolleret empirisk og eventuelle aggregeringsvanskeligheder kan kun give en mistanke om, at der er noget galt enten med de mikrosammenhænge eller makrosammenhænge, man opererer med.

LITTERATUR

Danø, S. 1966. *Industrial production models.* Wien.

Fisher, F. M. 1965. Embodied technical change and the existence of an aggregate capital stock. *Review of Economic Studies* 32:263-88.

Fisher, F. M. 1968. Embodied technology and existence of labour and output aggregates. *Review of Economic Studies* 35:391-412.

Fisher, F. M. 1969. The existence of aggregate production functions. *Econometrica* 37:553-77.

Green, H. A. J. 1964. *Aggregation in economic analysis: An introductory survey.* Princeton.

Hahn, F. H. og R. C. O. Matthews. 1964. The theory of economic growth: A survey. *Economic Journal* 74:779-902. Optrykt i *Surveys of economic theory*, vol. 2, pp. 1-124. London 1965.

Hichs, J. R. 1946. *Value and capital.* Oxford.

Houthakker, H. S. 1955/1956. The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis. *Review of Economic Studies* 23:27-31.

Leontief, W. W. 1947. Introduction to a theory of internal structure of functional relationships. *Econometrica* 15:361-73.

Levhari, D. 1968. A note on Houthakker's aggregate production function in a multifirm industry. *Econometrica* 36:151-54.

Robinson, J. 1953/1954. The production function and the theory of capital. *Review of Economic Studies* 21:81-106.

Solow, R. M. 1960. Investment and technical progress. I *Mathematical methods in the social sciences*, red. K. J. Arrow, S. Karlin og P. Suppes, pp. 89-104. Standford.

Solow, R. M. 1964. Capital, labour, and income in manufacturing. I *The behavior of income shares*, pp. 101-28, National Bureau of Economic Research, Studies in Income and Wealth, 26. Princeton.

Ølgaard, A. 1966. *Productivity, growth, and relative prices.* Amsterdam.

afgørende er, om de sammenhænge, man opererer med, er kontrolleret empirisk og eventuelle aggregeringsvanskeligheder kan kun give en mistanke om, at der er noget galt enten med de mikrosammenhænge eller makrosammenhænge, man opererer med.

LITTERATUR

Danø, S. 1966. *Industrial production models.* Wien.

Fisher, F. M. 1965. Embodied technical change and the existence of an aggregate capital stock. *Review of Economic Studies* 32:263-88.

Fisher, F. M. 1968. Embodied technology and existence of labour and output aggregates. *Review of Economic Studies* 35:391-412.

Fisher, F. M. 1969. The existence of aggregate production functions. *Econometrica* 37:553-77.

Green, H. A. J. 1964. *Aggregation in economic analysis: An introductory survey.* Princeton.

Hahn, F. H. og R. C. O. Matthews. 1964. The theory of economic growth: A survey. *Economic Journal* 74:779-902. Optrykt i *Surveys of economic theory*, vol. 2, pp. 1-124. London 1965.

Hichs, J. R. 1946. *Value and capital.* Oxford.

Houthakker, H. S. 1955/1956. The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis. *Review of Economic Studies* 23:27-31.

Leontief, W. W. 1947. Introduction to a theory of internal structure of functional relationships. *Econometrica* 15:361-73.

Levhari, D. 1968. A note on Houthakker's aggregate production function in a multifirm industry. *Econometrica* 36:151-54.

Robinson, J. 1953/1954. The production function and the theory of capital. *Review of Economic Studies* 21:81-106.

Solow, R. M. 1960. Investment and technical progress. I *Mathematical methods in the social sciences*, red. K. J. Arrow, S. Karlin og P. Suppes, pp. 89-104. Standford.

Solow, R. M. 1964. Capital, labour, and income in manufacturing. I *The behavior of income shares*, pp. 101-28, National Bureau of Economic Research, Studies in Income and Wealth, 26. Princeton.

Ølgaard, A. 1966. *Productivity, growth, and relative prices.* Amsterdam.