REPRODUKTIVE SYSTEMER

Af HECTOR ESTRUP*

Indledning.

I en foregående artikel[1] er der på basis af et elementært system blevet fremdraget nogle sider af reproduktive økonomiske systemer. Formålet med det følgende er at uddybe nogle af de punkter, der er blevet berørt i den første artikel.

I første række tages merværdibegrebet op i forbindelse med forklaring af en for lineære systemer vigtig matematisk problematik. Dernæst belyses dualiteten i systemets pris- og mængdebestemmelse samt nogle af de antagelser, der samler modellens enkeltelementer til en sammenhængende vækst- og fordelingsteori. Til slut omtales det såkaldte substitutionsteorem. Der vil således ikke blive tale om nogen sammenhængende generalisation af den simple korn-arbejdemodel. Hensigten er snarere at præsentere nogle resultater fra forskellige områder af de reproduktive modellers teori.

Merværdien.

1. Merværdibegrebet er kernen i analysen af faktorreproducerende produktionsprocesser. Det er af vigtighed at kunne afgøre, om et forelagt system af produktionsfunktioner tilsammen er i stand til mere end at reproducere sit eget faktorforbrug.

I den simple korn-arbejdemodel kunne dette spørgsmål besvares ved at stille arbejdernes kornproduktivitet og deres livsminimum over for hinanden. Hvis arbejderne i løbet af en periode kunne producere mere korn, end der i samme periode fordredes til deres underhold, ville systemet indeholde en merværdi. Problemet kan da være, hvorvidt denne betragtning kan generaliseres til at gælde i et system med mange processer, således at man udelukkende på basis af disses teknologiske kendetegn kan udtale sig om deres evne til at skabe en merværdi eller et nettoprodukt.

---

* Lektor ved Københavns Universitet, cand. oecon.

1. Hector Estrup, »Produktion og Reproduktion«, *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 1963, 3.-4. hefte.

REPRODUKTIVE SYSTEMER

Af HECTOR ESTRUP*

Indledning.

I en foregående artikel[1] er der på basis af et elementært system blevet fremdraget nogle sider af reproduktive økonomiske systemer. Formålet med det følgende er at uddybe nogle af de punkter, der er blevet berørt i den første artikel.

I første række tages merværdibegrebet op i forbindelse med forklaring af en for lineære systemer vigtig matematisk problematik. Dernæst belyses dualiteten i systemets pris- og mængdebestemmelse samt nogle af de antagelser, der samler modellens enkeltelementer til en sammenhængende vækst- og fordelingsteori. Til slut omtales det såkaldte substitutionsteorem. Der vil således ikke blive tale om nogen sammenhængende generalisation af den simple korn-arbejdemodel. Hensigten er snarere at præsentere nogle resultater fra forskellige områder af de reproduktive modellers teori.

Merværdien.

1. Merværdibegrebet er kernen i analysen af faktorreproducerende produktionsprocesser. Det er af vigtighed at kunne afgøre, om et forelagt system af produktionsfunktioner tilsammen er i stand til mere end at reproducere sit eget faktorforbrug.

I den simple korn-arbejdemodel kunne dette spørgsmål besvares ved at stille arbejdernes kornproduktivitet og deres livsminimum over for hinanden. Hvis arbejderne i løbet af en periode kunne producere mere korn, end der i samme periode fordredes til deres underhold, ville systemet indeholde en merværdi. Problemet kan da være, hvorvidt denne betragtning kan generaliseres til at gælde i et system med mange processer, således at man udelukkende på basis af disses teknologiske kendetegn kan udtale sig om deres evne til at skabe en merværdi eller et nettoprodukt.

* Lektor ved Københavns Universitet, cand. oecon.

1. Hector Estrup, »Produktion og Reproduktion«, *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 1963, 3.-4. hefte.

En sådan generalisation er mulig, og den kan formaliseres til en matematisk betingelse, der i givet fald kan anvendes som et merværditest. Denne betingelse indgår under navn af *Hawkins-Simon betingelsen*[1] som et grundelement i analysen af lineære modeller, og vi vil her kort forklare, hvad den går ud på.

2. Lad os forestille os to processer, der hver producerer eet gode, der på sin side anvendes som produktionsfaktor i begge processer. Vi forudsætter faste tekniske koefficienter, således at der til een enhed af gode nr. 1 medgår a_{11} enheder af gode nr. 1 og a_{21} enheder af gode nr. 2, indsat i begyndelsen af perioden. Til produktion af een enhed af gode nr. 2 kræves på samme måde a_{12} og a_{22} enheder af henholdsvis gode nr. 1 og 2. Disse oplysninger kan opstilles i tabelform som to matricer, en inputmatrix og en outputmatrix:

	Proces nr. 1	Proces nr. 2
Input af gode nr. 1	$a_{11}x_1$	$a_{12}x_2$
» » » » 2	$a_{21}x_1$	$a_{22}x_2$
Output af gode nr. 1	x_1	0
» » » » 2	0	x_2

Tabellerne skal forstås på den måde, at godemængderne i inputtabellen i løbet af perioden transformeres således, at man ved periodens slutning står med de mængder, der angives i outputmatricen. x_1 og x_2 betegner herved produktionens størrelse i henholdsvis proces nr. 1 og proces nr. 2[2]).

Merværdiproblemet kan nu formuleres således: Er det muligt at afstemme de to processer således efter hinanden, at den fremkomne produktion er

1. Hawkins and Simon, »Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability«, *Econometrica*, October 1949.
2. Det forudsættes altså, at de ved periodens begyndelse indsatte faktorer opbruges fuldstændigt i dennes løb. Herved udelukkes muligheden for produktionsfaktorer med mere end een periodes levetid. Denne forudsætning berører imidlertid ikke den principielle argumentation i artiklen. Langvarige faktorer kan indføres på flere måder, lettest ved en forudsætning om forbunden produktion, således at det samlede produktionsresultat i hver proces foruden den egentlige produktion omfatter de faktorer, der har været indsat i begyndelsen af perioden, men som ikke er blevet slidt op i løbet af denne og som derfor stadig er tilstede i visse mængder ved dens slutning.

tilstrækkelig til at sikre processernes identiske gentagelse i den kommende periode? Hvad der kommer herudover er da ren nettoproduktion.

3. Lad os med n_1 og n_2 betegne den eventuelle overskudsproduktion af henholdsvis gode nr. 1 og gode nr. 2. Vi har da:

$$(1) \qquad \begin{aligned} n_1 &= x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 \\ n_2 &= x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 = -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 \end{aligned}$$

Spørgsmålet er herefter det rent matematiske, om dette ligningssystem er således beskaffent, at n_1, n_2, x_1 og x_2 alle kan være positive. Det ses umiddelbart, at man i hvert fald må forlange, at

$$(2) \qquad (1 - a_{11}) > 0 \quad \text{og} \quad (1 - a_{22}) > 0$$

men hertil kommer en yderligere betingelse. Skal n_1 og n_2 være positive, kan vi skrive (1) således:

$$\begin{aligned} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &> 0 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 &> 0 \end{aligned}$$

Når endvidere såvel x_1 som x_2 skal være positive, kan disse uligheder sammenfattes på følgende måde:

$$\frac{1-a_{11}}{a_{12}} > \frac{x_2}{x_1} > \frac{a_{21}}{1-a_{22}}$$

Skal denne ulighed være opfyldt, må vi om koefficienterne forlange, at

$$(3) \qquad (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{21} \cdot a_{12} > 0$$

altså at determinanten af koefficientmatricen i (1) skal være positiv.

Betingelserne (2) og (3) udgør Hawkins-Simon betingelsen for, at den betragtede to-proces-model indeholder en merværdi. Disse matematiske betingelser har imidlertid en simpel økonomisk fortolkning.

4. Lad os udregne, hvor meget der – direkte og indirekte – forbruges af gode 1 ved produktion af een enhed af dette gode. I første omgang har vi det direkte forbrug på a_{11} enheder, hvortil kommer a_{21} enheder af gode 2.

Til produktion af a_{21} enheder af gode 2 medgår $a_{21} \cdot a_{12}$ enheder af gode 1 og yderligere $a_{21} \cdot a_{22}$ enheder af gode 2. Det indirekte forbrug af gode 1 er altså foreløbig lig $a_{21} \cdot a_{12}$. Men de $a_{21}a_{22}$ enheder af gode 2 er også produceret ved hjælp af gode 1, idet der hertil er medgået $a_{21}a_{22} \cdot a_{12}$ enheder foruden $a_{21}a_{22} \cdot a_{22}$ enheder af gode 2. Ved nu at fortsætte denne opløsning kan vi få det samlede direkte og indirekte forbrug af gode 1 som summen af den uendelige række:

$$a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{22} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{22}^{2} + \ldots a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{22}^{n} \ldots$$

Når a_{22} forudsættes mindre end een, kan denne sum skrives

$$a_{11} + \frac{a_{21}a_{12}}{1-a_{22}}$$

Det er nu selvfølgeligt at forlange, at det herved bestemte forbrug skal være mindre end produktionen, således:

$$a_{11} + \frac{a_{21}a_{12}}{1-a_{22}} < 1$$

eller

$$(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{21} \cdot a_{12} > 0$$

altså netop determinantbetingelsen (3). En tilsvarende udregning for gode 2 vil give nøjagtig den samme betingelse.

5. Hawkins-Simon betingelsen har altså et klart intuitivt indhold: Det forudsættes, at produktionen af en given vare finder sted under anvendelse af samme vare som produktionsfaktor. I merværdibegrebet ligger da, at man ved produktion af denne vare direkte og indirekte forbruger mindre, end der produceres. Dette indebærer et krav til produktionsstrukturen, og formuleres det matematisk, får man netop Hawkins-Simon betingelsen, der i mere komplicerede strukturer end den her skitserede vil fremtræde som et kompleks af determinantbetingelser[1].

1. Jfr. Dorfman, Samuelson og Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, New York 1958, ch. 9.

Neumann-systemet.

1. Lad os finde de ligevægtige priser i det foran beskrevne system. Af input- og outputtabellerne ses det, at man for at producere een enhed af gode 1 skal disponere over a_{11} enheder af gode 1 og a_{21} enheder af gode 2. Som omtalt skal dette forstås således, at man *ved periodens begyndelse* skal råde over de nævnte enheder, og at dette fører til, at der ved dens slutning er produceret een enhed af gode 1. Kaldes priserne på de to goder for henholdsvis p_1 og p_2, skal man altså ved periodens begyndelse råde over beløbet $a_{11}p_1+a_{21}p_2$. Ved periodens slutning sælges produktionsresultatet, een enhed af gode 1, og indbringer herved beløbet p_1. I ligevægt skal dette salgsprovenu lige netop dække værdien af faktorforbruget plus dettes forrentning i løbet af perioden. Kaldes rentefoden r, haves altså prisligningen

$$p_1 = (1 + r)(a_{11}p_1 + a_{21}p_2) \tag{4a}$$

Et tilsvarende ræsonnement giver for prisen på gode 2:

$$p_2 = (1 + r)(a_{12}p_1 + a_{22}p_2). \tag{4b}$$

Herved får vi to ligninger med de tre ubekendte, r, p_1 og p_2. Prisernes absolutte højde vil imidlertid være ubestemt. Divideres begge ligninger igennem med f.eks. p_1, tilbagestår et system af to ligninger med to ubekendte, rentefoden r og prisforholdet p_2:p_1. Systemet vil have positive løsninger, når Hawkins-Simon betingelsen er opfyldt; renten er altså ikke en uafhængig variabel. Den bestemmes i ligevægt samtidigt med de relative priser.

2. Vi ønsker nu at opstille et til prisligningssystemet (4) svarende mængdesystem. Vi gør herunder den specielle forudsætning, at produktionsprocesserne er afstemt således efter hinanden, at produktionen af de to goder foregår i samme forhold som det, hvori de forbruges i systemets processer. Når systemet indeholder en merværdi, betyder dette, at mængderne af de to goder fra periodens begyndelse til dens slutning *vokser* med en fælles rate, som vi betegner R. Ved produktionen af x_1 og x_2 enheder af henholdsvis gode 1 og gode 2 er forbruget af de to goder bestemt ved $a_{11}x_1+a_{12}x_2$ enheder af gode 1 og $a_{21}x_1+a_{22}x_2$ enheder af gode 2. Vores antagelse giver da

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + R)(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ x_2 &= (1 + R)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{aligned} \tag{5}$$

Ved division med f.eks. x_1 tilbagestår et ligningssystem med to ligninger i to ubekendte, forøgelsesfaktoren $(1+R)$ og mængdeforholdet x_2:x_1. Systemet vil have en positiv løsning, når Hawkins-Simon betingelsen er opfyldt. (5) er det til (4) svarende duale ligningssystem; R spiller formelt samme rolle i (5) som r i (4).

3. Løses de to ligningssystemer (4) og (5), finder man de ligevægtige prisforhold, de harmoniske mængdeforhold, rentefaktoren $(1+r)$ og ekspansionsfaktoren $(1+R)$, og det viser sig, at r netop bliver lig R. Systemet er et Neumann-system, forstået således, at samtlige producerede goder er nødvendige som faktorer i produktionen. Modellen kan nu udbygges på to væsensforskellige områder.

For det første kan man i systemet indføre goder, der er nødvendige som produktionsfaktorer, men som ikke kan reproduceres. I de klassiske systemer optræder jorden på denne plads, hvorimod man i moderne analyse lader arbejdskraften indgå som nødvendig, men irreproducerbar produktionsfaktor.

Dernæst kan man supplere systemet med goder, der vel kan produceres, men som ikke er nødvendige for reproduktionen. Det vil typisk dreje sig om konsumgoder. I en vis forstand kan man opfatte disse som modstykke til systemets irreproducerbare faktorer, et forhold der især kommer til udtryk som en formel dualitet mellem på den ene side den måde, hvorpå det ikke-produktive forbrug vil indgå i systemets mængdeligninger, og på den anden side den rolle, aflønningen af de irreproducerbare faktorer kommer til at indtage i det duale prisligningssystem. Det er denne dualitet, vi i det følgende vil vise.

Irreproducerbare faktorer.

1. Hvis man i systemet af produktionsfunktioner indregnede alle de forhold, der var nødvendige og tilstrækkelige til produktionens gennemførelse, ville merværdien være en fysisk umulighed. Systemet måtte nemlig i så fald adlyde sætningen om energiens konstans. Indeholder et sæt reproducerende produktionsfunktioner derfor en merværdi, kan dette kun betyde, at man ikke har taget hensyn til alle de forhold, der rent fysisk bidrager til processernes gennemførelse. Denne banale iagttagelse har imidlertid nogle vigtige konsekvenser.

En produktionsfunktion er således fra et naturhistorisk synspunkt en meget ufuldkommen beskrivelse af årsagerne til produktionsresultatets fremkomst. Den redegør nemlig kun for de årsager, der viser sig som et produktionsnødvendigt forbrug af *økonomiske* goder, d.v.s. sådanne, der har en positiv pris. Heraf følger nu, at produktionsfunktionernes form selv må være påvirket af prisdannelsen i det omfang denne er bestemmende for, hvilke goder der får positive priser. Således bliver det tvivlsomt, om produktionsstrukturen kan indgå som teknologisk givet datum i en konsistent forklaring af prisdannelsen. Problemet har fået sin foreløbige løsning ved Zeuthens betragtning, hvorefter en faktor har prisen 0, hvis der er en ubenyttet rest af den. Denne løsning har flere svagheder. Den mest iøjnefaldende er nok dens uanvendelighed for så vidt angår beskæftigelsen af arbejdskraft.

Det forhold, at produktionsfunktionerne som faktorer kun medregner økonomiske goder, medfører, at merværdien fysisk må forklares på basis af frie goders og faktorers indsats. Dette betyder, at systemet kan ændres radikalt, når faktorer ophører med at være frie og bliver knappe.

2. I et system uden exogene tilførselskilder skyldes hele merværdien som omtalt frie faktorers indsats. Det økonomiske system registrerer dette i form af en profit til de forskellige aktiviteter, proportional med deres anvendelse af økonomiske faktorer. Når der indføres en faktor, der ikke reproduceres af systemet f.eks. arbejdskraft, optages fra et økonomisk synspunkt en ny årsag til forklaring af merværdien. Der opstår følgeligt et fordelingsspørgsmål med hensyn til dennes deling mellem profit og aflønning af arbejdskraft.

Kald arbejdsforbruget pr. produktenhed i hver af de to processer for henholdsvis b_1 og b_2, og kald arbejdslønnen w. Vi kan da skrive to ligninger til bestemmelse af de ligevægtige priser.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (1 + r)(a_{11}p_1 + a_{21}p_2) + b_1w \\
p_2 &= (1 + r)(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) + b_2w
\end{aligned}
\tag{6}
$$

For hver proces gælder det således, at den ligevægtige pris netop skal dække aflønningen af arbejdskraften plus forbrug og forrentning af de til produktion af een enhed nødvendige materielle produktionsfaktorer. Prisligningerne er endvidere her opbygget ud fra den forudsætning, at arbejdskraften lønnes ved udløbet af den periode, i hvilken den har været indsat som produktionsfaktor; lønsummerne i (6) er derfor ikke multipliceret med $(1 + r)$. Der er således ingen »lønningsfond«.

Vi er nu interesseret i sammenhængen mellem det for processerne fælles profit- eller renteniveau og arbejdslønnens højde. Dette problem behandles udførligt af Sraffa[1], og vi vil her beskrive hans fremgangsmåde.

3. Problemet er i første række et måleproblem, nemlig et spørgsmål om, hvorledes arbejdsaflønningen kan måles, så den bliver direkte sammenlignelig med profitraten. Nok er begge størrelser mål for henholdsvis kapi-

1. Sraffa, *Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge 1960.

talens og arbejdskraftens aflønning, men de er normalt af helt forskellig dimension og derfor ikke direkte anvendelige i en model, der skal beskrive sammenhængen mellem profitrate og arbejdsløn. Sraffa stiller sig den opgave at finde en målestok, i forhold til hvilken arbejdsaflønningen kan måles, og han konstruerer til det formål »the standard composite commodity«. Herved forstår han en kombination af goder, ved hvis produktion der forbruges goder netop i det forhold, hvormed de forskellige goder indgår i den pågældende kombination. Standardkombinationen vil således være bestemt ved de mængdeforhold, der findes af systemet (5). Når processerne indrettes efter hinanden, således at de tilsammen producerer standardgodekombinationen, taler Sraffa om det til processerne svarende standardsystem, ligesom »the standard ratio« er hans betegnelse for R i (5). Standardbegreberne fastlægges således på basis af den reproducerende del af produktionsteknologien. Ved at benytte ligningssystemet (5) ser man jo bort fra de irreproducerbare faktorers indsats.

Standardkombinationen er i første række givet ved en række mængdeforhold mellem de producerede goder. For at bestemme de absolutte mængder måler Sraffa arbejdskraften på en sådan måde, at den samlede arbejdsindsats i systemet kan sættes lig een.

Hvis der i standardsystemet er produceret mængderne x_1 og x_2, er der ved periodens begyndelse indsat mængderne $\frac{x_1}{1+R}$ og $\frac{x_2}{1+R}$ af hver af de to goder, jfr. (5). Udover hvad der kræves til produktionsprocessernes identiske gentagelse, er der således produceret $\frac{R\,x_1}{1+R}$ enheder af gode 1 og $\frac{R\,x_2}{1+R}$ enheder af gode 2. Disse to størrelser udgør tilsammen merværdien eller standardnettoproduktet.

Standardnettoproduktets værdi målt i penge kan nu skrives $\frac{R\,x_1}{1+R}\,p_1 + \frac{R\,x_2}{1+R}\,p_2$, hvor p_1 og p_2 som før betegner priserne på de to goder. Denne størrelse kalder Sraffa standardnationalindkomsten, og han sætter den lig een, idet han derved fastlægger den monetære skala, d.v.s. prisernes absolutte højde.

Med disse målingskonventioner kan arbejdslønnen w opfattes som den del af standardnettoproduktet, der kan købes for den samlede arbejdsaflønning. Resten, $(1-w)$, udgør altså den del af standardnationalindkomsten, der går til profit. Værdien af de ved periodens begyndelse indsatte mængder af gode 1 og 2 er imidlertid lig med $\frac{1}{R}$, når standardnationalindkomsten er lig een[1]. Sættes profitten i forhold hertil, fås til bestemmelse af profitraten r:

$$r = \frac{1-w}{\frac{1}{R}} = R(1-w) \tag{7}$$

Dette er Sraffas relation. Den er opstillet ved nogle simple ræsonnementer inden for et standardsystem, men det fremgår ikke umiddelbart, hvorvidt dens rigtighed følger af den anvendte definition og måling af arbejdsløn, nationalindkomst og profit, eller om den siger noget egentligt om løn og profit i lineære reproducerende systemer. I et standardsystem er den således blot et udtryk for, at den samlede nationalindkomst deles udtømmende i løn og profit. Det er imidlertid afgørende, at relationen kan indses at være gyldig i *alle* systemer. Thi er først profitraten givet, vil lønnens og prisernes indbyrdes forhold være bestemt ved prisligningerne (6) uden hensyn til, i hvilke forhold de enkelte goder produceres. Det vil således i denne henseende være tilstrækkeligt at kende forholdene i standardsystemet. Her er (7) imidlertid identisk opfyldt.

4. Sraffas relation er en ligning, der viser den fundamentale sammenhæng mellem arbejdsløn og profitrate i lineære systemer som de her omhandlede. R er bestemt ved systemets teknologi, og (7) angiver da en lineær forbindelse mellem r og w. Er $w = 0$, antager profitraten sin største værdi R. Arbejdskraften glider da som et frit gode ud af produktionsteknologien, og systemet kan betragtes som et simpelt Neumann-system. Ved at give w større værdier aftager profitraten, indtil $w = 1$, hvor $r = 0$. I så fald forsvinder renten fra prisligningerne, og priserne kan da bestemmes udelukkende på basis af systemets tekniske koefficienter. Ved at løse (6) vil man da se, at hvert godes pris kan angives som værdien af den arbejdskraft, der i alt direkte og indirekte er medgået til dets produktion. Tilfældet $w = 1$ kan siges at realisere den klassiske arbejdsværdilære.

1. Værdien af periodens samlede produktion er lig $p_1x_1 + p_2x_2$. Da både x_1 og x_2 i løbet af perioden er vokset med vækstraten R, er værdien af indsatsen af gode 1 og 2 ved periodens begyndelse lig periodens produktionsværdi divideret med $(1+R)$. Iflg. forudsætningen i det foregående fastsættes de absolutte priser således, at værdien af standardnettoproduktet er lig een, altså $\frac{R}{1+R}p_1x_1 + \frac{R}{1+R}p_2x_2 = 1$; heraf følger, at $(p_1x_1 + p_2x_2) : (1+R) = \frac{1}{R}$.

De konklusioner, der kan drages på basis af Sraffas ligning, bygger i væsentligt omfang på, at R er en teknologisk givet konstant. Indføres substitutionsmuligheder i processerne, kompliceres forholdene noget, idet R i så fald bliver funktionelt afhængig af profitraten.

Uproduktivt forbrug.

1. Forbruger systemet irreproducerbare faktorer, sker der en værditilførsel fra omverdenen til processerne. Det uproduktive forbrug kan analogt hermed betragtes som en værdiafgang fra systemet til omverdenen. Principielt behøver denne afgang ikke at medføre, at goder føres helt ud af systemet. Afgangen kan nemlig regnes allerede fra det øjeblik, hvor et gode forbruges i en proces, hvis output ikke, direkte eller indirekte, anvendes som produktionsfaktor ved det pågældende godes produktion. Sådanne processer bidrager ikke til merværdiskabelsen, og de kan med et farvet ord betegnes uproduktive eller, som hos Sraffa, non-basic. Det klassiske eksempel på aktiviteter af denne art vil omfatte de personlige tjenesteydelser. I modeller, hvor arbejdskraften ikke reproduceres, vil yderligere hele konsumgodefabrikationen findes i denne gruppe.

Ser man bort fra alle uproduktive processer, tilbagestår et system af »basic industries«, hvor ethvert gode, der produceres, direkte eller indirekte indgår som produktionsfaktor ved ethvert andet godes produktion[1].

2. Lad os supplere systemet med en antagelse om uproduktivt forbrug. Dette forbrug, konsumet kan vi kalde det, antages at foregå i fast mængdeforhold, således at et konsum på k_1 enheder af gode 1 altid ledsages af et konsum på k_2 enheder af det andet gode. Denne antagelse er ækvivalent med en forudsætning om, at der uden for systemet af produktive processer findes een proces, der producerer konsumgoder, og hvis faktorforbrug er karakteriseret ved de faste tekniske koefficienter k_1 og k_2.

Antag nu, at systemet etablerer sig med en harmonisk vækstrate g. Periodens produktion efterspørges da dels til konsum, dels som faktorindsats til den kommende periodes produktion. I denne periode vil produktionen være $(1+g)x_1$ og $(1+g)x_2$ enheder af henholdsvis gode 1 og gode 2. Den hertil nødvendige faktorindsats er da bestemt ved $(1+g)\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)$ og $(1+g)\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$ for hvert af de to goder. Hertil kommer konsumet på henholdsvis k_1c og k_2c af gode 1 og 2, hvor c er en parameter. Dette giver os mængdeligningerne:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1+g)\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + k_1 \cdot c \\
x_2 &= (1+g)\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + k_2 \cdot c\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Ligesom prisligningerne (6) bestemte en relation mellem arbejdsløn og profitrate, således bestemmer det hermed duale system (8) en sammenhæng mellem parameteren c og vækst-

1. Vi ser her bort fra det betydningsfulde, men matematiske ret komplicerede problem om systemets reduktibilitet.

raten g. Vi vil derfor ved hjælp af nogle standardbegreber etablere en fortolkning af størrelsen c, så den bliver sammenlignelig med g.

3. Ved systemets *standardpriser* vil vi forstå de priser p'_1 og p'_2, hvis indbyrdes forhold findes af ligningerne (4), og hvis absolutte størrelse fastsættes ud fra vilkåret, at $k_1p'_1 + k_2p'_2 = 1$. Værdien af det samlede konsum optaget til standardpriser bliver herefter bestemt ved $ck_1p'_1 + ck_2p'_2 = c(k_1p'_1 + k_2p'_2) = c \cdot 1 = c$, hvorved vi samtidig har fået en fortolkning af parameteren c. Den reale skala for den betragtede periode fastlægges ved en vedtagelse om, at det til standardpriser vurderede nettoprodukt skal være lig een.

Hvis standardpriserne er realiseret, antager profitraten sin maksimale værdi, bestemt ved R, således at hele nettoproduktet går til profit. Er værdien af nettoproduktet lig een, må der derfor i begyndelsen af perioden have været indsat mængder af gode 1 og 2 til en samlet værdi af $\frac{1}{R}$. Skal disse godemængder vokse med vækstraten g, skal der af nettoproduktet i den betragtede periode investeres $g \cdot \frac{1}{R}$. Den resterende del heraf konsumeres. Vi får altså:

$$c = 1 - \frac{g}{R}$$

eller

$$g = R(1 - c). \tag{9}$$

Dette er netop den til Sraffas ligning svarende duale relation; den kan ligesom (7) vises at være gyldig, uanset om standardforudsætningerne opretholdes. Kun i et standardprissystem vil den have karakter af en identitet, idet den i så fald blot er et udtryk for den Harrod-Domarske vækstrelation, at vækstraten er lig opsparingskvoten divideret med kapitalkoefficienten.

4. Når vækstraten er givet, er systemets mængdeforhold givet ved ligningerne (8). De relative priser er fuldstændigt bestemt af (6), når renten er givet. Nettoproduktets værdi i forhold til værdien af de ved begyndelsen af perioden indsatte mængder af de to goder er således en funktion af såvel vækstrate som af rente. Dette er ensbetydende med, at systemets samlede værditilvækst Y i forhold til kapitalens værdi K kan skrives som en funktion af rente og vækstrate:

$$\frac{Y}{K} = f(g,r)$$

Denne funktion repræsenterer en syntese af dualiteten i systemets pris- og mængdebestemmelse. Den kan nemlig ved et simpelt formelt ræsonnement vises at være symmetrisk i g og r, således:

$$f(g, r) = f(r,g)^{1} \tag{10}$$

---

1. Betragter man systemerne (6) og (8), ses det, at man rent formelt kan lade p'erne betyde mængder, x'erne priser, r vækstrate, g profitrate, w konsum og c arbejdsløn, og alligevel få en fuldt konsistent fortolkning af ligningerne. Alle værdistørrelser, d.v.s. produkter af priser og mængder, vil være upåvirket heraf, og størrelsen $\frac{Y}{K}$ vil således være den samme, uanset hvordan ligningerne læses.

Vækst og profit.

1. Som modellen præsenterer sig, udbygget med irreproducerbare faktorer og uproduktivt forbrug, vil alle relative priser og mængder være bestemt i to duale systemer, når vækstrate og profitrate kendes. Vi vil her diskutere, hvorledes supplerende antagelser kan sammenkæde vækst og profit og på den måde lukke modellen fuldstændigt. I den simple korn-arbejde model kunne dette ske ved at stille foretagernes akkumulationstilbøjelighed over for arbejdsstyrkens formeringshyppighed. Vi anfører her nogle tilsvarende mekanismer i den udvidede model.

For det første kan man bygge på den klassiske hypotese, at al lønindtægt forbruges, og at profitten opspares. Herved bliver vækstrate og profitrate af samme størrelse[1]. Bag denne hypotese kan der ligge to forskellige antagelser med hensyn til arbejdsudbuddets bestemmelse. Man kan enten ved en klassisk ricardiansk betragtning opfatte konsumet som arbejdskraftreproducerende, eller også i neoklassisk ånd opfatte arbejdsudbuddet som givet udefra, men lade langtidsligevægt indebære fuld beskæftigelse. I første tilfælde vil systemet reduceres til et Neumann-system, der på een gang fastlægger rente og vækstrate. Under den anden antagelse vil vækst og profitrate være bestemt ved den udefra givne tilvækst i arbejdsstyrken.

For det andet kan man, med udgangspunkt i Harrod-Domars vækstidentitet under forskellige forudsætninger foretage en sammenstilling af ligevægtig profitrate og vækstrate.

2. Vi forudsætter i det følgende et udefra givet arbejdsudbud, der vokser med den årlige rate g, og vi antager, at ligevægt skal være ensbetydende med fuld beskæftigelse af arbejdskraften.

Betegner Y indkomsten, S opsparingen, K kapitalen og q dennes tilvækstrate, kan vi skrive Harrod-Domars identitet:

$$q = \frac{S}{Y} \cdot \frac{Y}{K}$$

Hvis vi samtidig antager, at

a) kapitalkoefficienten $\frac{Y}{K}$ er teknologisk givet,

b) opsparingen udgør en psykologisk bestemt brøkdel af indkomsten,

1. Kapitalens tilvækst er nemlig lig med den del af produktionen, som ikke er konsumeret. Under den anførte forudsætning bliver investering og profit derfor lige store, og det samme gælder følgelig for profitraten og kapitalens relative vækstrate. Denne sidste angiver samtidig hele systemets vækstrate.

vil kapitalens ligevægtige vækstrate, »the warranted rate of growth«, være bestemt. Derimod kan vi ikke gå ud fra, at denne netop skulle være lig den relative vækst i arbejdsudbuddet, d.v.s. »den naturlige vækstrate« g. Antagelserne a) og b) er derfor i almindelighed uforenelige med en antagelse om, at langsigtet ligevægt er ensbetydende med fuld beskæftigelse[1]. I det følgende modificeres derfor de to antagelser[2].

3. Lad os i første række bibeholde antagelse b), men erstatte a) med en forudsætning om, at kapitalkoefficienten er funktionelt afhængig af profitraten. Denne afhængighed vil typisk være til stede, hvis der er substitutionsmuligheder i de enkelte processer, men selv i et system med faste tekniske koefficienter vil der være en vis afhængighed, jfr. (10) ovenfor. Afhængig af kapitalkoefficientens fleksibilitet kan vi da finde en profitrate, der er forenelig med fuld beskæftigelse, således at kapitalens ligevægtige vækstrate netop bliver lig væksten i arbejdsudbuddet. Forklares den ligevægtige fordeling på basis af forholdene i produktionsstrukturen, f.eks. udtrykt ved en antagelse om en variabel kapitalkoefficient, taler man om *neo-klassisk* fordelingsteori. Denne teori vil især bygge på mulighederne for substitution mellem kapital og arbejdskraft i systemets processer. Sådanne muligheder vil blive behandlet i det følgende afsnit.

4. Dernæst kan vi forsøge at opretholde antagelse a), men erstatte b) med en forudsætning om, at der spares forskelligt ud af profitindtægter og af lønindtægter. Dette er Kaldors udgangspunkt. Følgen heraf er, at den summariske opsparingskvote $\frac{S}{Y}$ bliver en funktion af indkomstens fordeling på løn og profit. Afhængig af denne kvotes fleksibilitet kan vi også her finde en profitrate, der via Harrod-Domars vækstidentitet vil bestemme en vækstrate for kapitalen, der netop bliver lig vækstraten for arbejdsstyrken. Vi står her over for en fordelingsteori, der bygger på forholdene på efterspørgselssiden, udtrykt ved antagelsen om foretageres og arbejderes forskellige opsparingskvoter. I denne forstand er Kaldors teori mere »keynesiansk« end den neoklassiske.

Det vil sikkert være fejlagtigt at opfatte de to teorier som modsætninger. De angår hver sin komponent i vækstidentiteten og skulle derfor tilsammen nok give en mere fyldig fordelingsforklaring, end man kunne få ved en isoleret anvendelse af enten den neoklassiske eller af Kaldors.

---

1. Jfr. R. F. Harrod, *Towards a Dynamic Economics*, London 1948, lecture three.
2. Jfr. Kaldor, »Capital Accumulation and Economic Growth« *The Theory of Capital*, ed. by Lutz and Hague, New York 1961.

5. Tilbage står nu at vurdere rimeligheden af den gjorte forudsætning om fuld beskæftigelse. Her er det i første række muligt helt at afvise problemet, idet man rent hypotetisk indskrænker sig til at undersøge de ligevægtige forløb i systemet under forudsætning af fuld beskæftigelse. Man kunne evt. begrunde forudsætningens realisme ud fra den betragtning, at langvarig arbejdsløshed er politisk utålelig og derfor i sig selv ustabil, uanset om dette fremgår af modellens mekanik eller ej.

Imidlertid kan man også tillægge systemet en klassisk mekanik ved en forudsætning om, at reallønnen tilpasses i overensstemmelse med Zeuthens føromtalte ræsonnement. Vanskeligheden ved denne antagelse er åbenbart, at en tilpasning af reallønnen må vise sig ved bevægelser i *forholdet* mellem løn og prisniveau. Dette vil typisk være tilfældet, dersom arbejdskraften aflønnes i naturalia, således at prisdannelsen på arbejdskraft og prisdannelsen på løngoder automatisk finder sted i samme proces. Foregår denne prisdannelse adskilt som i en pengeøkonomi, er det vanskeligt at se, hvorledes beskæftigelsesproblemet overhovedet skulle kunne behandles i modeller, der som de foregående opererer klassisk, d.v.s. i *relative* priser og mængder.

Når Neumann-Systemet åbnes ved indføring af irreproducerbare faktorer og uproduktivt forbrug, falder den moderne makroøkonomiske vækst- og fordelingsteori således naturligt ind som et integrerende led i modellen. Dette er også udgangspunktet for Kaldor i hans forannævnte artikel om vækst- og kapitalakkumulation[1].

Substitution.

1. Hidtil har vi bygget på en forudsætning om, at produktionsfunktionerne havde faste tekniske koefficienter. Herved udelukkes mulighederne for substitution i de enkelte processer. Vi vil nu ophæve denne strenge linearitetsforudsætning ved om produktionsfunktionerne blot at forudsætte, at de er homogene af 1. grad, således at der inden for hver enkelt proces kan være en række substitutionsmuligheder for anvendelsen af de forskellige faktorer.

Vi tænker os for enkeltheds skyld et system bestående af 1. grad homogene produktionsfunktioner, der hver producerer eet gode, og hvis produktionsfaktorer består af disse goder. Yderligere antager vi, at hver proces forløber således, at man i begyndelsen af perioden disponerer over produktionsfaktorerne, der alle i løbet af perioden forbruges fuldstændigt i processerne. Vi vil se på prisbestemmelsen i denne model under forudsætning af, at omkostningsprincippet realiseres i alle produktionsgrene.

1. Se N. Kaldor op. cit.

2. Lad os betragte den enkelte proces. Hvis vi havde haft faste tekniske koefficienter til karakteristik af faktorforbruget, er det åbenbart, at totalomkostningerne ville være proportionale med produktionens størrelse, hvis faktorpriser og rentefod var givet udefra. Processens grænse- og gennemsnitsomkostninger ville således være lige store og uafhængige af produktionens størrelse, og deres højde kun afhænge af faktorpriser og rentefod og af produktionsteknologien. Når den betragtede proces er karakteriseret ved en produktionsfunktion, der er homogen af 1. grad, må man tænke sig denne således beskaffen, at det på basis af givne faktorpriser og rentefod er muligt at udregne den faktorkombination, der gør omkostningerne pr. produceret enhed mindst mulige. Det indbyrdes forhold mellem faktormængderne i denne kombination vil imidlertid på grund af processens homogenitet være *uafhængigt* af produktionens størrelse. Dette betyder, at processens minimale enhedsomkostninger kun afhænger af rentefod, faktorpriser og af produktionsfunktionens form. Når produktionsfunktionen selv er udefra givet, betyder det, at vi for hver proces kan skrive de minimale enhedsomomkostninger som en funktion af faktorpriser og rentefod.

3. Hvis omkostningsprincippet er realiseret under fuldkommen konkurrence, vil produktprisen for hvert gode være lig de minimale enhedsomkostninger. På denne måde får vi for hver proces en ligning, der sammenkæder produktpris, rentefod og faktorpriser. Da hver faktor ifølge vore antagelser optræder som produkt i een proces, får vi herved lige så mange ligninger, som der er produktionsfaktorer. Er der i alt n processer, og anvendes alle produkter som faktorer, får vi således n ligninger med $n+1$ ubekendte, nemlig de n priser samt rentefoden. Nu er den til givne faktorpriser svarende faktorkombination, der giver de laveste enhedsomkostninger, kun afhængig af de relative priser og ikke af disses absolutte højde. I de n prisligninger kan vi derfor arbitrært sætte een pris lig een. Tilbage står da et system med n ligninger til bestemmelse af de resterende $(n-1)$ priser samt rentefoden.

Disse prisligninger kan opstilles udelukkende ud fra et kendskab til produktionsfunktionernes form. Skarpt kan man formulere resultatet således: I et system af faktorreproducerende produktionsfunktioner, der er homogene af 1. grad, vil under fuldkommen konkurrence alle priser samt rentefoden være teknologisk bestemt. De vil således være uafhængige af de mængdeforhold, i hvilke produktionen efterspørges.

Heraf følger nu videre, at det indbyrdes forhold mellem de faktormængder, der anvendes i hver enkelt proces må være teknologisk bestemt. Thi den anvendte faktorkombination er fuldstændigt fastlagt ved de relative priser og rentefoden. Yderligere kan man slutte, at forbruget af de enkelte faktorer pr. enhed output vil være teknologisk bestemte konstanter, proces for proces.

Selv om derfor substitution er mulig i den enkelte proces, vil systemet som helhed fremtræde som et rent lineært system med faste input-output koefficienter. Der vil for så vidt være tale om en sædvanlig input-output model, men den bygger ikke på de almindelige forudsætninger om faste tekniske koefficienter. Disse forudsætninger om produktionsteknologien er her erstattet med den svagere homogenitetsforudsætning plus en antagelse om marginal prisdannelse i overensstemmelse med omkostningsprincippet.

4. Sætningen om, at omkostningsprincippets realisation vil bevirke, at priserne i et reproducerende system af produktionsfunktioner kan bestemmes udelukkende på basis af produktionsteknologien, tillægges almindeligvis Samuelson, og den betegnes substitutionsteoremet[1]. Paradoksalt nok indebærer dette teorem, at forskydninger i efterspørgselen netop *ikke* vil fremkalde substitution i systemets processer.

5. Indtil nu har vi forudsat, at systemet var fuldstændigt selvsupplerende på faktorsiden, således at alle produktionsfaktorer reproduceredes. Lad os her antage, at processerne bruger een ude fra kommende faktor, f.eks. arbejdskraft. Da vi ikke har forøget antallet af processer, vil antallet af prisbestemmende ligninger være uforandret, men der er nu en pris yderligere at bestemme. Antallet af ubekendte er n relative priser samt rentefoden. Hvis fx. renten derfor fastholdes, kan vi som før beregne samtlige relative priser og faktorforhold, der på denne måde kommer til at afhænge både af den teknologiske struktur og af renten. En ændring af den exogene rente vil fremkalde substitution i systemets processer. Efterspørgselen er derimod stadig betydningsløs i denne forbindelse.

Til hver rentestørrelse svarer derfor et bestemt prissæt og et tilsvarende sæt af tekniske koefficienter. Vi får på denne måde en serie af input-output-tabeller med faste tekniske koefficienter, hver tabel svarende til een bestemt størrelse for renten.

6. Når renten ligger fast, bliver systemet således formelt af samme type som dem, vi i det foregående har behandlet, og som vi finder hos Sraffa. Vi kan derfor også indrette det som et standardsystem og derpå finde dets maksimale reproduktionsevne, d.v.s. den størst mulige relative forøgelse af godemængderne, når alle beholdninger skal forøges med samme rate. Dette er Sraffas »standard ratio« — R. Derimod kan vi ikke længere anvende Sraffas ligning. R findes nemlig på basis af processernes tekniske

1. Se Koopmans T. (ed): *Activity Analysis of Production and Allocation*, ch. VII, New York, 1951.

koefficienter, og disse er jo i det her omhandlede tilfælde funktioner af rentefoden. Dette vil da også gælde R, der således selv bliver en funktion af renten. Ligeledes vil standardproduktets sammensætning variere med renten. I Sraffas ligning måles arbejdslønnen imidlertid i forhold til standardproduktet. Selv om vi derfor, når renten fastholdes, formelt stadig kan opstille denne ligning, kan vi ikke længere umiddelbart anvende den som illustration af sammenhængen mellem profitrate og arbejdsløn. For det første vil R være en funktion af r, for det andet betyder w ikke det samme ved de forskellige størrelser af r.

I et appendix vises substitutionsprincippets anvendelse i en Cobb-Douglas produktionsstruktur.

Slutning.

Vi har i det foregående bevidst søgt at undgå en fordybelse i det formelle matematiske apparat, der vil være nødvendigt for en mere indgående drøftelse af reproduktive modeller. Grundlaget for analysen vil almindeligvis være temmelig avanceret lineær algebra[1], og så snart man bevæger sig bort fra de simpleste antagelser om produktionsteknologien, bliver behandlingen af de økonomiske systemer vanskeliggjort, fordi resultaterne i så fald fremtræder som matematiske sætninger, hvis betydning ikke umiddelbart kan gennemskues ved noget egentligt økonomisk ræsonnement. Rent praktisk vil dette sige, at den lange vej fra forudsætninger til resultater kan fordunkle den matematiske metodes operationelle fordele, for så vidt som man ønsker den anvendt som grundlag for kvantitativ beregning og analyse. Dette forhold tilspidses, hvor den matematiske analyse koncentreres om at bevise eksistens eller ikke-eksistens af løsninger til et forelagt system uden samtidig at angive en konstruktion, hvorefter sådanne løsninger kan beregnes. Man kan måske ligefrem sondre mellem en bevisende og en konstruerende matematisk økonomi; i hvert fald afspejler en sådan sondring sig ved den placering, man har givet lineære systemer i den økonomiske teori.

For det første kan man koncentrere sig om modellerne som egentlig virkelighedsbeskrivelse. Forud for et spørgsmål om verifikation går da problemet om modellens konsistens og især dens økonomi, for så vidt som man ønsker at reducere dens forudsætninger til det minimum, der er både nødvendigt og tilstrækkeligt for modellens konklusioner.

1. En mere elementær indføring heri findes hos D. Gale: *The Theory of Linear Economic Models*, 1960. Klassisk er Solows artikel: »On the Structure of Linear Models«, *Econometrica*, Januar 1952.

For det andet kan lineære reproduktionsmodeller danne grundstammen i den dynamiske programmering. Den statiske programmering kan have til opgave at allokere begrænsede resourcer, således at man maksimerer en vis funktion af de i samme periode producerede mængder. Programmeringen bliver dynamisk, når maksimeringsformålet angår beholdninger og produktion i senere perioder. Herved kommer netop reproduktionen ind som et centralt aspekt. Med dette udgangspunkt kan man ikke nøjes med beviser for eksistensen af løsninger. Man må vide, hvorledes disse kan beregnes.

I begge henseender forener modellerne på meget enkel måde to centrale tanker i den økonomiske teori, idet man kombinerer kredsløbsbetragtningen med ideen om alle økonomiske enkeltfænomeners gensidige afhængighed. Således opfattet viser de – abstraktionsniveauet til trods – en væsentlig side af den økonomiske virkelighed.

Appendix

PRISDANNELSE OG VÆRDIKREDSLØB I EN COBB-DOUGLAS MODEL

I det følgende undersøges prisdannelse og vækst i et system af produktionsfunktioner, der alle er af Cobb-Douglastypen. Formålet er at illustrere substitutionsprincippet i en sådan model. Herved reduceres dennes ret komplicerede struktur til en række særdeles overskuelige sammenhænge såvel i beregningsmæssig som i teoretisk henseende. Da hovedvægten vil blive lagt på de formelle resultater, bliver fremstillingen ret teknisk i sin art; for overskuelighedens skyld og uden iøvrigt at berøre resultaternes almengyldighed bygger vi derfor på et tosektorsystem.

1. Vi tænker os to produktionsfunktioner, der hver producerer eet gode, idet hver proces som faktorer anvender visse mængder af de i systemet producerede goder samt een udefra kommende faktor, arbejdskraft. Faktorer tænkes indsat i begyndelsen af perioden og forbrugt fuldstændigt i løbet af denne, således at man ved slutningen af perioden står med en vis mængde af det producerede gode. Begge produktionsfunktioner antages at være af Cobb-Douglas typen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= c_1 \cdot x_{11}^{\alpha_1} \cdot x_{21}^{\alpha_2} \cdot N_1^{\alpha_3} \\ x_2 &= c_2 \cdot x_{12}^{\beta_1} \cdot x_{22}^{\beta_2} \cdot N_2^{\beta_3} \end{aligned}$$

Her er x_1 og x_2 de producerede mængder af gode 1 og 2, hvor der til produktion af x_1 enheder af gode 1 er medgået x_{11} enheder af gode 1, x_{21} enheder af gode 2 og N_1 enheder arbejdskraft, og tilsvarende er der til produktionen af gode 2 medgået x_{12} enheder af gode 1, x_{22} enheder af gode 2 og N_2 enheder arbejdskraft.

Vi forudsætter yderligere, at alle α'er og β'er er større end 0, samt at

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad \text{og}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 .$$

For det andet kan lineære reproduktionsmodeller danne grundstammen i den dynamiske programmering. Den statiske programmering kan have til opgave at allokere begrænsede resourcer, således at man maksimerer en vis funktion af de i samme periode producerede mængder. Programmeringen bliver dynamisk, når maksimeringsformålet angår beholdninger og produktion i senere perioder. Herved kommer netop reproduktionen ind som et centralt aspekt. Med dette udgangspunkt kan man ikke nøjes med beviser for eksistensen af løsninger. Man må vide, hvorledes disse kan beregnes.

I begge henseender forener modellerne på meget enkel måde to centrale tanker i den økonomiske teori, idet man kombinerer kredsløbsbetragtningen med ideen om alle økonomiske enkeltfænomeners gensidige afhængighed. Således opfattet viser de – abstraktionsniveauet til trods – en væsentlig side af den økonomiske virkelighed.

Appendix

PRISDANNELSE OG VÆRDIKREDSLØB I EN COBB-DOUGLAS MODEL

I det følgende undersøges prisdannelse og vækst i et system af produktionsfunktioner, der alle er af Cobb-Douglastypen. Formålet er at illustrere substitutionsprincippet i en sådan model. Herved reduceres dennes ret komplicerede struktur til en række særdeles overskuelige sammenhænge såvel i beregningsmæssig som i teoretisk henseende. Da hovedvægten vil blive lagt på de formelle resultater, bliver fremstillingen ret teknisk i sin art; for overskuelighedens skyld og uden iøvrigt at berøre resultaternes almengyldighed bygger vi derfor på et tosektorsystem.

1. Vi tænker os to produktionsfunktioner, der hver producerer eet gode, idet hver proces som faktorer anvender visse mængder af de i systemet producerede goder samt een udefra kommende faktor, arbejdskraft. Faktorer tænkes indsat i begyndelsen af perioden og forbrugt fuldstændigt i løbet af denne, således at man ved slutningen af perioden står med en vis mængde af det producerede gode. Begge produktionsfunktioner antages at være af Cobb-Douglas typen:

$$x_1 = c_1 \cdot x_{11}^{\alpha_1} \cdot x_{21}^{\alpha_2} \cdot N_1^{\alpha_3}$$
$$x_2 = c_2 \cdot x_{12}^{\beta_1} \cdot x_{22}^{\beta_2} \cdot N_2^{\beta_3} \qquad (1)$$

Her er x_1 og x_2 de producerede mængder af gode 1 og 2, hvor der til produktion af x_1 enheder af gode 1 er medgået x_{11} enheder af gode 1, x_{21} enheder af gode 2 og N_1 enheder arbejdskraft, og tilsvarende er der til produktionen af gode 2 medgået x_{12} enheder af gode 1, x_{22} enheder af gode 2 og N_2 enheder arbejdskraft.

Vi forudsætter yderligere, at alle α'er og β'er er større end 0, samt at

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad \text{og}$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 .$$

2. Der er fuldstændig substitution i produktionsstrukturen, og vi kan derfor bestemme de optimale faktorforhold i hver enkelt proces, hvis faktorpriserne p_1, p_2 samt arbejdslønnen w kendes. Faktorpriserne p_1 og p_2 er imidlertid identiske med systemets output-priser. Under forudsætning om fuldkommen konkurrence vil derfor grænseindtægten ved *iværksættelse* af produktion af een yderligere enhed af gode 1 være lig p_1 tilbagediskonteret over een periode. Hvis den for begge processer fælles rentefod betegnes r — diskonteringsfaktoren således $\frac{1}{1+r}$ — kan man opstille 6 ligevægtsrelationer, der alle viser lighed mellem grænseindtægt og grænseomkostninger:

proces nr. 1:

$$\frac{p_1}{1+r} \cdot \frac{\delta x_1}{\delta x_{11}} = p_1$$

(2a)
$$\frac{p_1}{1+r} \cdot \frac{\delta x_1}{\delta x_{21}} = p_2$$

$$\frac{p_1}{1+r} \cdot \frac{\delta x_1}{\delta N_1} = w$$

og

proces nr. 2:

$$\frac{p_2}{1+r} \cdot \frac{\delta x_2}{\delta x_{12}} = p_1$$

(2b)
$$\frac{p_2}{1+r} \cdot \frac{\delta x_2}{\delta x_{22}} = p_2$$

$$\frac{p_2}{1+r} \cdot \frac{\delta x_2}{\delta N_2} = w$$

Ved at udregne differentialkvotienterne i (2) i overensstemmelse med (1), får man følgende 6 ligninger:

proces nr. 1:

$$\frac{x_{11}}{x_1} = \frac{\alpha_1}{1+r} \cdot \frac{p_1}{p_1}$$

(3a)
$$\frac{x_{21}}{x_1} = \frac{\alpha_2}{1+r} \cdot \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{N_1}{x_1} = \frac{\alpha_3}{1+r} \cdot \frac{p_1}{w}$$

og

proces nr. 2:

$$\frac{x_{12}}{x_2} = \frac{\beta_1}{1+r} \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

(3b)
$$\frac{x_{22}}{x_2} = \frac{\beta_2}{1+r} \cdot \frac{p_2}{p_2}$$

$$\frac{N_2}{x_2} = \frac{\beta_3}{1+r} \cdot \frac{p_2}{w}$$

3. På grund af homogeniteten kan (1) skrives

$$(4)\qquad \begin{aligned} 1 &= c_1 \left(\frac{x_{11}}{x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{x_{21}}{x_1}\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{N_1}{x_1}\right)^{\alpha_3} \\ 1 &= c_2 \left(\frac{x_{12}}{x_2}\right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{x_{22}}{x_2}\right)^{\beta_2} \cdot \left(\frac{N_2}{x_2}\right)^{\beta_3} \end{aligned}$$

Ved at indsætte resultaterne fra (3) i (4) fås da efter lidt regning (idet vi benytter, at $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ og $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$):

$$(5)\qquad \begin{aligned} 1 &= {\alpha_1}^{\alpha_1} \cdot {\alpha_2}^{\alpha_2} \cdot {\alpha_3}^{\alpha_3} \cdot \frac{c_1 p_1}{(1+r)} \cdot \left(\frac{1}{p_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{p_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{1}{w}\right)^{\alpha_3} \\ 1 &= {\beta_1}^{\beta_1} \cdot {\beta_2}^{\beta_2} \cdot {\beta_3}^{\beta_3} \cdot \frac{c_2 p_2}{(1+r)} \cdot \left(\frac{1}{p_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{1}{p_2}\right)^{\beta_2} \left(\frac{1}{w}\right)^{\beta_3} \end{aligned}$$

Ligningerne (5) bestemmer den sammenhæng, der i ligevægt skal herske mellem p_1, p_2, w og $(1 + r)$. Løses systemet kan man finde de ligevægtige priser udtrykt ved w og $(1 + r)$:

$$p_1 = R_1 w (1 + r)^{D_1}$$

$$p_2 = R_2 w (1 + r)^{D_2},$$

hvor R_1, R_2, D_1 og D_2 kun afhænger af systemets teknologi. Ligevægtspriserne bliver således potensfunktioner af rentefaktoren $(1 + r)$.

4. Når renten er givet, er samtlige relative priser og faktorforhold bestemt. Vi ønsker nu at konstruere det til (1) svarende input-output system under forudsætning af fastholdt rente og ligevægtig prisdannelse.

Lad os sætte $z_1 = p_1 x_1$, $z_2 = p_2 x_2$, $y_{11} = p_1 x_{11}$, $y_{12} = p_1 x_{12}$, $y_{21} = p_2 x_{21}$ og $y_{22} = p_2 x_{22}$,

og lad endelig $y_1 = y_{11} + y_{12}$ og $y_2 = y_{21} + y_{22}$.

Af (3) får vi nu

$$(6\,\mathrm{a})\qquad \text{proces nr. 1:}\quad \begin{aligned} \frac{y_{11}}{z_1} &= \frac{\alpha_1}{1+r}\ ; \\ \frac{y_{21}}{z_1} &= \frac{\alpha_2}{1+r}\ ; \\ \frac{N_1 w}{z_1} &= \frac{\alpha_3}{1+r}\ . \end{aligned}$$

$$\text{proces nr. 2:}\quad \frac{y_{12}}{z_2} = \frac{\beta_1}{1+r}\;;$$

(6b) $$\frac{y_{22}}{z_2} = \frac{\beta_2}{1+r}\;;$$

$$\frac{N_2 w}{z_2} = \frac{\beta_3}{1+r}\;.$$

Heraf kan vi nu udlede

(7) $$\begin{aligned} y_1 &= y_{11} + y_{12} = \frac{1}{1+r}(\alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2) \\ y_2 &= y_{21} + y_{22} = \frac{1}{1+r}(\alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2) \end{aligned}$$

samt

(8) $$w(N_1 + N_2) = \frac{1}{1+r}(\alpha_3 z_1 + \beta_3 z_2).$$

Systemets værdikredsløb vil altså fremtræde som et helt sædvanligt input-output system med faste koefficienter. Disse afledes på simpel måde af systemets teknologi og af rentefoden. Vi koncentrerer os i det følgende om systemet (7).

5. Opgaven er at finde systemets maksimale harmoniske expansionsrate, idet vi tænker os at hele periodens produktion anvendes som faktorinput i den følgende periode, samt at arbejdskraften er tilstede i ubegrænset mængde. Om den maksimale harmoniske vækstrate R må det således gælde, at

(9) $$\frac{z_1}{y_1} = \frac{z_2}{y_2} = 1 + R.$$

Ved at benytte (9) kan (7) skrives:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+R}{1+r}(\alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2) \\ z_2 &= \frac{1+R}{1+r}(\alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2) \end{aligned}$$

eller

(10) $$\begin{aligned} \left(\alpha_1 - \frac{1+r}{1+R}\right) z_1 + \beta_1 z_2 &= 0 \\ \alpha_2 z_1 + \left(\beta_2 - \frac{1+r}{1+R}\right) z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Skal dette system have en løsning i egentlige z_1 og z_2, må størrelsen $\frac{1+r}{1+R}$ være bestemt ved:

$$(11) \qquad \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\alpha_1 - \frac{1+r}{1+R}}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \frac{1+r}{1+R}}$$

Ligning (11) er en andengradsligning i $\frac{1+r}{1+R}$, og den har som sådan to rødder. I et system med mange sektorer vil den tilsvarende ligning have en grad, der er lig antallet af sektorer, og der vil derfor være mulighed for et lige så stort antal løsninger. Vi er imidlertid kun interesseret i brugbare rødder, d.v.s. sådanne, der er reelle og forenelige med positive værdier for z_1 og z_2. Det er et centralt problem i den lineære analyse af økonomiske systemer at opklare, under hvilke betingelser sådanne rødder bestemmes entydigt af systemets ligninger. *Tilstrækkeligt* herfor vil det i almindelighed være, 1) at systemet er irreduktibelt, således at ingen proces eller gruppe af processer kan producere uafhængig af de øvrige, samt 2) at der ikke er forbunden produktion. Begge betingelser er opfyldt i vor forenklede model, således at kun den ene af rødderne i ligning (11) er brugbar. Størrelsen $\frac{1+r}{1+R}$ vil derfor være bestemt udelukkende på basis af systemets teknologi. Vi kan altså løse ligning (11) og få:

$$(12) \qquad \frac{1+r}{1+R} = f(\alpha)$$

hvor $f(\alpha)$ er en teknologisk konstant. R kan opfattes som et mål for, med hvor meget systemet, ved en given rentefod, pr. periode kan forøge beholdningerne af samtlige goder på basis af en exogen tilførselskilde, arbejdskraft. Ligning (12) angiver da en lineær forbindelse mellem den maximale ekspansionsrate R og rentefoden r.

6. Det har i det foregående været tanken at give et elementært billede af det analytiske skema, der kan udvikles på basis af et system af reproducerende Cobb-Douglas-funktioner. Trods forenklingerne — især det primitive kapital- og tidsbegreb — synes det dog at fremgå, at man på mere almene forudsætninger om produktionsprocesserne end dem, den sædvanlige input-output-analyse opstiller, kan komme frem til lige så enkle og anvendelige strukturer til belysning af de forskellige sektorers gensidige afhængighed.

Det gælder dog her, at hvad der vindes på een front, tabes på en anden. Input-output-analysens stive produktionsstruktur er vel en forenkling, men den er tillige af stor operationel værdi. Derimod kan de manglende substitutionsmuligheder være teoretisk utilfredsstillende, selv hvis man udbygger systemet med flere alternativt anvendelige processer for hver enkelt industri. Ønsker man at gøre substitutionalitet til et generelt princip ved at bygge på mere generelt udformede produktionsfunktioner, f.x. Cobb-Douglas-funktioner, opnår man teoretisk større almengyldighed, men man mister samtidig den operationelle lethed og gennemsigtighed, hvormed man ud fra en rent lineær struktur kan opstille konkrete beregninger til evt. empirisk efterprøvelse. Skal et system af Cobb-Douglas-funktioner give samme regnemæssige fordele som den sædvanlige input-output analyse, må man, som vi har set, yderligere tilføje forudsætninger om foretagernes økonomiske adfærd, f.x. at omkostningsprincippet realiseres i alle processer. En sådan forudsætning er den pris, man må betale, om en analyse af produktionsstrukturen skal kunne foretages med samme lethed ud fra Cobb-Douglas-funktioner som ud fra en strengt lineær model, og det kan være et spørgsmål, om der — når den nævnte forudsætning opstilles — overhovedet er foretaget nogen relevant generalisation.

Ikke desto mindre er det vel værd at overveje, hvor vidt man kan gå i den angivne retning, uden at systemet ender som et intetsigende system af rene blanketligninger. Det volder ingen vanskeligheder at differentiere og udbygge systemets kapitalbegreb, herunder at overgå fra diskontinuert til kontinuert analyse, og det er vel den generalisation, det behandlede system i stærkest grad savner. I videre sammenhæng er der måske nogle mere principielle generalisationer, der kunne undersøges.

Man kunne for det første prøve at differentiere forudsætningen om marginal omkostnings-principiel prisdannelse og ved f.x. at indføre monopolelementer i de forskellige processer undersøge systemets mekanik under alternative forudsætninger om prisdannelsen.

For det andet kunne man forsøge at opstille systemets produktionsfunktioner baseret på en mere omfattende funktionsklasse, f.x. homogene funktioner med en konstant substitutionselasticitet, der kunne være forskellig fra proces til proces. I så fald ville den limitationale produktionsstruktur kunne indgå som et særtilfælde i systemet, nemlig dersom alle substitutionselasticiteter var nul, ligesom Cobb-Douglas-tilfældet ville indgå som specialtilfælde, når alle substitutionselasticiteterne var lig minus een.