

EN DISPUTATS OM LAGER- OG PRISPOLITIK FRA ET STOKASTISK SYNSPUNKT

I

Af P. NØRREGAARD RASMUSSEN*

1. Ser man på rækken af statsvidenskabelige disputater bliver man slået af mangfoldigheden. Den foreliggende disputats¹ er den femogtyvende i rækken, som begyndte med Frantz Pio's i 1902². Såvel i emnevalg som i metode og sprog er der meget store variationer: Rent historiske afhandlinger optræder jævnsides med rent teoretiske; rent deduktivt opbyggede analyser blander sig med stærkt empirisk prægede undersøgelser og sproget varierer, ikke alene mellem dansk og engelsk, men også fra helt verbalt opbyggede ræsonnementer til stærkt matematisk prægede.

Der er gode grunde til at håbe, at denne mangfoldighed vil blive bevaret. Den forøges med den foreliggende afhandling, som så klart hører hjemme i dette hus med de mange boliger. Lykke Jensens arbejde er et bidrag til en anvendelse af den matematiske statistiks resultater på centrale økonomiske problemer, således som man kunne vente af en forfatter, der i al sin virksomhed har fastholdt sin interesse for økonomi samtidig med, at han har fået en (misundelsesværdig!) specialuddannelse i nyere statistisk teori. Samtidig med at dette siges, må man dog beklagende tilføje, at forf. ikke viser tegn på den interesse for empiri, som dog ellers har karakteriseret mange af de gode økonomer, og som man måske kunne have en berettiget forventning om at møde hos en, der både er økonom og statistiker. Dette er så meget mere beklageligt, som netop denne forf. behersker en god del af de redskaber, som i dag må beherskes, hvis man til bunds vil udnytte et empirisk materiale.

* Professor ved Københavns Universitet, dr. polit.

1. E. Lykke Jensen, *Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt*, København 1963; offentliggjort i Handelshøjskolens skriftrække B, nr. 18 (Einar Harck's forlag). – Dele af denne artikel dannede grundlag for forf.'s opposition ved det mundtlige forsvar, d. 8. oktober 1963. Under arbejdet med artiklen har jeg nydt godt af mange diskussioner med den første officielle opponenter, professor A. Hald.

2. I appendix er givet en oversigt over statsvidenskabelige og økonomiske disputater, jfr. *Danske Økonomer*, Nr. 2 (marts-april) 1956.

EN DISPUTATS OM LAGER- OG PRISPOLITIK FRA ET STOKASTISK SYNSPUNKT

I

Af P. NØRREGAARD RASMUSSEN*

1. Ser man på rækken af statsvidenskabelige disputater bliver man slået af mangfoldigheden. Den foreliggende disputats¹ er den femogtyvende i rækken, som begyndte med Frantz Pio's i 1902². Såvel i emnevalg som i metode og sprog er der meget store variationer: Rent historiske afhandlinger optræder jævnsides med rent teoretiske; rent deduktivt opbyggede analyser blander sig med stærkt empirisk prægede undersøgelser og sproget varierer, ikke alene mellem dansk og engelsk, men også fra helt verbalt opbyggede ræsonnementer til stærkt matematisk prægede.

Der er gode grunde til at håbe, at denne mangfoldighed vil blive bevaret. Den forøges med den foreliggende afhandling, som så klart hører hjemme i dette hus med de mange boliger. Lykke Jensens arbejde er et bidrag til en anvendelse af den matematiske statistiks resultater på centrale økonomiske problemer, således som man kunne vente af en forfatter, der i al sin virksomhed har fastholdt sin interesse for økonomi samtidig med, at han har fået en (misundelsesværdig!) specialuddannelse i nyere statistisk teori. Samtidig med at dette siges, må man dog beklagende tilføje, at forf. ikke viser tegn på den interesse for empiri, som dog ellers har karakteriseret mange af de gode økonomer, og som man måske kunne have en berettiget forventning om at møde hos en, der både er økonom og statistiker. Dette er så meget mere beklageligt, som netop denne forf. behersker en god del af de redskaber, som i dag må beherskes, hvis man til bunds vil udnytte et empirisk materiale.

* Professor ved Københavns Universitet, dr. polit.

1. E. Lykke Jensen, *Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt*, København 1963; offentliggjort i Handelshøjskolens skriftrække B, nr. 18 (Einar Harck's forlag). – Dele af denne artikel dannede grundlag for forf.'s opposition ved det mundtlige forsvar, d. 8. oktober 1963. Under arbejdet med artiklen har jeg nydt godt af mange diskussioner med den første officielle opponenter, professor A. Hald.

2. I appendix er givet en oversigt over statsvidenskabelige og økonomiske disputater, jfr. *Danske Økonomer*, Nr. 2 (marts-april) 1956.

2. Skal Lykke Jensens afhandling placeres indenfor de økonomiske discipliner, må den høre hjemme i driftsøkonomien. Hvor stort et lager »bør« man holde? Hvorledes »skal« produktionen fordeles over tiden? Hvad er den »optimale« pris? Dette er nogle af afhandlingens hovedproblemer, idet gåseøjnene udfyldes ved forudsætning om, at virksomheden tilstræber at maksimalisere profitten (resp. den gennemsnitlige profit i en række delperioder). Det havde været interessant om forf. havde eksperimenteret med andre målsætninger. Var det f. eks. ikke nærliggende at undersøge, hvilke konsekvenser det ville have, hvis man i stedet ønsker at maksimalisere sandsynligheden for, at profitten ikke falder ned under et vist minimum?

De nævnte problemstillinger lyder som gamle travere. Men der er i den sidste halve snes år sket det, at statistikere har angrebet disse problemstillinger med statistikernes værktøj og herunder er nået til resultater, som for økonomer er nye. Disse arbejder, begyndende med Arrow, Harris og Marschak¹, kan ikke længere overses af økonomer under henvisning til, at det er noget, som hører hjemme i den statistiske teori. Der er nået resultater, som er af direkte og central betydning i hvert fald for den driftsøkonomiske teori, hvorfor økonomer — uafhængigt af hvor vanskeligt tilgængeligt disse arbejder end måtte være — er tvunget til at sætte sig ind i disse problemstillinger og de opnåede resultater. Det er en af forf.'s fortjenester, at han har givet en pædagogisk veloplagt fremstilling af den sidste halve snes års arbejder på dette område. Det er i øvrigt på denne baggrund uforståeligt, at han har valgt at udsende afhandlingen på dansk. Dels har en sådan oversigt interesse udenfor Skandinavien og dels har forf. også originale bidrag, som nok kunne fortjene at blive læst udenfor Verona.

3. Hovedsynspunktet i afhandlingen udtrykkes bedst i det sidste kapitel, p. 208: »Med hensyn til . . . spørgsmålet om den synsvinkel, der anlægges, er vort udgangspunkt, at driftsherrens forventninger og dermed hans dispositioner bør være robuste over for tilfældige variationer i de realiteter, der skaber hans forventninger. Dette tilsiger en stokastisk udformning af teorien . . .«. Afhandlingen demonstrerer klart, at en stokastisk betragtning kan føre frem til en række betydningsfulde resultater for produktions- og lagerteorien såvel som for pristeorien.

4. Kap. I giver en kort oversigt over den tidligt udviklede teori for lagerhold (»kvadratrodsformlen«). Dette efterfølges af en karakteristik af problemstillingen i moderne teori, hvor afsætningen og som følge deraf også profitten beskrives som en stokastisk variabel, tillige med en karakteristik

1. »Optimal Inventory Policy«, *Econometrica*, Vol. 19, 1951; jfr. iøvrigt Lykke Jensen's litteraturliste.

af »optimal lagerpolitik« som en politik, der maksimaliserer den *gennemsnitlige* profit i planlægningsperioden. Kapitlet har så udpræget indledningens karakter.

Kap. 2 går nu nærmere ind i en analyse af lagerpolitikken. Den til en given pris, p , efterspurgt mængde, x , beskrives ved en fordelingsfunktion $\varphi(x)$. Har man mængden η på lager vil efterspørgslen kunne tilfredsstilles så længe $\eta \geq x$. Den gennemsnitlige omsætning bliver derfor

$$p \int_0^{\eta} x \varphi(x) dx + p\eta \int_{\eta}^{\infty} \varphi(x) dx,$$

idet det forudsættes, at producenten sælger til en given markedspris, som er uafhængig af hans politik.

Der indføres nu tre typer af omkostninger: Indkøbsomkostninger, lageromkostninger samt ruinomkostninger. De sidst nævnte er omkostninger som følger af, at en efterspørgsel ikke kan tilfredsstilles¹. Idet der kun planlægges for en periode kan den optimale lagerpolitik — som maksimaliserer den gennemsnitlige profit — udledes først ved direkte differentiation af profitfunktionen og derefter ved trinvis at sammenholde grænseomsætning og de hertil knyttede forskellige grænseomkostninger.

Under forudsætning af at de tre omkostningsarter er kontinuerte, voksende og konvekse udledes en simpel lagerpolitik med ét optimalt lager (S). Derefter specificeres indkøbsomkostningerne som proportionale (en konstant, c , multipliceret med den indkøbte mængde, u). Det vises, at optimalt lager (S) kan bestemmes, ligesom det vises, at kravet om konveksitet til lager- og ruinomkostninger kan fraviges såfremt efterspørgslen kan beskrives ved en Polyafrekvensfunktion². Lageromkostninger antages at være en funktion af lagerets størrelse ved periodens slutning. (I kap. 4 forlades denne forudsætning — i øvrigt uden nogen begrundelse — til fordel for en betragtning af periodens gennemsnitslager).

I et efterfølgende afsnit forudsættes indkøbsomkostningerne at være en konstant K plus $c \cdot u$ for $u > 0$ (og lig nul for $u = 0$). Det vises, at en lagerpolitik af s, S -typen da er optimal: Forøg lageret, hvis det er mindre end s , til S ; er lageret større end s , skal intet indkøb foretages. Denne lagerproces analyseres noget nærmere, bl. a. ved at lade leveringstiden være exponentielt fordelt. Med en (s, S) -politik givet, analyseres lagerets bevægelse gennem tiden.

1. Som eksempel nævnes her ofte tab af good-will, hvilket måske ikke er et særlig godt eksempel i en eenperiodeanalyse. Tab af good-will er vel ikke en omkostning, som mærkes før engang i fremtiden.

2. En Polyafrekvensfunktion er af meget generel karakter, hvorfor en forudsætning om, at $\varphi(x)$ tilhører denne klasse af funktioner formentlig ikke betyder nogen alvorlig indskrænkning af resultaternes anvendelighed.

Kapitlet giver et klart og præcist referat af eksisterende litteratur. Der synes ikke at være vægtige originale bidrag, og man savner i hvert fald en tilknytning til produktionsteoriens diskussion om omkostningskurver. Den betragtede virksomhed er tilsyneladende en handelsvirksomhed, og hvorvidt de forudsatte omkostningsforløb her er karakteristiske kan i det mindste diskuteres.

5. I kap. 3 behandles de samme modeller, men med planlægning for flere perioder. Den før hele arbejdet grundlæggende og fra litteraturen kendte funktionalligning til bestemmelse af den optimale lagerpolitik udledes.

Forf. påviser at jo flere perioder, der betragtes, jo større skal det optimale lager være. Flervareproduktionen behandles ganske kort og med fremhævelse af, at lagerpolitik på grund af afhængighed i efterspørgsel ikke kan fastlægges partielt for hver vare. Denne ide forfølges (desværre) ikke, idet forfatteren går over til at behandle systemer i statistisk ligevægt. Sluttelig behandles tilfældet med time-lag i leveringen.

I modsætning til én-periode-analysen vil en fler-periode-analyse nødvendiggøre en neddiskontering. Denne gennemføres i overensstemmelse med dele af litteraturen. Uanset dette synes forfatteren dog på dette punkt at have ydet originale bidrag ved påvisning af, at forskellen mellem det optimale lager ved planlægning for uendelig mange perioder og ved planlægning for én periode aftager for voksende kalkulationsrente. Ligeledes vises — vistnok også et nyt resultat — at når en utilfredsstillet efterspørgsel i en periode kan tilfredsstilles i en følgende periode, vil det optimale lagerhold være større, idet forøgelsen afhænger af renten. Dette overraskende resultat er et godt eksempel på, hvor svært — eller håbløst — det er ved simple ræsonnementer at søge at slå igennem. Hvor nærliggende er det ikke at sige, at hvis en utilfredsstillet efterspørgsel kan overføres til næste periode og tilfredsstilles ved denne periodes produktion, så bliver resultatet, at det optimale lager bliver mindre! Hvorfor overhovedet holde et lager i denne situation?

Ud fra de nævnte resultater kunne en mere generaliseret behandling af rentens betydning i øvrigt have været givet. Det ville således være interessant at få konstatere, hvorledes forfatterens påvisning af, at en stigende rente betyder en »forkortelse« af planperioden, ville kunne fortolkes i relation til kapitalteorien.

6. I kap. 4 kombineres lager- og produktionsplanlægning. I hvert fald dele af kapitlet behandler deterministiske modeller. Det drejer sig om afsnit 4.3, hvor det fra driftsøkonomien velkendte sæsonproblem behandles: Hvorledes skal med givne, systematiske variationer i afsætningen over tiden produktionen tilrettelægges? Problemet løses såvel med diskrete som med kontinuerte variationer, og omend fremstillingen er eksemplarisk, gives der ikke nye resultater (jfr. f. eks. for det diskrete tilfælde Modigliani og Hohn, *Econometrica*, 1955), ej heller i fortolkningen.

Det må beklages, at forfatteren ikke — ved ændringer af modellen — har forsøgt at drive analysen videre end til kendte resultater. En række modifikationer til Modigliani og Hohn synes dog nærliggende. Forf. nævner selv i en efterfølgende

bemærkning (p. 109), at »omkostningsbeløb, der refererer sig til forskellige tidsperioder, egentlig burde diskonteres hen til det samme tidspunkt...«.

Modigliani og Hohn viste, at er grænseomkostningerne ved produktionen C_{t_2} i periode t_2 og tilsvarende C_{t_1} , i periode t_1 , skal produktionen fordeles på en sådan måde over tiden, at

$$C_{t_2} = C_{t_1} + g(t_2 - t_1).$$

hvor g er lageromkostninger pr. periode. Som vist af Modigliani og Hohn forstås denne relation umiddelbart ved en simpel betragtning: Hvis det i periode t_1 er billigere at producere en enhed end i periode t_2 og hvis lageromkostningerne mellem t_1 og t_2 ikke er så store, at denne fordel tabes, betaler det sig at producere en enhed i periode t_1 til afsætning i periode t_2 . Denne fordel betaler det sig at udnytte frem til det punkt, hvor grænseomkostningerne i t_1 plus lageromkostningerne frem til t_2 bliver lig grænseomkostningerne i t_2 .

Nu vil imidlertid en hensyntagen til rentefaktoren åbenbart påvirke denne ligevægt, idet virkningen på ret kompliceret måde vil afhænge af forholdet mellem C_{t_2} , g og renten. Forf. viger udenom den oplagte mulighed for her at give et selvstændigt bidrag ved at indføre renten. Når dette forsvares (p. 109) med, at planlægningsperioden i reglen vil være kort, så er dette næppe overbevisende, og det er i hvert fald urimeligt, når man tager i betragtning, at forf. i kap. 3 i den for hele denne teori fundamentale funktionalligning, jfr. f. eks. ligning (3.1.6.), er meget omhyggelig og sørger for, at beløb, som ligger én periode fremme explicit bliver neddiskonteret til denne periode. Denne procedure viser sig givtig i kap. 3. Hvorfor er én periodes rente væsentlig og giver resultater i kap. 3, mens flere perioders rente er uvæsentlig og kan springes over i kap. 4?

Det er ligeledes svært at forstå, hvorledes forf. har kunnet modstå den oplagte fristelse, det dog må være at indføre en ruinomkostning i den ovenfor givne ligevægt. Det er nærliggende og let at vise, at virkningen heraf er en forskydning af ligevægtpunktet, idet højresiden i den ovenfor givne ligning bliver mindre.

Her — som i øvrigt også andre steder — kunne man ligeledes ønske en diskussion af mulighederne for at anlægge tilsvarende betragtninger på det faste anlæg. Problemet kunne muligvis behandles ved, at man ikke lader indkøb til lager foregå ved hver periodes begyndelse, men med større mellemrum. Såfremt dette problem løses let, må det være muligt at gå videre og betragte det faste anlæg som netop lever over flere perioder.

En original betragtning anlægges i en diskussion af fastlæggelse af planlægningsperioden, om end diskussionen holdes inden for indsnævrede rammer.

Forfatteren går nu tilbage til en forudsætning om, at afsætningen kendes i form af fordelingsfunktioner, og viser forudsætningerne for, at man ved minimalisering af omkostningerne som produktionstal kan benytte middelværdierne i afsætningens fordeling i stedet for at skulle bestemme middelværdierne af omkostningsfunktionen (som er stokastisk varierende, fordi afsætningen indgår). Forfatteren støtter sig her på en af Theil i en helt anden sammenhæng udviklet bevisførelse. På et tidligere tidspunkt har Simon (*Econometrica*, 1956) dog overført Theil's metode til lager- og produktionsteori. I overensstemmelse med Theil og Simon forudsættes (uden argumentation) kvadratiske omkostningsfunktioner. Helt bortset fra, at man også her kunne ønske, at forf. havde forsøgt at eksperimentere med andre omkostningsfunktioner, ville det have været af interesse at få belyst, hvor væsentlig forudsætningen om uafhængighed mellem afsætningstallets varianser (og kovarianser) og produktionen er. Selv resultater, der måtte

bygge på indsnævrede, simple forudsætninger med hensyn til afhængighedens karakter, ville have været nye og betydningsfulde.

7. I kap. 5 udvides betragtningen, idet efterspørgselen i forskellige perioder nu ikke forudsættes nødvendigvis at skulle beskrives ved identisk fordelte variable. Det vises (vist i overensstemmelse med allerede kendte resultater), at den optimale lagerstørrelse ved ændringer i fordelingerne (som forudsættes »ordnede«), aldrig er større end optimallageret ved uændret fordelingsform, ligesom analoge resultater nås, når følgen af alternative, systematisk ordnede, ændringer i fordelingerne analyseres.

Disse resultater er både overraskende og betydningsfulde, og det synes fuldt berettiget, at forfatteren har refereret dem i sin fremstilling. Men i hvert fald vil man ved en mere umiddelbar betragtning synes, at det havde været af langt større betydning, om forfatteren havde kunnet røre ved den almindelige forudsætning om stokastisk uafhængighed. Det er muligt, at der her ved en generel udformning rejser sig langt vanskeligere problemer. Men selv en undersøgelse, der begrænsede sig til specificerede, måske meget simple former for afhængighed, ville have været af stor interesse. Thi forudsætningen om uafhængighed synes dog at stride mod helt enkle økonomiske ræsonnementer. Muligvis er der tale om meget komplicerede sammenhænge. Men det udelukker ikke, at der kunne komme hul på bylden ved at begynde med noget helt simpelt.

Ved en efterfølgende spilteoretisk betragtning støtter forfatteren sig på Arrow, Karlin og Scarf (som i øvrigt danner den vigtigste baggrund for hele forfatterens arbejde), om end bevisførelsen vistnok er væsentlig forenklet.

Kap. 6 behandler den før nævnte (s,S) -lagerpolitik. Med stokastiske variationer i afsætningen og med den givne politik vil lageret vise stokastiske bevægelser over tiden. Disse bevægelser beskrives under anvendelse af teori for summer af stokastiske variable.

Kap. 7 betragter lagerbevægelsen som en Markovproces. Tråden knyttes til den nævnte fundamentale funktionalligning, idet der herved vises, at denne har en éntydig løsning og omvendt (som det måske allerede kan sluttes fra kap. 3?), at en optimal strategi tilfredsstiller denne ligning. Dette er vistnok allerede kendt; men forfatteren har givet et selvstændigt bidrag ved sin påvisning af, at en diskonteringsfaktor mindre end én er betydningsfuld for eksistensen af en optimal strategi, der tilfredsstiller omtalte funktionalligning. Et regneeksempel til illustration af bestemmelsen af en optimal lagerstrategi afslutter kapitlet.

8. Kap. 8 indeholder — set fra en økonoms synspunkt — afhandlingens mest originale bidrag.

I den almindelige, deterministiske teori antager man som bekendt, at der til given pris svarer én efterspurgt mængde. I den stokastiske udformning vil der til given pris snart svare en »stor«, snart en »lille« efterspørgsel. Thi efterspørgselen beskrives ved en sandsynlighedsfordeling: $q(x/p)$. Betragtet for mange perioder vil den gennemsnitlige efterspørgsel ved given pris være lig denne fordelings middelværdi. I fordelingen vil prisen imidlertid indgå som parameter, idet det antages, at ved en relativt lav pris vil middelværdien i fordelingen være relativt stor, hvilket udtrykker det simple forhold, at ved lav pris vil den gennemsnitligt efterspurgte mængde være stor.

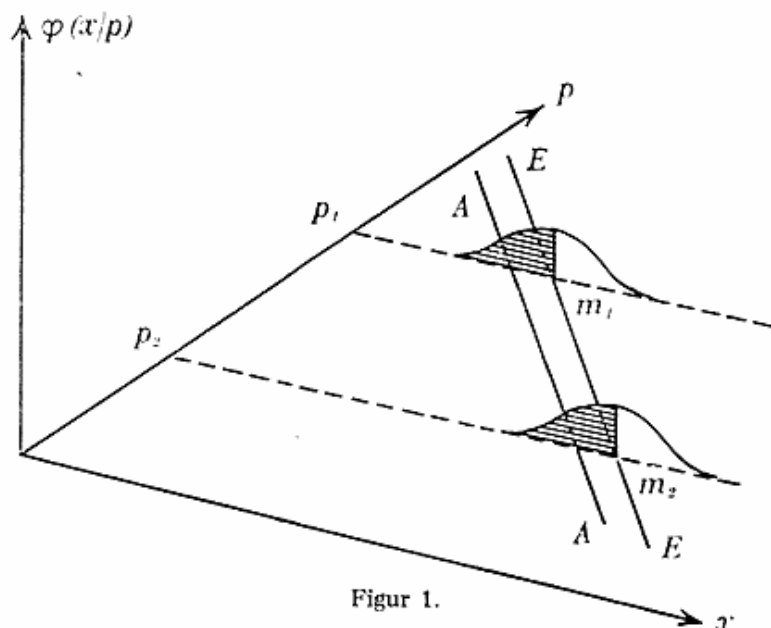
Man tænker sig nu først, at producenten beslutter sig til at *producere* netop den til given pris svarende middelværdi. Resultatet heraf vil være, at sommetider vil producenten ikke kunne tilfredsstille efterspørgslen. Denne situation optræder, når den faktiske efterspørgsel er større end middelværdien i efterspørgslens fordeling. Omvendt vil efterspørgslen somme tider være mindre end middelværdien, i hvilke tilfælde producenten ikke får afsat hele sin produktion. Der opbygges da et lager, som Lykke Jensen forudsætter er værdiløst. Det er naturligvis først i en dynamisk analyse, man vil kunne tage hensyn til dette lager — hvilket forf. (desværre) ikke rigtig kommer ind på.

Hvis producenten følger den produktionspolitik, at han producerer en mængde svarende til middelværdien af efterspørgslens fordeling vil han højst kunne sælge denne produktion, og i adskillige perioder vil salget blive mindre. Heraf følger, at den faktiske, gennemsnitlige *afsætning* ved given pris vil være mindre end den faktiske produktion. Kurven, som viser den faktiske, gennemsnitlige afsætning ved forskellige priser, altså afsætningens middelværdi, ligger derfor forskudt til venstre for efterspørgslens middelværdi.

Måske lettes betragtningen ved nedenstående figur 1, som viser fordelingsfunktionen for efterspørgslen, $q(x)$. Fordelingsfunktionen ligger som en højderyg på (x,p) -planen. Fordelingsfunktionens kontur er i figuren indtegnet, når prisen sættes lig henholdsvis p_1 og p_2 ($p_1 > p_2$). Er prisen p_1 vil middelværdien for efterspørgslen være m_1 . Et fald i prisen betyder, at fordelingsfunktionens middelværdi vokser som vist ved EE . Lykke Jensen tænker sig spredningen uberørt heraf.

Såfremt producenten ved prisen p_1 producerer m_1 , vil han ganske vist gennemsnitligt ramme efterspørgslen. Men han vil i reglen opleve enten at efterspørgslen ikke kan tilfredsstilles eller at et ikke planlagt overskudslager optræder. Dette betyder igen, at den i gennemsnit *afsatte* mængde bliver mindre end m_1 . Mere præcist: Den gennemsnitligt afsatte mængde, AA , bliver for given pris middelværdien i den af gennemsnitlig efterspurgt mængde afstumpede fordeling, jfr. de skraverede fordelinger i figuren.

Hele denne betragtning er ikke ny, men findes, som forf. også nævner,



Figur 1.

f. eks. hos Arne Rasmussen (*Det Danske Marked*, 1958). Forf. viser nu, at den optimale pris bliver lavere end den til det gængse monopolpunkt svarende pris. En tilsvarende sætning er udviklet af Mills (1959), men forfatterens udformning er original. Forf.'s analyse af det nye optimalpunkt må dog siges at være alt for ordknap. Læseren henvises til selv at tumle med en figur (1.8), som ikke diskuteres.

9. Forfatteren forlader nu forudsætningen om, at producenten producerer en mængde svarende til den gennemsnitligt efterspurgte mængde. Herunder udvikles begrebet »udbudskurve« for en producent, der producerer for et marked præget af ufuldkommen konkurrence.

Betragtningen er, at *for hver pris* kan producenten vælge mellem en række produktionsmængder afhængigt af, i hvor høj grad han ønsker at dække den stokastisk varierende efterspørgsel. Selv en stor produktion kan vise sig for lille og selv en lille produktion kan vise sig for stor. Producenten kan nu anlægge en grænsebetragtning. Udvides produktionen med en enhed vil omkostningerne vokse med grænseomkostningerne ved den givne produktion. På afsætningssiden vil grænseomsætningen blive lig prisen, hvis efterspørgslen faktisk viser sig at være større end den producerede mængde. Hvis efterspørgslen bliver mindre end den producerede mængde bliver grænseomsætningen lig nul. Den grænseomsætning, man da skal sammenligne med grænseomkostningerne, bliver lig prisen multipliceret med sandsynligheden for at efterspørgslen er større end produktionen. Herved

findes den til given pris optimale produktion. Beregningen gentages ved forskellige salgspriser. Samlingen af de til de enkelte priser optimale produktionsmængder er udbudskurven, som i øvrigt siges (p. 188) »typisk« at være en voksende funktion af prisen.

Går man nu over til at betragte den faktiske afsætning til alternative priser, vil den faktiske gennemsnitligt afsatte mængde ved given pris altid blive lig middelværdien i efterspørgslens fordelingsfunktion afstumpet af den producerede mængde (som kan aflæses af udbudskurven). Den faktisk afsatte mængde ved given pris vil altså gennemsnitligt blive mindre end middelværdien i efterspørgslens fordelingsfunktion. Tillige vil den naturligvis blive mindre end den producerede mængde, jfr. udbudskurven. Den vil følgelig kunne få et forløb som afsætningskurven i fig 2 nedenfor (som svarer til forf.s' fig 2.8).

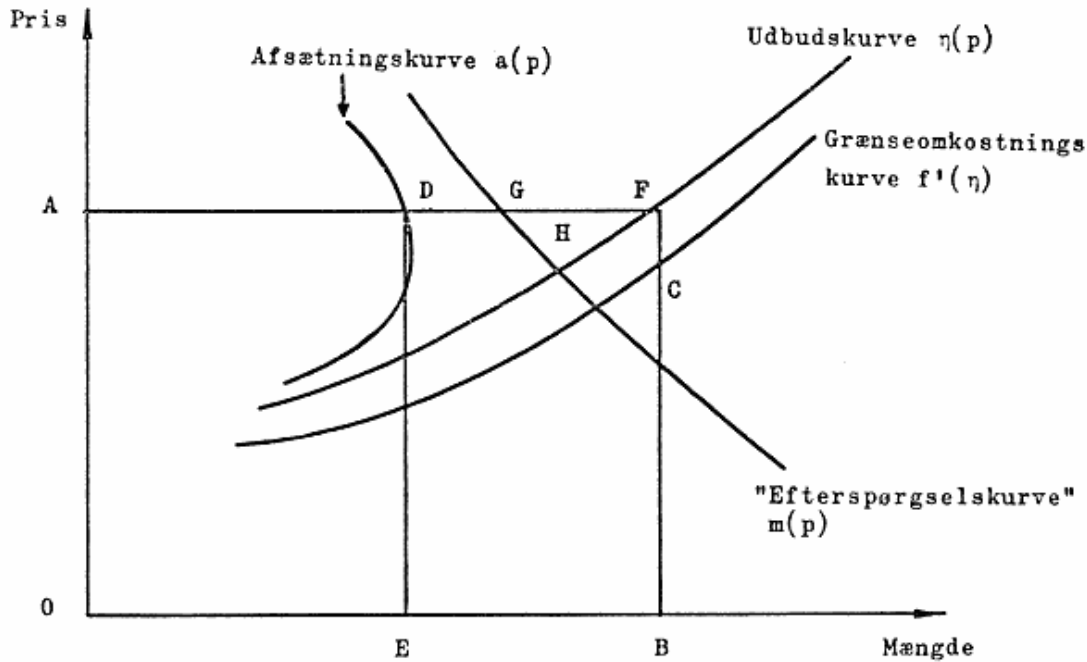
Kender man således den gennemsnitlige afsætning ved alternative priser og kender man udbuddet (jfr. ovenfor) ved alternative priser, kan man for hver pris beregne samlet, gennemsnitlig omsætning, som derefter kan sammenholdes med de totale omkostninger ved at præstere udbuddet. På denne måde kan man da finde frem til den optimale pris.

Den her givne fortolkning af udbudskurven er ikke et referat af Lykke Jensen, som på dette meget vigtige punkt indskrænker sig til at slynge en ligning ud i luften (ligning 8.29) samt give en figur (nr. 2.8), her fig. 2, der indeholder flere fejl og snarere vildleder end vejleder. Den her givne tolkning af udbudskurven antydes af forfatteren, idet afsætningskurvens nedre del i figuren synes at konvergere mod udbudskurven — hvorimod den øvre del ikke konvergerer mod afsætningskurven, hvilket ville være en konsekvens af den her givne tolkning sammenholdt med den i figuren tegnede udbudskurve. Hvorvidt det er muligt at nå frem til en simpel geometrisk bestemmelse af den optimale pris — jfr. det deterministiske tilfælde — er vanskeligt at se og behandles i hvert fald ikke af forf. At den anførte optimalpris (OA i fig. 2.8 gengivet nedenfor) er et *maximum maximum* ses ikke umiddelbart, idet man bl. a. savner en specifikation af den forventede grænseindtægts variationer. Dette kunne dog vist kun gøres i en tredimensional fremstilling. Et lille overskueligt eksempel ville i øvrigt her gøre stor nytte.

10. Ikke alene er dette kapitel fremstillingsmæssigt svagere end de øvrige afsnit, men det synes tillige som om man her kan gribe forf. i en mangelfuld gennemtænkning af problemerne. Den nedenfor fra forf.s fig 2.8 gengivne udbudskurve er som nævnt defineret ved forf.s ligning (8.2.9), dvs. følgende relation:

$$\int_{\eta}^{\infty} p d\Phi(x/p) = f'(\eta).$$

Her er $\Phi(x/p)$ sumfunktionen for efterspørgslens fordelingsfunktion i hvilken x er efterspørgslen og prisen p , er en parameter. η er den producerede mængde. Ved en given produktion, η , og en efterspørgsel på x vil en del af efterspørgslen, nemlig $x - \eta$, ikke kunne tilfredsstilles. Sandsynligheden for afvisning er



Figur 2.

$$\int_{\eta}^{\infty} d\Phi(x/p).$$

Produceres der en enhed mere, vil grænseomsætningen ved den givne pris være p , hvis $x > \eta$, men den er lig nul, hvis $x < \eta$. Man får derfor, at omsætningsstigningen ved produktionen af en enhed mere med given pris vil være

$$p \int_{\eta}^{\infty} d\Phi(x/p),$$

dvs. venstresiden i den ovenfor givne definitionslikning for udbudskurven er grænseomsætningen. Idet omkostningsfunktionen er $f(\eta)$, er højresiden grænseomkostningerne. Den angivne ligevægt mellem grænseomsætning og grænseomkostninger benyttes nu til bestemmelse af den ved given pris optimale produktion. Ved variation af p får man derefter den nævnte udbudskurve.

Nu kunne ligevægten også skrives som

$$\frac{f'(\eta)}{p} = \int_{\eta}^{\infty} d\Phi(x/p).$$

Uden at specificere efterspørgsels fordelingsfunktion ville det forekomme rimeligt om man antog, at det i det mindste er en symmetrisk fordeling. Under denne forudsætning vil »efterspørgselskurven«, $m(p)$, gå gennem fordelingernes medianer¹. Heraf følger, at udbudskurven må skære efterspørgselskurven i et punkt, hvor

1. Hvis man af en eller anden grund ikke kan acceptere forudsætningen om symmetriske fordelinger, kan man alternativt tænke sig, at efterspørgselskurven bestemmes ved fordelingernes medianer.

$$\int_{\eta}^{\infty} d\Phi(x/p) = \frac{1}{2}, \text{ dvs. } f'(\eta) = \frac{1}{2}p,$$

hvilket i hvert fald ikke gælder for punktet G i fig. 2.

Betragter man nu videre det forløb, forf. har givet sin udbudskurve, vil man se, at i optimalpunktet (F) er

$$\frac{f'(\eta)}{p} = \frac{BC}{BF}.$$

Men skal dette være et optimalpunkt betyder det, at

$$\int_{\eta}^{\infty} d\Phi(x/p) = \frac{BC}{BF}.$$

som efter figuren at dømme er et tal oppe i nærheden af 1, f. eks. 0.8. Men ved prisen OA er den gennemsnitligt efterspurgte mængde AG , og man skulle her producere AF . At dette skulle indebære, at man må afvise i 4 af 5 tilfælde er mere end mærkeligt.

Kan den givne indvending accepteres, skulle det vel imidlertid følge, at ikke alene vil udbudskurven skære efterspørgelseskurven, således at grænseomkostningerne her er lig halvdelen af prisen, men tillige følger, at til venstre for dette punkt må udbudskurven nærme sig til grænseomkostningskurven, mens den til højre for punktet må »løbe mere og mere væk«, idet $f'(x)/p$, skal være voksende under hensyntagen til, at man ved større og større produktion afviser en mindre og mindre andel. Dette sidste skyldes dels at produktionen forudsættes at være en voksende funktion af prisen¹, dels at efterspørgelseskurven er faldende. Omvendt vil man ved et analogt ræsonement se, at til venstre for skæringspunktet mellem udbudskurven og efterspørgelseskurven vil man (for faldende η) afvise mere og mere, hvorfor udbudskurven her må nærme sig grænseomkostningskurven.

I den efterfølgende artikel af A. Hald findes en nærmere analyse af udbudskurvens forløb. Man gætter på, at Halds resultater vil danne udgangspunkt for en lang række undersøgelser over en stokastisk udformet teori om prisdannelsen under ufuldkommen konkurrence. Der synes her at blive åbnet for en rigdom af problemstillinger.

11. I et efterfølgende afsnit (»Monopolistisk konkurrence«) behandles først rent deterministiske modeller. Der gennemføres her en interessant udvidelse af Amoroso-Robinsons formel, jfr. (8.3.7.) og (8.3.9.), som vel har været tangeret af Frisch (1941), men som i den her givne, meget generelle udformning er forfatterens fortjeneste. Forf.'s betragtning (pp. 192 ff.) kan formentlig generaliseres en smule mere og vil da kunne gengives som følger:

Lad der være givet n producenter, der producerer n konkurrerende varer med priserne p_1, p_2, \dots, p_n . De enkelte producenters afsætningsfunktioner er

1. Cf. Halds fremstilling nedenfor. Det er i høj grad et spørgsmål, om det overhovedet er rimeligt at antage, at udbudskurven er stadigt voksende.

$$\begin{array}{l} m_1 = m_1(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ m_2 = m_2(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ \hline m_n = m_n(p_1, p_2, \dots, p_n). \end{array}$$

Nu vil den pris som sælger nr. 1 fastlægger afhænge af p_2, p_3, \dots, p_n .
 Eller generelt:

$$\begin{array}{l} p_1 = f_1(p_2, p_3, \dots, p_n) \\ p_2 = f_2(p_1, p_3, \dots, p_n) \\ \hline p_n = f_n(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}). \end{array}$$

Af de sidste $n-1$ ligninger fås nu p_2, p_3, \dots, p_n som funktioner af p_1 , dvs.

$$p_2 = p_2(p_1), \quad p_3 = p_3(p_1), \quad \dots, \quad p_n = p_n(p_1).$$

For sælger nr. 1 får man nu, jfr forf.'s (8.3.1.), at profitten bliver

$$\pi_1 = p_1 \cdot m_1(p_1, p_2, \dots, p_n) - f_1(m_1),$$

hvor $f_1(m_1)$ er denne sælgers omkostningsfunktion. Man får nu

$$\frac{d\pi_1}{dp_1} = p_1 \sum_{i=1}^n \frac{\delta m_1}{\delta p_i} \frac{dp_i}{dp_1} + m_1 - f'_1(m_1) \sum_{i=1}^n \frac{\delta m_1}{\delta p_i} \frac{dp_i}{dp_1},$$

hvoraf fås for $\frac{d\pi_1}{dp_1} = 0$, at

$$p_1 + \frac{m_1}{\frac{\delta m_1}{\delta p_1} + \sum_{i=2}^n \frac{\delta m_1}{\delta p_i} \frac{dp_i}{dp_1}} = f'_1(m_1).$$

Som vist af forf. er dette det helt generelle udtryk, hvoraf rækken af specielle markedsformer kan udledes. Sættes på venstre side p_1 udenfor parentes, får man

$$p_1 \left(1 - \frac{1}{e_1 + \sum_{i=2}^n \frac{p_1}{p_i} e_{1,i} \cdot \frac{dp_i}{dp_1}} \right) = f'_1(m_1),$$

hvor e_1 er priselasticiteten for vare (sælger) nr. 1, mens $e_{1,i}$ er krydselasticiteten for vare (sælger) nr. 1 overfor vare (sælger) nr. i . Det ses, at hvis $e_{1,i}$ er meget lille vil formelen degenerere til

$$p_1 \left(1 - \frac{1}{e_1} \right) = f'_1(m_1),$$

hvilket er den kendte Amoroso-Robinsons formel for det rene monopol. Forf. viser klart, hvorledes en række andre, specielle markedsformer kan afledes og fortolkes som specialtilfælde af den givne generelle formel, som er et vigtigt, nyt resultat.

Med udgangspunkt i Winding Pedersens prismodeller (1939) er forfatteren således i stand til at gennemføre meget klagørende generalisationer. Resultaterne kommenteres, idet forfatteren vender tilbage til at betragte efterspørgsel som stokastisk variabel, idet der som ved behandlingen af det rene monopol løses på forudsætningen om, at produktionen planlægges ud fra middelværdien. Endelig tages der også hensyn til, at konkurrenternes prisfastsættelse kan opfattes som stokastisk variable for produktionen. Man får her en særlig kompliceret situation. Der er dels en stokastisk sammenhæng mellem den fastsatte pris og konkurrenternes pris og dels en (anden) stokastisk sammenhæng mellem den fortsatte pris og den efterspurgte mængde. Forf.'s løsning (p. 203) er yderst formel og vil næppe sige ret mange ret meget. Også her ville et enkelt eksempel have været værdifuldt.

12. Fremstillingsmæssigt og pædagogisk synes dette kapitel som nævnt at være væsentligt svagere og mindre vel gennearbejdet end de tidligere afsnit. Men der er udviklet nye bidrag, som må påkalde stor interesse. Her som i øvrigt i hele afhandlingen kan man anke over, at forfatteren ikke benytter genkomne lejligheder til at vise, at han kan se en række problemer, som han enten næsten løber ind i eller dog passerer tæt forbi. Kun som eksempel nævnes, at det dog må være nærliggende at arbejde med en sammenhæng mellem efterspørgselskurven og produktionspolitikken. Hvis således køberne igen og igen opdager, at sælgerne melder udsolgt, må dette antagelig påvirke den mod sælgerne rettede efterspørgselskurve (-fordeling).

13. Kap. 9 ligger vel nærmest i forlængelse af Kap. 3, idet forfatteren benytter den der udviklede optimale strategi for lagerhold på accelerations-teoriens problemstilling. Kapitlets reelle bidrag er da, så vidt det kan ses, at forfatteren ved at vælge forskellige konkrete fordelingstyper får vist, hvorledes forskellige accelerationsmodeller kan fremstilles som specielle tilfælde af langt mere generelle modeller. Pædagogisk ville kapitlet have vundet (i hvert fald i økonomernes verden) ved at være blevet knyttet mere konkret til foreliggende accelerationsmodeller. Netop i det af forfatteren

anførte arbejde af Poul Winding skulle der være et rigt materiale for en sådan konkretisering.

Mere generelt synes det, som om forf. ikke slår nok på tromme i dette kapitel. Det er jo ret beset af stor interesse, når det kan vises, som forf. gør, at en række af accelerationsteoriens forudsætninger kan begrundes ved specielle forudsætninger om afsætningens fordelingsfunktion kombineret med de af 50'ernes forfattere (incl. Lykke Jensen) analyserede optimale lagerstrategier. Flere af accelerationsteoriens vilkårlige forudsætninger om forholdet mellem ændringer i afsætningen og lageret får med dette kapitel en rationel begrundelse. Accelerationsteoriens udgangspunkter bliver m.a.o. retfærdiggjorte. Man savner igen en analyse af sammenhængen mellem teorien for lager og teorien for faste anlæg.

14. Det turde fremgå af det ovenfor anførte, at forf. har valgt en helt central problemstilling for sin afhandling. I forlængelse heraf må man, som også nævnt, fremhæve den klare, præcise fremstillingsevne, som kun undtagelsesvis svigter.

Man kan imidlertid sige, at pædagogikken i en vis forstand er ført for vidt. Forf. har i de mere refererende afsnit lagt vægt på at skrive en god lærebog. Det ses af litteraturhenvisningerne, som i en lærebog bør være sparsomme, men her i hvert fald er for sparsomme. De nødvendige henvisninger mangler ikke. Men de gennemføres på en sådan måde, at det for en udenforstående er meget vanskeligt at se, hvornår Arrow, Karlin og Scharf holder op og Lykke Jensen begynder.

I forlængelse heraf er det værd at bemærke, at på et avanceret niveau og på længere sigt befrier den virkelig gode pædagog ikke sine elever (resp. læsere) for problemer. Han må være åben og må være villig til at erkende huller i vores viden. Han må være villig til explicit at efterlade »løse ender«. I denne forstand kunne man måske sige, at der er for lidt »langtidspædagogik« i denne afhandling. En følge af dette er, at det er en afhandling med meget få positive fejl. Dette er naturligvis i sig selv udmærket. Men i det omfang det er en konsekvens af, at forf. er tilbageholdende overfor at eksperimentere videre på det givne grundlag, er en fejlfri afhandling ikke absolut attråværdig.

— Traditionelt stilles der ret store krav til en disputats. Disse krav lever Lykke Jensen op til. Afhandlingen er for økonomer vanskeligt tilgængelig. Dette kan man stort set ikke bebrejde forf. Der fører ingen kongevej til geometrien — ej heller til sandsynlighedsregningen. For alle, der må stave sig gennem afhandlingen, er det en trøst, at man får noget for arbejdet.

Appendix

STATSVIDENSKABELIGE OG ØKONOMISKE DISPUTATSER

(Efter udgivelsesåret er i parentes tilføjet dato for det mundtlige forsvar).

a) Statsvidenskabelige disputater (Københavns universitet):

- (1) Frantz Pio, *Den frie Konkurrences Gennembrud i England*, København 1902. (26. maj 1902).
- (2) L. V. Birch, *Værditeori I-II*, København 1902. (16. juni 1902).
- (3) H. Bisgaard, *Den danske Natoinaløkonomi i det 18. Aarhundrede*, København 1902. (18. september 1902).
- (4) Edv. Ph. Mackeprang, *Pristeorier*, København 1906. (1. maj 1906).
- (5) Axel Nielsen, *Specier, Kroner, Kurant*, København 1907. (18. januar 1908).
- (6) K. A. Wieth-Knudsen, *Formerelse og Fremskridt*, København 1908. (30. juni 1908).
- (7) Axel Rubow, *Renteforhold i Danmark*, København 1915. (30. januar 1915).
- (8) Jens Pedersen, *Om et Livsforsikringssselskabs Økonomi*, København 1915. (26. juni 1915).
- (9) J. W. Wilcke, *Chr. IV's Møntpolitik 1588-1625*, København 1919. (8. april 1919).
- (10) F. Zeuthen, *Den økonomiske Fordeling*, København 1928. (11. oktober 1928).
- (11) Jørgen Pedersen, *Arbejdslønnen i Danmark under skiftende Konjunkturer i Perioden 1850-1913*, København 1930. (27. november 1930).
- (12) Howard Grøn, *Den almindelige Skovøkonomis Teori*, København 1931. (5. marts 1931).
- (13) Marius Christoffersen, *Rutefart som mellemfolkeligt Problem*, København 1931. (28. maj 1931).
- (14) Carl Iversen, *Aspects of the Theory of International Capital Movements*, København og London 1935. (25. april 1935).
- (15) Paul Johansen, *Principperne for Netto- og Bruttogrundlaget for Livsforsikring*, København 1941. (25. juni 1941).
- (16) Jørgen Gelting, *Finansprocessen i det økonomiske kredsløb*, København 1948. (15. april 1948).
- (17) Hans Brems, *Some Problems of Monopolistic Competition*, København 1950 (duplikeret). (30. januar 1950).
- (18) Niels Lindberg, *Idealer og regler i anvendt økonomik*, København 1951. (27. november 1951).
- (19) P. Nørregaard Rasmussen, *Studies in Inter-Sectoral Relations*, København og Amsterdam 1956. (21. februar 1956).
- (20) Poul Winding, *Some Aspects of the Acceleration Principle*, København og Amsterdam 1957. (17. juni 1957).
- (21) Bjarke Fog, *Priskalkulation og prispolitik*, København 1958. (13. marts 1958).
- (22) Erik Hoffmeyer, *Dollar Shortage*, København og Amsterdam 1958. (8. maj 1958).
- (23) H. Uldall-Hansen, *Tid og rente*, København 1959. (15. oktober 1959).
- (24) Knud Rasmussen, *Variance and Production Function Analyses of Farm Accounts*, Oxford 1961. (Mundtligt forsvar bortfaldet. Graden koforeret 12. maj 1962).

(25) E. Lykke Jensen, *Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt*, København 1963. (8. oktober 1963).

b) Økonomiske disputatser (Aarhus universitet):

- (1) Kjeld Philip, *Bidrag til Læren om Forbindelsen mellem det offentlige Finanspolitik og den økonomiske Aktivitet*, København 1942. (30. maj 1942).
- (2) P. Nyboe Andersen, *Bilateral Exchange Clearing Policy*, København 1946. (11. maj 1946).
- (3) Vagn Madsen, *Bidrag til belysning af rationaliseringsproblemerne i industrivirksomheder*, København 1951. (26. november 1951).
- (4) Holger Gad, *Befolknings- og arbejdskraftproblemer i dansk landbrug. II*. Århus 1957. (20. juni 1957).

II

Af A. HALD*

1. I tilslutning til professor P. Nørregaard Rasmussens foranstående gennemgang af E. Lykke Jensens doktorafhandling: »Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt« skal jeg i det følgende tage nogle af afhandlingens hovedemner op til matematisk behandling. Formålet er dels at opnå en dybere indsigt i og dels at generalisere nogle af Lykke Jensens resultater¹.

I kapitel 1–7 udledes betingelser for, at den optimale lagerpolitik er af simpel karakter, og der angives en fremgangsmåde til bestemmelse af de optimale værdier af (s, S) under forudsætning af, at man begrænser sig til en politik af denne type. Lykke Jensen skriver herom på p. 59: »I paragraf 3.2 så vi, at det var nødvendigt at opstille temmelig specielle forudsætninger for at kunne påvise, at den optimale lagerpolitik var af typen (s, S) ; men hertil kommer, hvad der er katastrofalt, hvis man ønsker teorien anvendt i praksis, at der ikke foreligger nogen metode, i henhold til hvilken parametrene s og S kan beregnes«.

I afsnit 2 fremsættes nogle bemærkninger om de *forudsætninger*, Lykke Jensen har opstillet som grundlag for udledelsen af den simple lagerpolitik, og i afsnit 3 vises, at det er muligt at udarbejde en forholdsvis simpel *metode til bestemmelse af (s, S)* , såfremt lager- og ruinomkostningsfunktionerne er lineære.

Endvidere gives i afsnit 4 en generaliseret fremstilling af nogle af Lykke Jensens resultater om *prisfastsættelse under monopol*.

* Professor ved Københavns Universitet, dr. phil.

1. Jeg er professor P. Nørregaard Rasmussen tak skyldig for adskillige diskussioner i forbindelse med udarbejdelsen af denne afhandling.