(25) E. Lykke Jensen, *Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt*, København 1963. (8. oktober 1963).

b) Økonomiske disputatser (Aarhus universitet):

(1) Kjeld Philip, *Bidrag til Læren om Forbindelsen mellem det offentliges Finanspolitik og den økonomiske Aktivitet*, København 1942. (30. maj 1942).

(2) P. Nyboe Andersen, *Bilateral Exchange Clearing Policy*, København 1946. (11. maj 1946).

(3) Vagn Madsen, *Bidrag til belysning af rationaliseringsproblemerne i industrivirksomheder*, København 1951. (26. november 1951).

(4) Holger Gad, *Befolknings- og arbejdskraftproblemer i dansk landbrug. II.* Århus 1957. (20. juni 1957).

II

Af A. HALD*

1. I tilslutning til professor P. Nørregaard Rasmussens foranstående gennemgang af E. Lykke Jensens doktorafhandling: »Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt« skal jeg i det følgende tage nogle af afhandlingens hovedemner op til matematisk behandling. Formålet er dels at opnå en dybere indsigt i og dels at generalisere nogle af Lykke Jensens resultater[1].

I kapitel 1–7 udledes betingelser for, at den optimale lagerpolitik er af simpel karakter, og der angives en fremgangsmåde til bestemmelse af de optimale værdier af (s,S) under forudsætning af, at man begrænser sig til en politik af denne type. Lykke Jensen skriver herom på p. 59: »I paragraf 3.2 så vi, at det var nødvendigt at opstille temmelig specielle forudsætninger for at kunne påvise, at den optimale lagerpolitik var af typen (s,S); men hertil kommer, hvad der er katastrofalt, hvis man ønsker teorien anvendt i praksis, at der ikke foreligger nogen metode, i henhold til hvilken parametrene s og S kan beregnes«.

I afsnit 2 fremsættes nogle bemærkninger om de *forudsætninger*, Lykke Jensen har opstillet som grundlag for udledelsen af den simple lagerpolitik, og i afsnit 3 vises, at det er muligt at udarbejde en forholdsvis simpel *metode til bestemmelse af* (s,S), såfremt lager- og ruinomkostningsfunktionerne er lineære.

Endvidere gives i afsnit 4 en generaliseret fremstilling af nogle af Lykke Jensens resultater om *prisfastsættelse under monopol*.

---

* Professor ved Københavns Universitet, dr. phil.

1. Jeg er professor P. Nørregaard Rasmussen tak skyldig for adskillige diskussioner i forbindelse med udarbejdelsen af denne afhandling.

(25) E. Lykke Jensen, *Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt*, København 1963. (8. oktober 1963).

b) Økonomiske disputatser (Aarhus universitet):

(1) Kjeld Philip, *Bidrag til Læren om Forbindelsen mellem det offentliges Finanspolitik og den økonomiske Aktivitet*, København 1942. (30. maj 1942).

(2) P. Nyboe Andersen, *Bilateral Exchange Clearing Policy*, København 1946. (11. maj 1946).

(3) Vagn Madsen, *Bidrag til belysning af rationaliseringsproblemerne i industrivirksomheder*, København 1951. (26. november 1951).

(4) Holger Gad, *Befolknings- og arbejdskraftproblemer i dansk landbrug. II.* Århus 1957. (20. juni 1957).

II

Af A. HALD*

1. I tilslutning til professor P. Nørregaard Rasmussens foranstående gennemgang af E. Lykke Jensens doktorafhandling: »Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt« skal jeg i det følgende tage nogle af afhandlingens hovedemner op til matematisk behandling. Formålet er dels at opnå en dybere indsigt i og dels at generalisere nogle af Lykke Jensens resultater[1].

I kapitel 1–7 udledes betingelser for, at den optimale lagerpolitik er af simpel karakter, og der angives en fremgangsmåde til bestemmelse af de optimale værdier af (s,S) under forudsætning af, at man begrænser sig til en politik af denne type. Lykke Jensen skriver herom på p. 59: »I paragraf 3.2 så vi, at det var nødvendigt at opstille temmelig specielle forudsætninger for at kunne påvise, at den optimale lagerpolitik var af typen (s,S); men hertil kommer, hvad der er katastrofalt, hvis man ønsker teorien anvendt i praksis, at der ikke foreligger nogen metode, i henhold til hvilken parametrene s og S kan beregnes«.

I afsnit 2 fremsættes nogle bemærkninger om de *forudsætninger*, Lykke Jensen har opstillet som grundlag for udledelsen af den simple lagerpolitik, og i afsnit 3 vises, at det er muligt at udarbejde en forholdsvis simpel *metode til bestemmelse af* (s,S), såfremt lager- og ruinomkostningsfunktionerne er lineære.

Endvidere gives i afsnit 4 en generaliseret fremstilling af nogle af Lykke Jensens resultater om *prisfastsættelse under monopol*.

---

* Professor ved Københavns Universitet, dr. phil.

1. Jeg er professor P. Nørregaard Rasmussen tak skyldig for adskillige diskussioner i forbindelse med udarbejdelsen af denne afhandling.

2. *Lagerteoriens forudsætninger.* I kapitel 2 forudsætter Lykke Jensen, at indkøbs-, lager- og ruinomkostningsfunktionerne er voksende og konvekse og viser, at dette er en tilstrækkelig betingelse, for at lagerpolitikken bliver simpel. Det er umiddelbart klart, at det ikke er nødvendigt at forudsætte konveksitet for indkøbsomkostningsfunktionen; hvis $f' > 0$ og $f'' \leqq 0$ fås under visse betingelser en løsning af samme type. Det ses, at tabsfunktionens differentialkvotient kan skrives på formen

$$V'(\eta|\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t)\, \varphi(\eta - t)\, dt,$$

hvor

$$m(t) = \begin{cases} f'(\eta-\xi)+g'(t) & \text{for } t \geqq 0, \\ f'(\eta-\xi)-h'(-t)-p & \text{for } t < 0. \end{cases}$$

Heraf følger, at lagerpolitikken vil være simpel, hvis $m(t)$ skifter fortegn een gang, og φ er en Polya-frekvensfunktion.

Forudsætningen om, at lageromkostningerne er en funktion af slutlageret, er åbenbart indført af matematiske bekvemmelighedsgrunde, idet lageromkostningerne og ruinomkostningerne derved kommer til at indgå »symmetrisk« i tabsfunktionen ($g = 0$ for $x > \eta$, og $h = 0$ for $x < \eta$). Det ville være ønskeligt at udarbejde en tilsvarende teori med en mere realistisk lageromkostningsfunktion. Hvis man forudsætter, at lageromkostningerne er en funktion af gennemsnitslageret, kan der gennemføres en analyse, som giver principielt de samme, men lidt mere komplicerede resultater.

3. *Bestemmelse af (s,S) for lineære omkostningsfunktioner.* Først betragtes *planlægning for een periode* ad gangen. Som vist af Lykke Jensen bestemmes S_1 som en fraktil i efterspørgslens fordeling, idet

$$\Phi(S_1) = \frac{p+h-c}{p+h+g}, \tag{1}$$

hvor $\Phi(S_1)$ angiver sumfunktionen for efterspørgslen.

Lykke Jensen anfører blot, at s_1 bestemmes af ligningen

$$H_1(s_1) = H_1(S_1)+K, \tag{2}$$

hvor $H_1(\eta)$ er defineret ved (2.4.2), p. 27, men gør ikke rede for, hvorledes s_1 afhænger af omkostningskonstanterne og $\varphi(x)$.

Det ses let, at $H_1(\eta)$ kan skrives på formen

$$H_1(\eta) = h\bar{x} - (p+h-c)\eta + (p+h+g)(\eta - \bar{x}(\eta))\Phi(\eta), \tag{3}$$

hvor

$$\bar{x}(\eta) = \int_0^{\eta} x\, \varphi(x)\, dx \Big/ \int_0^{\eta} \varphi(x)\, dx, \tag{4}$$

d.v.s. $\bar{x}(\eta)$ angiver den gennemsnitlige efterspørgsel i den ved η afstumpede fordeling. Indsættes (3) og (1) i (2) fås

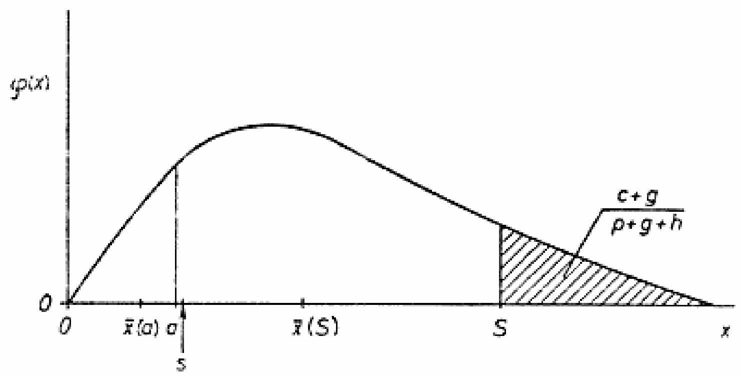
$$s_1 - \frac{\Phi(s_1)}{\Phi(S_1)}(s_1 - \bar{x}(s_1)) = \bar{x}(S_1) - \frac{K}{p+h-c}. \tag{5}$$

Højre side er en konstant, og venstre side er en simpel funktion af s_1, som let kan beregnes, hvorved s_1 kan bestemmes.

Det ses, at $s_1 > a$, hvor a betegner højre side af (5). Sættes $s_1 = a + \varepsilon$, og rækkeudvikles $\Phi(s_1)$ samt $\bar{x}(s_1)$ om a, fås følgende første tilnærmelse til s_1

$$s_1 = a + (a - \bar{x}(a)) \frac{\Phi(a)}{\Phi(S_1) - \Phi(a)}, \tag{6}$$

jvf. fig. 1.



Figur 1. Bestemmelse af (s,S).

Det tilsvarende problem ved *planlægning for uendelig mange perioder* er behandlet i § 3.3. Ligesom for een periode bestemmes S som en fraktil i efterspørgslens fordeling, idet

$$\Phi(S) = \frac{p+h-c}{p+h+g-\alpha c}. \tag{7}$$

Da $\Phi(S) > \Phi(S_1)$, fås $S > S_1$.

Ved omskrivning af $H(\eta)$, defineret i (3.3.2), fås

$$H(\eta) = h\bar{x} - (p+h-c)\eta + (p+h+g)(\eta - \bar{x}(\eta))\Phi(\eta) + \alpha\lambda(0)(1 - \Phi(\eta)) + \alpha\int_0^\eta \lambda(\eta - x)\varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

Dette udtryk er betydeligt mere kompliceret end $H_1(\eta)$ på grund af det sidste led, som afhænger af funktionen

$$\lambda(\xi) = \begin{cases} -c\xi + H(S) + K & \text{for } \xi \leq s, \\ -c\xi + H(\xi) & \text{for } \xi > s. \end{cases} \tag{9}$$

Af (9) fås

$$\lambda(0) = H(S) + K \tag{10}$$

samt

$$\int_0^s \lambda(s-x)\varphi(x)\,dx = -c(s-\bar{x}(s))\Phi(s)+\lambda(0)\Phi(s) \tag{11}$$

og, idet $S-s=\triangle$,

$$\int_0^S \lambda(S-x)\varphi(x)\,dx = -\int_0^S c(S-x)\varphi(x)\,dx+\int_0^{\triangle} H(S-x)\varphi(x)\,dx+\lambda(0)(\Phi(S)-\Phi(\triangle)). \tag{12}$$

Som en første tilnærmelse til det midterste led i (12) tages

$$\int_0^{\triangle} H(S-x)\varphi(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}(H(s)+H(S))\Phi(\triangle) = \left(\lambda(0)-\frac{K}{2}\right)\Phi(\triangle), \tag{13}$$

idet $H(s) = H(S)+K$.

Tilnærmelsen er god, hvis $H(S-x)$ er næsten lineær for $0 \leq x \leq \triangle$.

Ved indsættelse i ligningen $H(s)-H(S) = K$ fås

$$-(p+h-c)\triangle+(p+h+g-\alpha c)\{(s-\bar{x}(s))\Phi(s)-(S-\bar{x}(S))\Phi(S)\}+\frac{\alpha}{2}K\Phi(\triangle) = K$$

som ved hjælp af (7) omskrives til

$$s-\frac{\Phi(s)}{\Phi(S)}(s-\bar{x}(s)) = \bar{x}(S)-\frac{K}{p+h-c}\left(1-\frac{\alpha}{2}\Phi(S-s)\right). \tag{14}$$

Dette resultat er analogt med (5), men mere kompliceret, fordi s indgår på højre side. Ligningen må derfor løses ved iteration, f. eks. med $s = s_1$ eller $s = 0$ som udgangsværdi.

Hvis *planlægningen omfatter to perioder*, kan S_2 bestemmes ved en i princippet lignende fremgangsmåde. Af (3.2.18) og (3.2.6) fås

$$H'_2(S_2)-H'_1(S_1) = (p+h+g)\,(\Phi(S_2)-\Phi(S_1))+\alpha\int_0^{S_2}\lambda'_1(S_2-x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

I sidste led er $\lambda'_1(S_2-x) = -c$ for $S_2-S_1 \leq x \leq S_2$ og approximeres ved en lineær funktion for $0\leq x\leq S_2-S_1$, hvilket må formodes at være tilfredsstillende, da S_2-S_1 er lille. Heraf fås følgende ligning til iterativ bestemmelse af S_2

$$\Phi(S_2) = \Phi(S)\frac{1+\frac{\alpha}{2}\Phi(S_2-S_1)}{1+\frac{\alpha}{2}\Phi(S_2-S_1)\frac{p+h+g}{p+h+g-\alpha c}}. \tag{15}$$

Analoge, men mere komplicerede relationer gælder for de følgende elementer i talfølgen. For praktiske formål vil det dog ofte være tilstrækkeligt at bestemme S_1, S_2 og S.

4. *Prisfastsættelse under monopol.* Den af Lykke Jensen i § 8.2 udviklede teori for bestemmelse af monopolprisen repræsenterer et betydeligt fremskridt sammenlignet med den deterministiske teori, men kan dog kun betragtes som en begyndelse, idet forudsætningerne er for specielle. Hertil kommer, at ræsonnementerne er knyttet til de sædvanlige grafiske fremstillinger fra denne del af økonomien, hvilket gør det vanskeligt at overskue resultaternes gyldighedsområde. I det følgende foretages en nærliggende generalisering af Lykke Jensens model, og der gennemføres en matematisk analyse af prisdannelsen.

Lykke Jensen forudsætter, (1) at monopolisten producerer mængden $m(p)$, (2) at $m(p)$ er lig med den gennemsnitlige efterspørgsel, (3) at spredningen i efterspørgslens fordeling er konstant, d.v.s. uafhængig af prisen, og (4) at fordelingen ikke indeholder andre ukendte parametre.

Vi skal her forudsætte, (1) at monopolisten producerer mængden $m(p)$, (2) at $m(p)$ er en *positionsparameter* i efterspørgslens fordeling, (3) at efterspørgslens fordeling desuden afhænger af en *skalaparameter* σ, der er en funktion af p, samt (4) at fordelingen ikke indeholder andre ukendte parametre. Lykke Jensens model fremkommer som specialtilfælde, såfremt fordelingen vælges således, at positionsparameteren er lig med middelværdien, at skalaparameteren er lig med spredningen, og at skalaparameteren er uafhængig af p. Ovennævnte model må kun betragtes som et eksempel, der er tilstrækkeligt fleksibelt til at give mange forskellige resultater foruden det af Lykke Jensen fundne.

Lad $g(u)$, $-\infty < u < \infty$, være en frekvensfunktion, som ikke indeholder ukendte parametre, og lad $G(u)$ betegne den tilsvarende sumfunktion,

$$G(u) = \int_{-\infty}^{u} g(t)\, dt.$$

Sumfunktionen for efterspørgslen defineres da som

$$\Phi(x,p) = G\left(\frac{x - m(p)}{\sigma(m)}\right), \quad x \geqq 0, \tag{16}$$

hvor skalaparameteren $\sigma(m)$ betragtes som funktion af m og dermed af p. Den tilsvarende frekvensfunktion er lig med

$$\varphi(x,p) = \begin{cases} G\left(-\dfrac{m(p)}{\sigma(m)}\right) & \text{for } x = 0, \\[2ex] g\left(\dfrac{x - m(p)}{\sigma(m)}\right) \Big/ \sigma(m) & \text{for } x > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Efterspørgslens fordeling bliver altså en afstumpet fordeling i relation til u-fordelingen, såfremt $G(-m/\sigma) > 0$.

Den gennemsnitlige efterspørgsel er

$$\begin{aligned} \mu(p) &= \int_0^\infty x\,\varphi(x,p)\, dx \\ &= m(p)\left(1 - G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\right) + \sigma(m) \int_{-m/\sigma}^{\infty} u g(u)\, du. \end{aligned}$$

(Her og i det følgende vil $m(p)$ og $\sigma(m)$ ofte blive forkortet til m og σ).

Det ses, at den gennemsnitlige efterspørgsel er en funktion af både m og σ. Det er imidlertid let at specificere $g(u)$ således, at $\mu(p)$ praktisk taget er lig med m eller er identisk med m, jvf. de følgende tre eksempler.

Lad os først antage, at $g(u)$ er symmetrisk omkring 0, og at $G(-m/\sigma) > 0$, hvilket f. eks. gælder for den normale fordeling. Hvis afstumpningsgraden $G(-m/\sigma)$ er lille, og $g(u)$ går exponentielt mod 0 for $u \to \infty$, vil μ praktisk taget være lig med m. Dette gælder for den normale fordeling for $\sigma < m/3$. Hvis »spredningen« σ er konstant – som forudsat af Lykke Jensen – bliver afstumpningspunktet $(-m(p)/\sigma)$, og dermed afstumpningsgraden, en funktion af p. En anden, måske mere rimelig hypotese er

$$\sigma(m) = \gamma_0 m(p) \tag{18}$$

hvor γ_0 er en positiv konstant, d.v.s. spredningen er proportional med gennemsnittet. Dette giver samme afstumpningsgrad $G(-1/\gamma_0)$ for alle værdier af p, og for $\gamma_0 < 1/3$ kan man i praksis bortse fra afstumpningen.

Som et andet eksempel betragtes en fordeling $g(u)$, der ligesom ovenfor forudsættes symmetrisk om 0, men med et endeligt variationsområde, således at $G(-m/\sigma) = 0$, f. eks.

$$g(u) = \gamma(1-\gamma^2u^2)^\alpha \Big/ B\left(\alpha+1, \frac{1}{2}\right), \qquad |u| \leq \frac{1}{\gamma} \leq \frac{m}{\sigma},$$

hvilket giver

$$\varphi(x,p) = \left(1-\left(\frac{x-m}{m}\right)^2\right)^\alpha \Big/ mB\left(\alpha+1, \frac{1}{2}\right), \; 0 \leq x \leq 2m,$$

der er symmetrisk omkring $M\{x\} = m$ med $V\{x\} = m^2/(2\alpha+3)$, d.v.s. $V\{x\} = \sigma^2$ for $2\alpha+3 = m^2/\sigma^2$.

Et eksempel på en skæv fordeling uden afstumpning fås fra

$$g(u) = \left(u+\frac{1}{\gamma}\right)^{\beta-1} e^{-u-\frac{1}{\gamma}} \Big/ \Gamma(\beta), \quad u \geqq -\frac{1}{\gamma} = -\frac{m}{\sigma}, \; \beta \geqq 1,$$

som giver

$$\varphi(x,p) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\beta-1} e^{-\frac{x}{\sigma}}, \qquad x \geqq 0,$$

med $M\{x\} = \beta\sigma$ og $V\{x\} = \sigma^2$. Sættes $\beta = 1/\gamma$, fås $M\{x\} = m$.

Monopolistens afsætningskurve er defineret ved

$$\begin{aligned} a(p) &= \int_0^{m(p)} x\,\varphi(x,p)\,dx + m(p)\int_{m(p)}^{\infty} \varphi(x,p)\,dx \\ &= m(p)\int_0^{\infty} \varphi(x,p)\,dx + \int_0^{m(p)} (x-m(p))\,\varphi(x,p)\,dx. \end{aligned} \tag{19}$$

Ved hjælp af (17) fås

$$a(p) = m(p)\left(1 - G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\right) - c(m)\sigma(m), \tag{20}$$

hvor

$$c(m) = \int_{-m/\sigma}^{0} u g(u)\, du > 0. \tag{21}$$

Størrelsen c er en funktion af m/σ og dermed af p. Kun for $\sigma = \gamma_0 m$, hvor γ_0 er en konstant, bliver c uafhængig af p.

Lykke Jensen forudsætter, at σ er konstant og konkluderer, at »afsætningskurven bliver parallelforskudt til venstre for efterspørgselskurven«, jvf. p. 184. Dette kan kun være rigtigt med tilnærmelse, idet konklusionen forudsætter, at $G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)$ er lille, og at $c(m)$ også er konstant, se (20). Til belysning heraf fås fra (21)

$$c'(m) = g\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\frac{m}{\sigma^2}\left(1 - \frac{m}{\sigma}\sigma'(m)\right). \tag{22}$$

I tilfældet med normal fordeling og konstant spredning vil $c'(m)$ være forsvindende for $m/\sigma > 3$, hvilket også fremgår umiddelbart af (21), idet afstumpningen da intet betyder. For voksende værdier af p vil m aftage, hvilket medfører, at $c(m)$ aftager, og $G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)$ vokser, således at forskellen på $a(p)$ og $m(p)$ afhænger af p.

For den normale fordeling fås

$$c(m) = g(0) - g\left(-\frac{m}{\sigma}\right),$$

hvor

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2},$$

således at

$$a(p) = m(p)\left\{1 - G\left(-\frac{m}{\sigma}\right) - \frac{\sigma}{m}\left(g(0) - g\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\right)\right\},$$

der let kan beregnes, jvf. følgende tabel:

m/σ	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0	10.0
$a(p)/m(p)$	0.54	0.60	0.68	0.80	0.87	0.92	0.96

I det andet specialtilfælde $\sigma = \gamma_0 m$, fås $c'(m) = 0$, idet – som også anført ovenfor – $c(m)$ bliver uafhængig af m. Af (20) fås da, idet $c(m)$ betegnes c_0 for $m/\sigma = \gamma_0$,

$$a(p) = m(p)\,(1 - G\left(-\frac{1}{\gamma_0}\right) - c_0\gamma_0), \tag{23}$$

d.v.s. afsætningen er proportional med efterspørgslen (produktionen), eller udtrykt på anden måde *afsætningskurvens elasticitet er lig med efterspørgselskurvens elasticitet.*

Generelt fås af (20) – idet to af leddene ophæver hinanden –

$$a'(p) = m'(p)\,(1 - G\left(-\frac{m}{\sigma}\right) - c(m)\sigma'(m)), \tag{24}$$

hvilket giver *følgende relation mellem elasticiteterne*

$$e_a = e_m(1 - G - c\sigma') \bigg/ \left(1 - G - \frac{c\sigma}{m}\right), \tag{25}$$

hvor argumenterne $(-m/\sigma)$ og m er udeladt.

Hvis σ og c er konstant fås

$$e_a = e_m(1 - G) \bigg/ \left(1 - G - \frac{c\sigma}{m}\right) > e_m, \tag{26}$$

medens $\sigma = \gamma_0 m$ giver

$$e_a = e_m. \tag{27}$$

Profitfunktionen er defineret som

$$\pi(p) = pa(p) - f(m(p)). \tag{28}$$

Monopolprisen bestemmes derfor af ligningen

$$\pi'(p) = pa'(p) + a(p) - f'(m)m'(p) = 0. \tag{29}$$

Denne ligning kan omformes ved hjælp af e_a, hvilket giver

$$p\left(1 - \frac{1}{e_a}\right) = f'(m)\frac{m'(p)}{a'(p)}, \tag{30}$$

jvf. (24), som viser $m'(p)/a'(p)$. Formelt kan man opnå et resultat, som er helt analogt med Amoroso-Robinsons formel ved at indføre funktionen

$$F(a(p)) = f(m(p)) \tag{31}$$

under forudsætning af, at a og m er monotone. Man får herved

$$p\left(1 - \frac{1}{e_a}\right) = F'(a). \tag{32}$$

For σ og c konstante fås af (24), (26) og (30)

$$p\left\{1 - G - \left(1 - G - \frac{c\sigma}{m}\right)\frac{1}{e_m}\right\} = f'(m)$$

eller

$$p\left(1-\frac{1}{e_m}\right)(1-G) = f'(m)+\frac{c\sigma}{m'(p)} < f'(m), \tag{33}$$

hvilket i overensstemmelse med Lykke Jensens resultat viser, at $p < p_0$, hvor p_0 er bestemt ved Amoroso-Robinsons formel, hvis G er tilstrækkelig lille.
For $\sigma = \gamma_0 m$ fås derimod af (24), (27) og (30)

$$p\left(1-\frac{1}{e_m}\right) = f'(m)/(1-G_0-c_0\gamma_0) > f'(m), \tag{34}$$

altså $p > p_0$, d.v.s. *en flytning af monopolpunktet i modsat retning* af den af Lykke Jensen fundne.
For $\gamma_0 = 1/3$ fås

$$p\left(1-\frac{1}{e_m}\right) = f'(m)/0.87.$$

Om p bliver større eller mindre end p_0 beror således på, hvorledes σ afhænger af m.

Indføres e_m i (30) ved hjælp af (25) fås *den generaliserede Amoroso-Robinson formel* på formen

$$p\left(1-\frac{1}{e_m}\right)\left(1-G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\right) = f'(m)+c(m)\,\sigma'(m)\left(p+\frac{\sigma(m)}{\sigma'(m)m'(p)}\right), \tag{35}$$

hvoraf (33) og (34) fremkommer som specialtilfælde. Korrektionen til $f'(m)$ kan være både positiv og negativ. Den er lig med nul for

$$\sigma(m) = \frac{k}{p}, \tag{36}$$

hvor k er en positiv konstant.

Den ovenstående primitive statistiske model resulterer i et gennemsnitslager (overskudsproduktion) på $m(p) - a(p)$, der betragtes som værdiløst. En simpel udvidelse af modellen fremkommer, hvis man tænker sig denne restbeholdning solgt ved periodens slutning til en særlig (lav) pris p_0. Derved ændres profitfunktionen til

$$\pi(p) = pa(p) - f(m(p)) + p_0(m(p) - a(p)). \tag{37}$$

Man ser let, at dette blot ændrer resultatet i formel (35) derved, at *højre side formindskes med*

$$p_0\left(G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)+c(m)\,\sigma'(m)\right), \tag{38}$$

hvorved den optimale producerede mængde forøges, og monopolprisen formindskes, som man også umiddelbart ville formode.

I den ovennævnte model er monopolistens udbudsfunktion $m(p)$ knyttet til efterspørgslens fordeling. Det er imidlertid naturligt også at inddrage omkostningerne i bestemmelsen af udbudsfunktionen, og Lykke Jensen definerer derfor i sin anden model udbudsfunktionen derved, at *den forventede grænseindtægt skal være lig med grænseomkostningen*. Den optimale produktionsmængde (udbuddet) η bestemmes derfor af ligningen

$$p\int_{\eta}^{\infty}\varphi(x,p)\,dx = f'(\eta). \tag{39}$$

Udbuddet η bliver derved en funktion af prisen. I det følgende betragtes η som en funktion af m – og dermed af p – i stedet for som hos Lykke Jensen direkte som en funktion af p. Endvidere indføres hjælpestørrelsen

$$\zeta = \frac{\eta - m}{\sigma}, \tag{40}$$

der ligeledes er en funktion af m. Med disse betegnelser kan (39) skrives

$$1 - G(\zeta) = f'(\eta)/p, \tag{41}$$

der ved differentiation m.h.t. p giver

$$\eta'(m)m'(p)(f''(\eta)+\frac{p}{\sigma}g(\zeta)) = \frac{f'(\eta)}{p}+m'(p)\frac{p}{\sigma}g(\zeta)(1+\zeta\sigma'(m)) \tag{42}$$

eller

$$\frac{d\eta}{dp}(f''(\eta)+p\,\varphi(\eta,p)) = \frac{f'(\eta)}{p}+m'(p)p\,\varphi(\eta,p)\left(1+\frac{\eta-m}{\sigma}\sigma'(m)\right). \tag{43}$$

For $f''(\eta) \geqq 0$ vil fortegnet for $d\eta/dp$ være lig med fortegnet for højre side af (43). Betingelsen for at $d\eta/dp = 0$ kan ved hjælp af (39) udtrykkes som

$$\frac{1-\Phi(\eta,p)}{\varphi(\eta,p)} = e_m m\left(1+\frac{\eta-m}{\sigma}\sigma'(m)\right).$$

For $m'(p)<0$, $\sigma'(m) \geqq 0$ og $\eta \geqq m$ vil det sidste led på højre side i (43) være negativt, således at højre side bliver mindre end $f'(\eta)/p$, som er mindre end 1, d.v.s.

$$\frac{d\eta}{dp}(f''(\eta)+p\,\varphi(\eta,p))<1, \tag{44}$$

hvilket betyder, at *udbudskurvens hældning er større end grænseomkostningskurvens hældning for* $\eta \geqq m$, såfremt $\sigma'(m) \geqq 0$ og $dp/d\eta > 0$.

Hvis $\sigma'(m) > 0$ gælder sætningen for

$$1+\frac{\eta-m}{\sigma}\sigma'(m)>0$$

d.v.s. for

$$\eta>m-\frac{\sigma(m)}{\sigma'(m)}, \tag{45}$$

hvilket giver $\eta>0$ for $\sigma=\gamma_0 m$.

Med en produktion på η bliver *afsætningen* lig med

$$\begin{aligned} a_1(p) &= \int_0^\eta x\,\varphi(x,p)\,dx+\eta\int_\eta^\infty \varphi(x,p)\,dx \\ &= m\int_{-m/\sigma}^{\zeta} g(u)\,du+\eta\int_\zeta^\infty g(u)\,du-c_1(m)\sigma(m), \end{aligned} \tag{46}$$

hvor

$$c_1(m)=\int_{-m/\sigma}^{\zeta} ug(u)\,du. \tag{47}$$

For at finde forholdet mellem $a_1(p)$ og $m(p)$ omskrives (46) til

$$a_1(p)=m(p)\left\{1-G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)+\frac{\eta-m}{m}(1-G(\zeta))-\frac{c_1(m)\sigma(m)}{m(p)}\right\}, \tag{48}$$

der let fortolkes ved hjælp af (16), idet $1-G(-m/\sigma)$ angiver sandsynligheden for en positiv efterspørgsel, $1-G(\zeta)$ angiver sandsynligheden for en efterspørgsel større end produktionen og

$$-c_1(m)\sigma(m)=\int_0^\eta (x-m)\,\varphi(x,p)\,dx.$$

For $\eta=m$ bliver $a_1(p)=a(p)$, jvf. (20).

Ved differentiation fås

$$a'_1(p)=m'(p)\left\{1-G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)+(\eta'-1)(1-G(\zeta))-c_1(m)\sigma'(m)\right\}, \tag{49}$$

hvor $\eta'=d\eta/dm$.

Af *profitfunktionen*

$$\pi_1(p)=pa_1(p)-f(\eta) \tag{50}$$

fås ved differentiation

$$\pi'_1(p)=pa'_1(p)+a_1(p)-f'(\eta)\eta'(m)m'(p)=0.$$

Division med $pm'(p)$ giver

$$\frac{a'_1(p)}{m'(p)}+\frac{a_1(p)}{m(p)}\frac{m(p)}{pm'(p)}=\frac{f'(\eta)}{p}\eta'(m). \tag{51}$$

Indføres $e_m = -pm'(p)/m(p)$ fås efter en lignende reduktion som ved (35) følgende ligning til bestemmelse af monopolprisen

$$p\left(1-\frac{1}{e_m}\right)\left(1-G\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\right) = f'(\eta)\left(1+\frac{\eta-m}{e_m m}\right)+c_1\sigma'\left(p+\frac{\sigma}{\sigma' m'}\right). \quad (52)$$

Dette resultat kan opfattes som *en yderligere generalisering af Amoroso-Robinsons formel*, idet en sammenligning med (35) viser, at grænseomkostningerne er blevet multipliceret med

$$1+\frac{\eta-m}{e_m m},$$

der er større, henholdsvis mindre end 1, eftersom η er større eller mindre end m.

Modellen kan generaliseres yderligere ved ligesom for den første model at indføre indtægten fra salg af restlageret $p_0(\eta-a)$ i profitfunktionen.

I det følgende vises et *eksempel* på anvendelsen af disse formler. Lad os antage, at $g(u)$ er en standardiseret normal fordeling, at $m(p) = \alpha/p^2$ og $\sigma(m) = \gamma_0 m$, samt at $f'(m) = a+bm$. Den eneste vanskelighed i anvendelsen af formlerne ligger da i bestemmelsen af funktionen η, som er defineret ved ligningen

$$G(-\zeta) = f'(\eta)/p, \qquad \zeta = \frac{\eta-m}{\sigma}. \quad (53)$$

Indføres $r = \eta/m$ fås $\zeta = (r-1)/\gamma_0$, altså

$$G\left(\frac{1-r}{\gamma_0}\right) = (a+brm)/p \quad (54)$$

eller

$$G\left(\frac{1-r}{\gamma_0}\right) = \left(a+\frac{\alpha br}{p^2}\right)\frac{1}{p}. \quad (55)$$

For passende valgte værdier af r løses denne ligning m.h.t. p, hvorefter η for disse værdier af p beregnes som $\eta(p) = rm(p)$.

Beregningerne af de forskellige funktioner er gennemført i nedenstående tabel for $\alpha = 400$, $\gamma_0 = 1/3$, $a = 2$ og $b = 0.2$.

Tabel 1.
Beregning af η, $a_1(p)$, og $h(m)$.

r	$G(-\zeta)$	p	m	η	a_1	$f'(\eta)$	$f'(\eta)h(\eta)$
0.2	0.9918	3.41	34.4	6.9	6.9	3.4	2.0
0.5	0.9332	4.38	20.9	10.5	10.2	4.1	3.2
0.6	0.8849	4.71	18.0	10.8	10.5	4.2	3.6
0.7	0.8159	5.09	15.4	10.8	10.3	4.2	3.9
0.8	0.7257	5.59	12.8	10.2	9.5	4.0	4.1
0.9	0.6179	6.23	10.3	9.3	8.4	3.9	4.2
1.0	0.5000	7.14	7.9	7.9	6.8	3.6	4.1
1.1	0.3821	8.44	5.6	6.2	5.1	3.2	3.9
1.2	0.2743	10.5	3.7	4.4	3.4	2.9	3.6
1.4	0.1151	19.8	1.0	1.4	1.0	2.3	2.9

De tidligere anforte formler giver i eksemplet folgende resultater:

$$\mu(p) = 1.000\, m(p),$$
$$a(p) = 0.867\, m(p),$$

og

$$a_1(p) = m(p)\left(1 + (r-1)\, G(-\zeta) - \frac{1}{3}\, g(\zeta)\right).$$

Monopolprisen bestemmes i det deterministiske tilfælde af Amoroso-Robinsons formel

$$\frac{p}{2} = f'(m). \tag{56}$$

I det stokastiske tilfælde bestemmes monopolprisen af ligningen

$$\frac{p}{2} = f'(m)/0.867, \tag{57}$$

såfremt monopolisten producerer (udbyder) $m(p)$, medens ligningen bliver

$$\frac{p}{2} = f'(\eta)\left(1 + \frac{\eta - m}{2m}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{3}\, g(\zeta)\right) = f'(\eta)\, h(\eta), \tag{58}$$

såfremt udbuddet bestemmes som $\eta(p)$.

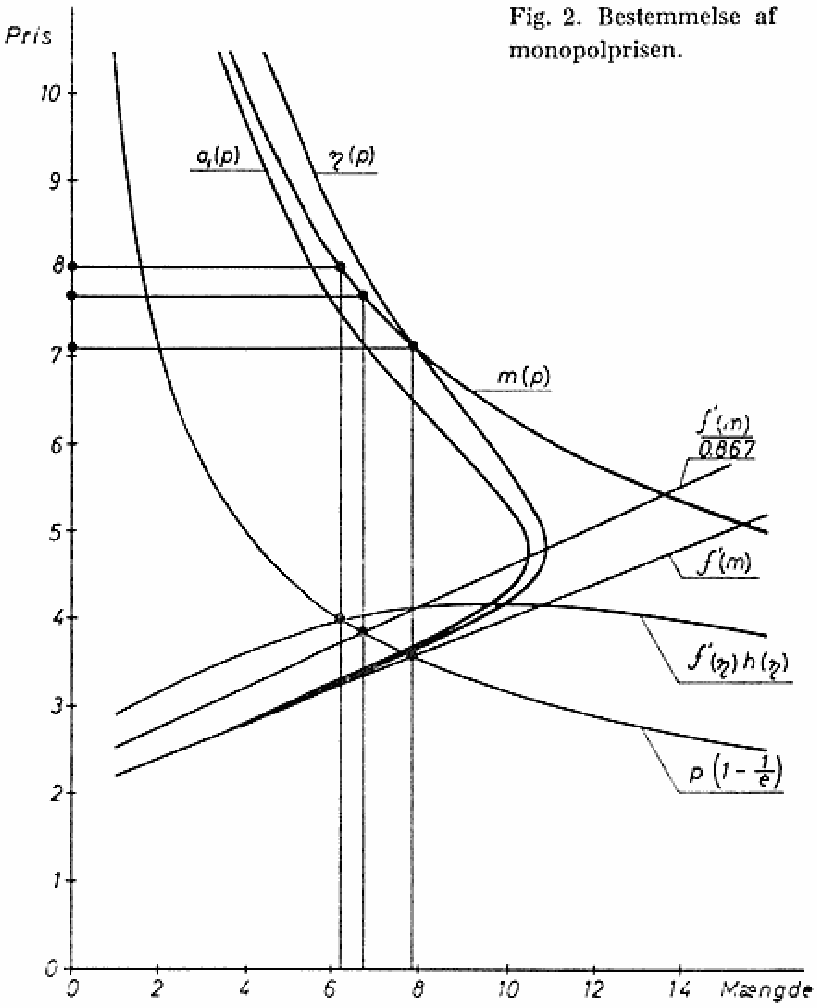


Fig. 2. Bestemmelse af monopolprisen.

Fig. 2 viser disse funktioner og bestemmelsen af de tre monopolpriser. I fig. 2 og de tre formler (56) – (58) er ligningerne »løst« m.h.t. $p/2$, men man kunne lige så godt have løst m.h.t. f', jvf. fig. 3. Dette medfører, at abscissen til skæringspunktet svarende til (58) bliver mængden η, således at monopolprisen bestemmes ud fra $\eta(p)$.

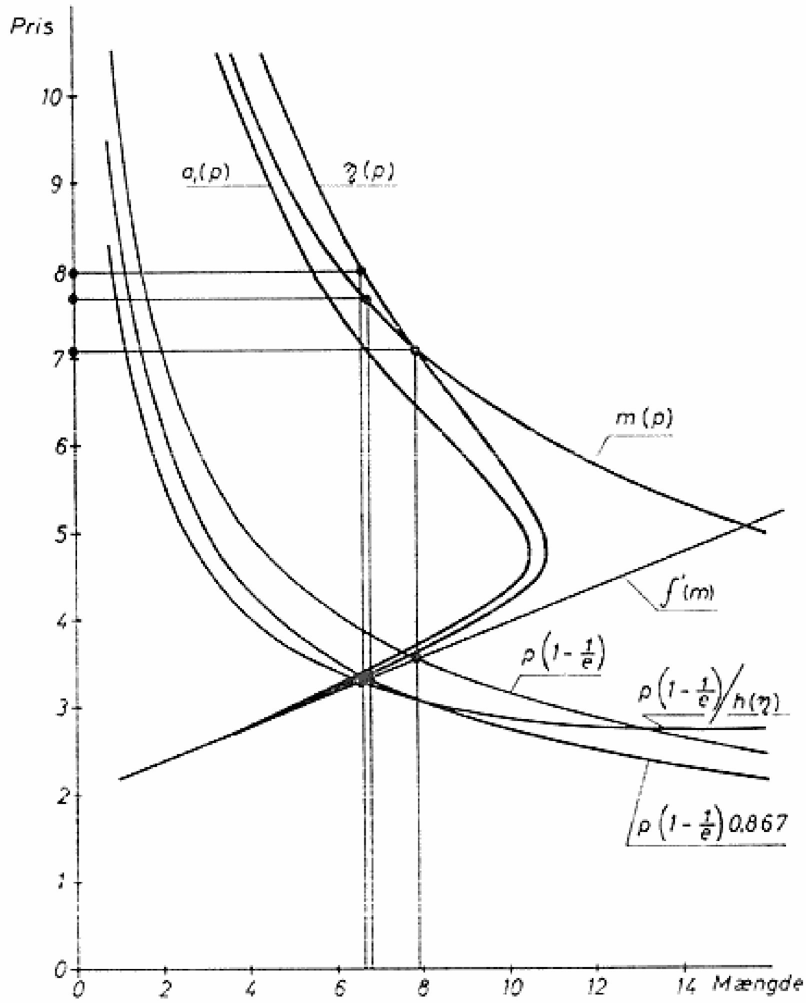


Fig. 3. Bestemmelse af monopolprisen.

Da m i det valgte eksempel er lig med medianen i efterspørgslens fordeling fås

$$\frac{1}{2} = \int_m^\infty \varphi(x,p)\,dx = f'(m)/p,$$

d.v.s. kurverne $\eta(p)$ og $m(p)$ skærer hinanden for $1/2 = f(m)/p$. Den samme relation fremkommer af Amoroso-Robinsons formel,

$$p\left(1-\frac{1}{e}\right) = f'(m),$$

for $e = 2$, jvf. fig. 2. For $e \neq 2$ fås derfor en mere kompliceret relation mellem de to skæringspunkter.