

PROGNOSEPROBLEMER BELYST VED TELEFONABONNENTPROGNOSER ¹

Af P. C. MATTHIESSEN *

I.

Ved en prognose forstår man i almindelighed et skøn over en eller anden størrelse (prognosevariablen) til et eller flere fremtidige tidspunkter. Prognosevariablen kan være afsætningen af en bestemt vare, den samlede befolkning, antallet af kvinder i en bestemt aldersklasse, størrelsen af en bestemt post på statsbudgettet o.s.v. Kort sagt størrelser af vidt forskellig karakter og fra vidt forskellige områder.

Grunden til, at man overhovedet er interesseret i at vurdere en eller anden størrelse i fremtiden, er, at der i dag skal træffes dispositioner, som afhænger af prognosevariablens fremtidige udvikling. Således vil f.eks. de planer, der udarbejdes for skolebyggeriet, være bestemt af befolkningstallet i bestemte aldersklasser en vis periode frem i tiden. Når dette er tilfældet, hænger det jo sammen med, at enhver udbygning er tidskrævende og derfor må iværksættes et vist stykke tid, inden den skal være i stand til at opfylde et givet behov.

Selv om den anvendte prognoseteknik i høj grad afhænger af, hvilket område det drejer sig om, er der dog en række prognoseteoretiske betragtninger af så generel karakter, at de vil finde anvendelse i forbindelse med prognoser på snart sagt alle områder.

Enhver prognose vil på en eller anden måde være baseret på prognosevariablens historiske udvikling, således at prognosen repræsenterer en form for ekstrapolation.

Denne ekstrapolation kan foretages direkte på prognosevariablen, enten grafisk ved f.eks. at forlænge den hidtidige udvikling med en ret linie eller ved at bestemme parametrene i den rette linie med anvendelse af de historiske værdier og herved direkte beregne en prognosefunktion. (Parametrene i den anvendte prognosefunktion vil i det følgende blive benævnt fremskrivningsparametre). Når den rette linie anvendes, vil de historiske værdier ikke

1. Professor, dr.phil. Arne Jensen har venligst gennemlæst manuskriptet til denne artikel.

* Lektor ved Københavns universitet.

PROGNOSEPROBLEMER BELYST VED TELEFONABONNENTPROGNOSER ¹

Af P. C. MATTHIESSEN *

I.

Ved en prognose forstår man i almindelighed et skøn over en eller anden størrelse (prognosevariablen) til et eller flere fremtidige tidspunkter. Prognosevariablen kan være afsætningen af en bestemt vare, den samlede befolkning, antallet af kvinder i en bestemt aldersklasse, størrelsen af en bestemt post på statsbudgettet o.s.v. Kort sagt størrelser af vidt forskellig karakter og fra vidt forskellige områder.

Grunden til, at man overhovedet er interesseret i at vurdere en eller anden størrelse i fremtiden, er, at der i dag skal træffes dispositioner, som afhænger af prognosevariablens fremtidige udvikling. Således vil f.eks. de planer, der udarbejdes for skolebyggeriet, være bestemt af befolkningstallet i bestemte aldersklasser en vis periode frem i tiden. Når dette er tilfældet, hænger det jo sammen med, at enhver udbygning er tidskrævende og derfor må iværksættes et vist stykke tid, inden den skal være i stand til at opfylde et givet behov.

Selv om den anvendte prognoseteknik i høj grad afhænger af, hvilket område det drejer sig om, er der dog en række prognoseteoretiske betragtninger af så generel karakter, at de vil finde anvendelse i forbindelse med prognoser på snart sagt alle områder.

Enhver prognose vil på en eller anden måde være baseret på prognosevariablens historiske udvikling, således at prognosen repræsenterer en form for ekstrapolation.

Denne ekstrapolation kan foretages direkte på prognosevariablen, enten grafisk ved f.eks. at forlænge den hidtidige udvikling med en ret linie eller ved at bestemme parametrene i den rette linie med anvendelse af de historiske værdier og herved direkte beregne en prognosefunktion. (Parametrene i den anvendte prognosefunktion vil i det følgende blive benævnt fremskrivningsparametre). Når den rette linie anvendes, vil de historiske værdier ikke

1. Professor, dr. phil. Arne Jensen har venligst gennemlæst manuskriptet til denne artikel.

* Lektor ved Københavns universitet.

med matematisk nøjagtighed ligge på en ret linie, således at de beregnede fremskrivningsparametre repræsenterer et historisk gennemsnit, hvorved man stiltiende akcepterer, at der fremover kan forventes en vis *tilfældig* eller *stokastisk* variation omkring prognoselinien.

Den rette linie er naturligvis kun en blandt principielt uendelig mange prognosefunktioner.

Begrundelsen for at foretage en fremskrivning af selve prognosevariablen ved en ekstrapolation af den historiske udvikling er i dybeste forstand den træghed og stivhed, som trods alt er forbundet med samfundsytringerne. De fleste af samfundets livsytringer er jo enten bevidst disponeret efter forholdene af i går eller er i sin faktiske udfoldelse bundet af gårdsdagens muligheder. Dette betyder, at selv om der aldrig er tale om en simpel gentagelse, har udfoldelsen af enhver art således forholdene af i går som forudsætning og er dermed fanget ind i en vis træghed.

Hvis derfor den pågældende prognosevariabel i sin udvikling er determineret af et stort antal faktorer, som hver for sig ikke ændres for voldsomt, vil prognosevariablen være underkastet en vis »inerti«, hvorfor man ved anvendelsen af denne fremgangsmåde ofte vil kunne påregne en vis overensstemmelse mellem den faktiske og den prognosticerede udvikling, når vi betragter kortere tidsrum.

Hvis derimod udviklingen også er determineret af en enkelt eller nogle få faktorer, som undergår voldsomme ændringer, vil »inertien« forsvinde og dermed begrundelsen for at anvende ekstrapolation på basis af selve prognosevariablen. Når dette er tilfældet, må der foretages en analyse af den bagvedliggende struktur og på dette grundlag fremstilles en prognosefunktion, hvori den eller de eksterne faktorer, som er i færd med at ændre sig, indgår eksplicit. Ofte vil det være ret enkelt at skaffe oplysning om en stærkt determinerende faktor, som undergår voldsomme ændringer, fordi den fremkommer på basis af beslutninger, som er koncentreret på få hænder, hvilket netop er årsagen til den voldsomme fluktuation.

I det følgende vil disse spørgsmål, sammen med problemerne vedrørende ajourføring og revision af prognoser, blive taget op til behandling og konkretiseret ved en gennemgang af en model for telefonabonnentprognoser.

II.

A. Abonnentprognosernes begrundelse og anvendelse.

Det område, et telefonselskab skal betjene med hensyn til etablering af abonnentforbindelser, vil være delt i en række centralområder, $C_1, C_2, \dots, C_m$, som hver har et fast anlæg, hvortil abonnenterne forbindes, efterhånden som de overgår fra potentielle til aktuelle abonnenter. Da ethvert af disse anlæg kun har en begrænset kapacitet, vil det tid efter anden med en voksende

ning af disse to hensyn. Som påvist af Yngve Rapp¹ er fastlæggelsen af den optimale størrelse af Δk_0 også afhængig af abonnentudviklingen på længere sigt (i dette tilfælde efter $T + n$).

Bestemmelsen af Δk_0 nødvendiggør således også en abonnentprognose og endog en prognose på længere sigt.

B. En vurdering af de gængse metoder fra en stokastisk synsvinkel.

Fælles for de fleste hidtil anvendte metoder er, at de umiddelbart på grundlag af den historiske udvikling i en nærmere fastlagt periode gående fra $T - r$ til T bestemmer en funktion, som beskriver sammenhængen mellem abonnentbestanden og tiden, hvorefter man foretager en ekstrapolation ved hjælp af denne funktion. Denne ekstrapolation kan foretages algebraisk ved at bestemme parametrene i funktionen og derefter indsætte de ønskede værdier af $t > T$ eller rent grafisk ved at indlægge den pågældende kurvetype mellem de historiske abonnenttal og ekstrapolere langs denne.

Vi vil nu i det følgende beskrive tre af de almindeligst anvendte funktioner og herunder give en redegørelse for den statistiske model, som nødvendigvis må ligge til grund for anvendelsen af disse metoder.

Alle tre metoder er baseret på oplysninger om abonnentmassens historiske udvikling. D.v.s.

$$A_0, A_1, \dots, A_T$$

til tidspunkterne

$$0, 1, \dots, T$$

idet tilvæksterne i hver af tidsperioderne betegnes med

$$a_1, a_2, \dots, a_T$$

For simpeltheds skyld sættes $r = T$.

Vor opgave er nu at give et skøn over A_{T+n} , idet n alt efter vore prognoseønsker kan tillægges værdierne

$$1, 2, 3, \dots$$

1. Den lineære funktion.

Den her anvendte prognosefunktion er af formen:

$$A_{T+n} = A_T + \alpha \cdot n$$

hvor α betegner abonnenttilvæksten pr. tidsenhed.

Når denne funktion bringes i anvendelse, vil forudsætningen i almindelighed være, at såvel den hidtidige som den fremtidige abonnenttilvækst pr. tidsenhed har en fast værdi bortset fra tilfældige afvigelser, ligesom de enkelte værdier af a_t er uafhængige af hinanden. Ovenstående ligning viser altså den

1. Se Yngve Rapp: Extension of Telephone Plant with Regard to the Value of Subscribers Time, Ericsson Technics No. 1, 1961.

struktur, som ligger bag abonnentudviklingen, således at afvigelser herfra er udtryk for den stokastiske eller tilfældige variation¹.

I dette tilfælde skal der kun foretages skøn over en parameter, nemlig α . Det kan vises, at det bedste skøn ($\bar{a}$) over denne størrelse for de almindelige fordelinger af a_t fremkommer ved at tage gennemsnittet af de hidtidige tilvækster pr. tidsenhed fra $t = 0$ til $t = T$.

D.v.s.

$$\bar{a}_T = \frac{\sum_{t=1}^T \alpha_t}{T} = \frac{A_T - A_0}{T} \approx \alpha.$$

Skønnet over den prognosticerede abonnentmasse til $t = T + n$ bliver da

$$A'_{T+n} = A_T + \bar{a}_T \cdot n \approx A_{T+n}.$$

Den kurve, som ligger til grund for det grafiske skøn, fås i dette tilfælde ved at tegne en ret linie gennem A_0 og A_T og forlænge denne udover T . D.v.s., at de mellemliggende værdier kun har betydning, når man skal vurdere modellens anvendelighed, men er derimod uden relevans i forbindelse med skønnet over liniens hældning.

Det er således klart, at regressionsanalysen, som jo lægger en linie ind mellem de givne værdier efter »mindste kvadraters metode«, ikke kan anvendes i forbindelse med prognoseproblemer af denne art.

På grund af det stokastiske element vil enhver af prognoseværdierne A_{T+n} være behæftet med en vis usikkerhed, således at man for en bestemt værdi af n kun kan angive et interval, i hvilket prognosevariablen med en vis sandsynlighed vil falde. Da usikkerheden naturligvis først sætter ind for $t > T$, er det følgende varians, som er relevant.

$$\begin{aligned} V\{A_{T+n}\} &= V\{a_{T+1} + a_{T+2} + \dots + a_{T+n} - \bar{a}_T \cdot n\} \\ &= V\{a_{T+1}\} + V\{a_{T+2}\} + \dots + V\{a_{T+n}\} + V\{\bar{a}_T \cdot n\} \\ &= n \cdot V\{a_{T+i}\} + n^2 \cdot V\{\bar{a}_T\}, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

idet

$$V\{A_{T+1}\} = V\{a_{T+2}\} = \dots = V\{a_{T+n}\}$$

Sættes

$$V\{a_{T+i}\} = \delta^2$$

bliver

$$V\{\bar{a}_T\} = \frac{\delta^2}{T}$$

hvorfor

$$V\{A_{T+n}\} = n \delta^2 + n^2 \frac{\delta^2}{T}$$

1. Se Arne Jensen: Befolkningsstatistik, København 1960.

idet

$$\frac{\sum_{t=1}^T (a_t - \bar{a}_T)^2}{T-1} \approx \delta^2.$$

Herefter kan man ved hjælp af udtrykket:

$$(A_T + \bar{a}_T \cdot n) \pm g \sqrt{n\delta^2 + n^2 \frac{\delta^2}{T}}$$

indlægge de ønskede grænser omkring prognosekurven, idet størrelsen af g bestemmes af den sandsynlighed, man ønsker at tillægge intervallet.

Det bemærkes, at usikkerheden på prognosevariablen for givet g er stigende for voksende n , d.v.s. jo længere ud i fremtiden prognosevariablen skal estimeres.

2. Den eksponentielle funktion.

I dette tilfælde antager prognosefunktionen udtrykket:

$$A_{T+n} = A_T \cdot e^{\beta \cdot n}$$

hvor e er grundtallet i den naturlige logaritme, d.v.s. en konstant, medens β bestemmer funktionens væksthastighed, idet væksten foregår på samme måde, som for en kapital, der sættes på rente med fortløbende rentetilskrivning. En anvendelse af denne funktion betyder, at man forudsætter en struktur, som er således beskaffen, at såvel den historiske som den forventede *relative* abonnenttilvækst pr. tidsenhed har en fast værdi, bortset fra tilfældige variationer. Dette betyder, at sammenhængen mellem abonnentmassen og tiden kan fremstilles ved en ret linie, når man tager logaritmen til A_t , idet ovenstående ligning, ved at tage logaritmen på begge sider af lighedstegnet, antager formen

$$\log_e A_{T+n} = \log_e A_T + \beta \cdot n.$$

Ved at regne på de logaritmisk transformerede værdier kan fastlæggelsen af β og spredningen på prognosevariablen foretages efter samme fremgangsmåde, som blev anvendt i forbindelse med den lineære funktion.

Efter at disse skøn er tilvejebragt, kan man igen gå tilbage til det oprindelige målesystem.

3. Den logistiske funktion.

En anvendelse af den logistiske funktion vil i vort tilfælde være ensbetydende med følgende prognosefunktion:

$$A_{T+n} = \frac{a}{1 + c \cdot e^{-b \cdot n}}$$

hvor parameteren a angiver den mætningsværdi, som A_t går imod for $t \rightarrow \infty$, medens størrelsen b er afgørende for abonnentudviklingens styrke. Størrelsen e betegner også her grundtallet i den naturlige logaritme, medens c er en normeringskonstant. Forløbet af denne funktion er således, at den i begyndelsen vokser med stigende hast, hvorefter væksten i den senere del af forløbet bliver svagere og svagere, således at funktionen tilsidst bliver næsten vandret.

Fortolkningen af den struktur, som må ligge bag anvendelsen af denne funktion, sker lettest ved at differentiere funktionen med hensyn til t og dermed få et udtryk for abonnenttilvæksten for enhver værdi af t .

$$\frac{dA_t}{dt} = A_t(a - A_t).$$

Dette udtryk viser, at abonnenttilvæksten, bortset fra tilfældige variationer, er proportional såvel med den aktuelle som den potentielle abonnentmasse.

Fastlæggelsen af parametrene a , b og c kan foretages på grundlag af tre historiske værdier af A_t med lige stor tidsafstand. En anvendelse af statistikens teori i forbindelse med beregningen af det bedste skøn over disse parametre samt spredningen på A_{T+n} er imidlertid ret kompliceret og vil ikke blive forsøgt i nærværende sammenhæng. Thi som det vil fremgå af det følgende, er en direkte anvendelse af disse modeller i regelen urealistisk i forbindelse med vækstproblemer indenfor de fleste samfundsområder, herunder abonnentudvikling, hvorfor den mere fuldstændige redegørelse i forbindelse med den lineære funktion kun skal tjene til at klarlægge sondringen mellem det strukturelle og det stokastiske element i relation til ethvert prognoseproblem.

C. En vurdering af disse prognosemodeller fra en strukturel synsvinkel.

En anvendelse af de her skitserede metoder på sammenhængen mellem abonnentmassen og tiden har som forudsætning, at de faktorer, som bestemmer strukturen (funktionen) og fremskrivningsparametrene (a , b , c ,), samvirker på en stabil måde. Kun i disse tilfælde er det relevant at forudsætte en bestemt udviklingsstruktur og konstante værdier af fremskrivningsparametrene og foretage en indlæggelse af usikkerhedsgrænser.

Hvis dette krav er opfyldt, kan inddragelsen af det stokastiske element give en værdifuld vejledning m.h.t., hvorledes man skal administrere sine prognoser i relation til sin investeringsplanlægning. Som vi senere skal se, vil denne vejledning også være relevant i forbindelse med administrationen af prognoser, hvor dette krav ikke er opfyldt.

Når man skal påbegynde etableringen af kapacitetudvidelsen for at kunne opsuge en ukendt, fremtidig abonnentmasse, vil investeringsudgifterne aftage, jo mindre usikkerhed prognosevariablen er behæftet med. Hvis man f.eks. ikke for nogen pris vil risikere, at anlægget ikke kan opsuge abonnenttilvæk-

sten, må dette medføre, at der hele tiden investeres efter en øvre intervalgrænse, som har næsten hele fordelingen under sig. Dette betyder, at anlægsudgifterne nedsættes, når usikkerhedsintervallet formindskes. Det vil derfor være betydningsfuldt at kunne formindske usikkerhedsintervallet.

Under forudsætning af en model, som bygger på en lineær udvikling, vil spredningen på prognosevariablen til $t = T + n$ være

$$\sigma \{A_{T+n}\} = \delta \sqrt{n + \frac{n^2}{T}}$$

Størrelsen af denne afhænger for en given værdi af δ udelukkende af n og T , således at spredningen er stigende for voksende værdier af n , d.v.s. jo længere ud i fremtiden, det pågældende skøn skal udøves, hvorimod spredningen er aftagende for voksende værdier af T , fordi skønnet over kurvens hældning bestemmes med større sikkerhed, jo flere historiske data man har til sin rådighed. En formindskelse af spredningen fremkommer altså ved at formindske n og forøge T mest muligt.

Dette kan opnås, hvis der foretages en ajourføring af abonnentbestanden efter afslutningen af hver tidsperiode, og samtidigt beregnes et nyt skøn over a ved at inddrage abonnenttilvæksten i den sidste tidsperiode. Herved reduceres $\sigma \{A_{T+n}\}$ gennem en forøgelse af T med en enhed. Samtidigt kommer det fremtidige tidspunkt også en enhed nærmere, d.v.s. at n formindskes til $n - 1$, således at spredningen på prognosevariablen til $T + n$ beregnet på basis af $t = T + 1$ nu får følgende udseende:

$$\sigma \{A_{T+n}\} = \delta \sqrt{(n-1) + \frac{(n-1)^2}{T+1}}$$

idet prognosevariablens størrelse til $T + n$ nu bestemmes af ligningen:

$$A'_{T+n} = A_{T+1} + \bar{a}_{T+1} (n-1).$$

Denne fremgangsmåde kan følges, indtil etableringstiden for den pågældende investering (n_E) tvinger en til at lægge sig fast på et bestemt skøn over prognosevariablen.

Den nedbringelse af usikkerheden, som fremkommer gennem en formindskelse af n , har sin reale baggrund i det fænomen, at vi anvender et ajourført udgangspunkt (den observerede værdi af A_{T+i}), som ligger stadig nærmere estimationstidspunktet ($T + n$). Dette forhold er specielt knyttet til vækstmodeller og skyldes, at udfaldene fra de enkelte forudgående tidsperioder hver for sig sætter deres mærke på prognosevariablen. Således vil en ekstrem værdi i en given periode ved at blive tillagt den forudgående værdi af prognosevariablen indgå i denne fremover. Ved en ajourføring »renses« prog-

nosevariablen for den usikkerhed, som fremkommer gennem opsummering af de forudgående perioders stokastisk varierende tilvækst.

Det andet bidrag til en nedbringelse af usikkerheden, som fremkom gennem en forøgelse af T , er ikke specielt knyttet til vækstmodeller. Her drejer det sig blot om den nedbringelse af usikkerheden på et givet skøn, som i almindelighed sker ved inddragelsen af et større antal observationer.

Disse forhold m.h.t. usikkerheden på prognosevariablen er naturligvis af helt generel karakter og vil gælde for en vilkårlig prognosefunktion.

Sondringen mellem de to bidrag til nedbringelsen af usikkerheden er, som det senere vil blive udviklet, af fundamental betydning i forbindelse med administrationen af en hvilken som helst prognosemodel.

Nu er det imidlertid de færreste områder inden for samfundsøkonomien, hvor de for udviklingen bestemmende faktorer samvirker på en så stabil måde, at fremskrivningen af selve prognosevariablen kan foretages på basis af disse simple modeller med tilhørende spredningsberegninger. Et blik på den historiske abonnentudvikling i de enkelte centralområder vil hurtigt gøre det klart, at udviklingen udviser et så fluktuerende forløb, at dette er aldeles uforeneligt med antagelsen af nogle af de her skitserede modeller.

Dette problem har man inden for andre områder, hvor en lignende udvikling har gjort sig gældende, søgt at løse ved at indlægge indviklede matematiske kurver, som kunne »indfange« den historiske udvikling. Disse funktioner skulle i så fald fremstille den bagved liggende modelstruktur, således at prognosticeringen foretages gennem en ekstrapolation af disse kurver. En sådan fremgangsmåde tjener naturligvis intet formål og betyder blot, at man ubevidst tillægger en matematisk formel en særlig evne til at se ind i fremtiden. Det er jo klart, at den funktion, som vi nu mener er hensigtsmæssigt at anvende i forbindelse med det foreliggende prognoseproblem, må baseres på en grundig gennemtænkning af den processtruktur, som ligger bag prognosevariablen. Den funktion, man beslutter sig for, opstilles naturligvis også med støtte i det historiske materiale. Men i dette tilfælde tjener funktionen kun til at omsætte vore tanker i et hensigtsmæssigt arbejdsredskab. Men hvis man derimod ukritisk indlægger en funktion på basis af de historiske data og ekstrapolerer ved hjælp af denne, har man jo i virkeligheden sat sig selv helt udenfor og ladet funktionen tænke for sig.

Når vi vil »indkapsle« en stærkt fluktuerende udvikling i en model, som bygger på selve prognosevariablen, kan dette kun forenes med de foran nævnte modeller ved at lade modellens fremskrivningsparametre være tidsafhængige. F.eks. kan modellen for en stærkt fluktuerende udviklingskurve baseres på den lineære funktion, ved at parameteren α , som giver udtryk for tilvæksten

pr. tidsenhed, varierer med t . På samme måde kan en udviklingskurve også tænkes opbygget af en lang række eksponentielle, logistiske eller andre funktioner, hvis parametre ændrer sig gennem tiden.

Et valg mellem disse tre eller andre funktionstyper til beskrivelse af udviklingen må da foretages således, at man vælger den funktion, hvis parametre udviser den største stabilitet gennem tiden.

I det øjeblik, man erkender nødvendigheden af at gøre fremskrivningsparametrene tidsafhængige, forandrer administrationen af prognosen helt karakter, idet man nu må have opmærksomheden rettet mod disse ændringer og søge at indarbejde disse så hurtigt som muligt. Så længe man kun anvender selve prognosevariablen, kan dette kun gøres ved rent passivt at basere skønnet over fremskrivningsparametrene på den seneste udvikling.

Det således opnåede skøn kan da anvendes ved estimationen af prognosevariablen, vel vidende at man i løbet af en vis periode må revidere prognosen ved at foretage et nyt skøn over parametrene, som igen baseres på de seneste observationer over tilvæksten.

Om styrken af denne ændring kan der inden for mange områder ikke siges noget bestemt, (derimod ofte om retningen), kun at ændringen ofte foregår jævnt og uden voldsomme spring, når man betragter kortere tidsrum.

Det vil heraf fremgå, hvor spinkelt et grundlag vi i almindelighed bygger på, når vi foretager prognoser, som udelukkende bygges op over selve prognosevariablen.

Begrundelsen for overhovedet at foretage en fortløbende ajourføring og fremskrivning af prognosevariablen på grundlag af fremskrivningsparametre, hvis størrelse baseres på den seneste udvikling, er i dybeste forstand den træghed og stivhed, som trods alt er forbundet med samfundsyttringerne. De fleste af samfundets livsytringer er jo enten bevidst disponeret efter forholdene af i går eller er i sin faktiske udfoldelse bundet af gårsdagens muligheder. Dette betyder, at selv om der aldrig er tale om en simpel gentagelse, har udfoldelsen af enhver art således forholdene af i går som forudsætning og er dermed fanget i en vis træghed.

Ved prognosen bygger vi jo ved anvendelse af den historiske parameter på dette træghedsforhold og vil derfor på adskillige områder ofte kunne påregne en vis overensstemmelse, mellem den prognosticerede og den observerede udvikling, når vi betragter kortere tidsrum.

Man kan nu spørge, om den stokastiske variation overhovedet kommer ind i billedet, når man anvender modeller med tidsafhængige fremskrivningsparametre. Dette må bero på en sammenligning mellem de afvigelser, som fremkommer mellem den prognosticerede og den faktiske udvikling på grund af ændringer i parametrene og på grund af tilfældige variationer. Det er klart, at hvis ændringerne m.h.t. størrelsen af fremskrivningsparametrene er betydelige, vil den stokastiske variation kun repræsentere en ubetydelig del af afvigelsen, specielt i det lange løb. Om dette kan der ikke siges noget generelt, som

kan gælde alle prognoseområder, men det er formentlig således, at når det gælder prognoser inden for samfundsområder, er de parametermæssige ændringer så afgørende, at den tilfældige variation er ganske uvæsentlig. En inddragelse af den stokastiske variation har derfor kun betydning i den nærmeste fremtid, hvor de parametermæssige ændringer på grund af den omtalte »inerti« ofte er begrænsede. Her vil de indlagte intervalgrænser repræsentere et »minimalt« variationsbælte.

Derimod har den stokastiske variation større interesse, når man skal afgøre, hvor mange af de seneste tidsperioder, der skal indgå i skønnet over fremskrivningsparametrene, idet vi er interesseret i det størst mulige antal perioder, fordi usikkerheden på skønnet herved nedsættes. Tilvækstens størrelse i disse tidsperioder skal, bortset fra tilfældige afvigelser, kunne beskrives ved hjælp af en prognosefunktion, hvis parametre er *uafhængige* af tiden.

Hvis vi har lagt den lineære funktion til grund for prognosen, kan man vise, at abonnenttilvæksterne pr. tidsenhed vil variere i overensstemmelse med poissonloven, hvorfor sandsynligheden for en vilkårlig tilvækst pr. tidsenhed bliver

$$p\{a_t | \alpha\} = \frac{\alpha^{a_t}}{a_t!} e^{-\alpha},$$

hvor α betegner middelværdien af tilvæksterne a_t . Med udgangspunkt i denne fordeling kan man fastlægge et interval i hvilket tilvæksterne pr. tidsenhed vil falde med en given sandsynlighed, under forudsætning af konstant middelværdi.

Når man derfor skal undersøge, hvor mange af de seneste tidsperioders tilvækst, der kan forenes med en antagelse om konstant fremskrivningsparameter, vil dette være ensbetydende med at undersøge, hvor mange tilvækster (a_t , idet $t = T - r + 1, \dots, T$) der kan opfattes som stokastisk uafhængige variable fra en poissonlov med konstant middelværdi α , idet

$$\frac{\sum_{t=T-r+1}^T a_t}{r} \approx \alpha.$$

En hypoteseprøvning af denne art er velkendt fra statistikkens teori og skal derfor ikke behandles her.

Denne enkle udvælgelsesmetode vil også kunne anvendes i forbindelse med f.eks. den eksponentielle eller logistiske prognosefunktion, da disse med tilnærmelse kan betragtes som lineære inden for kortere tidsrum. På grund af de før nævnte instabile forhold vil det i reglen kun være muligt at sammenfatte udviklingen fra ganske korte tidsrum til et skøn over parametrene.

Vi kan derfor konkludere, at når det gælder abonnentprognoser og progno-

ser på mangfoldige samfundsområder, har den stokastiske variation stort set kun interesse i forbindelse med skønnet over parametrene, fordi den stokastiske variation på længere sigt kun repræsenterer ubetydelige krusninger på overfladen i forhold til den parametermæssige variation.

Lad os nu med udgangspunkt i redegørelsen for administrationen af den lineære prognosefunktion med *konstante* fremskrivningsparametre lidt nøjere undersøge den indsnævring af usikkerheden for prognosevariablen, som fremkommer gennem den netop omtalte administration af prognosefunktioner med *tidsafhængige* fremskrivningsparametre. Ved den første art af prognosefunktioner blev usikkerheden indsnævret gennem den fortsatte ajourføring og fornyede parameterberegning, således at man efter hver tidsperiode indlagde en korrekt udgangsbestand og forbedrede skønnet over fremskrivningsparameteren. Administrationen af den anden art af prognosefunktioner er i princippet ganske den samme, nemlig en stadig indførelse af en korrekt udgangsbestand (ajourføringsgevinsten) og en fornyet fastlæggelse af fremskrivningsparametrene (parametergevinsten), hvorfor nedbringelsen af usikkerheden også i dette tilfælde foregår gennem bidrag fra disse to administrationsprocedurer.

Medens ajourføringsgevinsten er af samme art ved begge slags prognosefunktioner, men af forskellig størrelse, fordi gevinsten ved prognosefunktioner med *tidsafhængige* parametre består af både den stokastiske og den strukturelle afvigelse i den sidste tidsperiode, gælder det samme ikke ændringen af skønnet over fremskrivningsparametrene.

Ved den første art af prognosefunktioner tjener det nye skøn gennem inddragelsen af en ekstra observation (nemlig tilvæksten i den sidste periode) til at nedsætte usikkerheden på fremskrivningsparameteren. I det andet tilfælde tjener inddragelsen af den sidste observation til at underkaste de tidligere parameterskøn en prøvelse og kan give anledning til et nyt skøn, som kun er baseret på denne observation. Gevinstens opståen har i dette tilfælde som forudsætning den førømtalte samfundsmæssige »inerti«.

Lad os til slut ved hjælp af en terning skabe en eksperimentel situation, som kan illustrere prognoseproblemet og den hermed forbundne administrationsprocedure. Vi kan tænke os, at opgaven er at give et skøn over summen af terningens øjeantal efter et vist antal kast, idet hvert kast opfattes som en tidsperiode.

Hvis terningens fysiske egenskaber ikke ændrer sig under kastene, kan vi anvende en prognosefunktion med konstante fremskrivningsparametre, idet vi her ganske nøje til ethvert fremtidigt kast (tidspunkt) kan angive et interval, som vil omfatte prognosevariablen med en given sandsynlighed, et interval, som stadig kan indsnævres, gennem ajourføring og forbedret parameterskøn, efterhånden som der foreligger flere observationer.

Hvis derimod terningens struktur (og dermed *fordelingsfunktion*) ændres på

en måde, som ikke kan forudberegnes, men dog foregår således, at ændringen forløber jævnt og uden spring, vil vi her have et procesforløb, som genfindes indenfor mange samfundsområder og kan dermed tjene som en eksperimentel illustration til en prognosefunktion med tidsafhængige fremskrivningsparametre. I denne situation kan vi ikke med rimelig sikkerhed angive et interval, hvori prognosevariablen med given sandsynlighed vil falde, hvis vi skal ret mange kast frem. Når vi ønsker så lille en usikkerhed som muligt, vil den bedste strategi være en ajourføring efter hvert kastresultat af den opnåede sum af øjenantallet og et revideret skøn over terningens struktur på basis af de seneste resultater.

Af det foregående skulle det fremgå, at en første betingelse for at indføre en prognosefunktion, som bygger på selve prognosevariablen, er, at denne prognosevariabel i sin udvikling er underkastet en vis »inerti«. Hvis dette skal være tilfældet, må forudsætningen være, at udviklingen determineres af et større antal faktorer, hvis samvirke foregår på en sådan måde, at »forsøgsbaggrunden« har en vis lighed med den, vi finder f.eks. i forbindelse med terning- og møntkast, selv om det må være klart, at vi her stiller langt færre krav i henseende til stabilitet.

Hvis derimod udviklingen er stærkt determineret af en enkelt eller få eksterne faktorer (d.v.s. faktorer, hvis værdier virksomheden ikke kan øve nogen indflydelse på), som undergår voldsomme ændringer fra periode til periode, vil den førnævnte »inerti« forsvinde og dermed grundlaget for at anvende selve prognosevariablen. Når dette er tilfældet, må der foretages en analyse af den bagvedliggende proces, og på dette grundlag fremstilles en prognosefunktion, hvori den eller de dominerende eksterne faktorer indgår eksplicit. Det vil nemlig ofte være således, at en stærkt determinerende faktor, som undergår voldsomme ændringer, er ret enkel at fremskaffe information om indenfor de nærmeste perioder, fordi den fremkommer på basis af beslutninger, som er koncentreret på få hænder, hvilket netop er årsagen til den voldsomme fluktuation.

En anden betingelse for at anvende en given prognosefunktion i forbindelse med selve prognosevariablen er, at denne funktion ikke i sit forløb strider mod ens øvrige viden om procesforløbet.

Det skal nu vises, at ingen af disse to betingelser er opfyldt for abonnentprognosernes vedkommende. For at vise dette, vil det være nødvendigt ganske summarisk at skitsere procesforløbet i forbindelse med telefonens udbredelse.

I et vilkårligt centralområde C_j kan såvel de aktuelle som de potentielle abonnenter deles i bolig- og forretningsabonnenter. Tilgangen af boligabonnenter fremkommer gennem forøget udbredelse af telefonen i eksisterende og

kommende lejligheder som følge af den stadige stigning i levestandarden. Også forretningsabonnenternes antal er en funktion af husstandstallet, således at abonnenttilvæksten først og fremmest er determineret af en lejligheds- og en indkomstfaktor. Rent bortset fra den uregelmæssige stigningstakt i levestandarden vil det være klart, at tilvæksten af lejligheder i et centralområde er underkastet stærke svingninger, fordi denne bestemmes af de byggeprojekter, som etableres og færdiggøres i de enkelte tidsperioder.

En prognosevariabel, som er determineret af to så fluktuerende faktorer, vil kun i ringe grad være underkastet nogen form for »inerti«, hvorfor den første forudsætning for at anvende selve prognosevariablen brister.

Følger man endvidere telefonens udbredelse inden for lejligheder ved at undersøge forholdet mellem boligabonnenter og lejligheder (boligtelefon-tætheden), er der en klar tendens til, at dette forhold går imod højst 1. Dette har kunnet konstateres i særlig velhavende kvarterer, hvor telefonens udbredelse er meget stor. I sådanne områder kan man endvidere konstatere, at når boligtelefon-tætheden når op på mellem 0,8 og 0,9, indtræder der på nærmeste stagnation. Dette betyder, at i boligmæssigt udbyggede centralområder (dette vil jo før eller senere gælde ethvert centralområde) vil der på et vist tidspunkt indtræde et maximum for antallet af abonnenter, fordi der kun installeres 1 telefon pr. lejlighed. Dette forhold bekræftes også af indhentede erfaringer fra U.S.A., hvor man med hensyn til telefonens udbredelse ligger et spand af år foran Danmark.

Af denne grund er såvel den lineære som den eksponentielle funktion uegnet som prognosefunktioner for selve prognosevariablen, fordi A_t ikke har noget maximum, så meget mere som maximumsværdien for A_t i et vilkårligt centralområde har stor betydning for visse investeringsbeslutninger (centralbygning og grund). Endvidere tager ingen af disse funktioner hensyn til stagnationstendenserne i fuldt udbyggede centralområder med høj boligtelefon-tæthed.

Den logistiske funktion har et maximum, idet A_t går imod a for $t \rightarrow \infty$. Men som det fremgik af afsnit B, 3, fastlægges denne værdi på grundlag af tre historiske værdier. Det er klart, at man ikke kan aflede et abonnentmaximum på basis af fortiden, når dette maximum ganske enkelt er bestemt af det antal lejligheder, som kan rummes i det pågældende centralområde. Dette maximum er naturligvis uden forbindelse med abonnentbestanden til tre historiske tidspunkter med lige stor tidsafstand.

I det følgende afsnit skal omtales en simpel prognosemodel, som i højere grad end de her omtalte står i sammenhæng med abonnentudviklingsprocessen, og som derfor vil give mulighed for sikrere skøn til brug ved investeringsbeslutninger.

D. En model for abonnentprognoser.

Som tidligere omtalt er det af interesse at dele abonnenterne i ethvert centralområde i forretnings- og boligabonnenter, en sondring som er nogenlunde gennemførlig i praksis, selv om der forekommer tilfælde, hvor et abonnement både tjener forretnings- og boligformål. Disse sidste tilfælde er dog af ringe betydning.

Mellem disse to former for abonnement gør der sig afgørende forskelle gældende. Medens telefonen for en virksomhed indgår som en uundværlig bestanddel, og således etableres samtidig med selve forretningsvirksomheden, gælder dette ikke boligtelefonen, der gradvis vinder indpas i den til enhver tid eksisterende boligmasse. Dette betyder, at tilgangen af forretningstelefoner kun vil fremkomme i takt med erhvervslivets ekspansion gennem tilgang og udvidelse af bestående virksomheder.

Da enhver erhvervsmæssig aktivitet kræver et vist befolkningsgrundlag med hensyn til kundekreds og/eller arbejdskraft og dermed en bestemt boligmasse, og da en udvidelse af bestående og oprettelse af nye virksomheder i almindelighed vil ske på basis af eller føre til en udvidelse af dette befolkningsgrundlag, er det ikke overraskende, at forholdet mellem forretningsabonnenter og husstande udviser et ret konstant forhold, selv mellem centralområder af ret forskellig størrelse og med ret forskellig beliggenhed. Ved at inddele de forskellige centralområder i et begrænset antal grupper, vil man inden for hver af disse grupper kunne anvende samme tal for forholdet mellem forretningsabonnenter og husstande.

Man vil da på grund af sammenhængen mellem erhvervslivets og befolkningsgrundlagets ekspansion kunne prognosticere antallet af forretningsabonnenter ved fra områdegruppe til områdegruppe at anvende det historiske tal for forholdet mellem forretningsabonnenter og husstande på de fremtidige husstandstal¹.

Denne fremgangsmåde er naturligvis ikke holdbar, hvis der begynder at foregå en ændring af telefonbehovet inden for virksomhederne, som skyldes ændrede telefonvaner, f.eks. ved at virksomhederne i højere grad end tidligere foretager bestillinger pr. telefon, eller fordi kunderne i højere grad end tidligere afgiver telefonbestilling og dermed øger virksomhedens behov for telefoner.

Netop derfor er det også en nødvendig bestanddel af hele prognosearbejdet, at man bestandig gennem analyser undersøger og kontrollerer de forudsætninger, som ligger til grund for prognosen for at konstatere, om et gennem længere tid konstant forhold er ved at ændre sig.

Når det skal vurderes, hvor mange ressourcer, der bør sættes ind på at kontrollere netop disse forudsætninger, og i det hele taget hvor differentieret

1. På trods af en forskel mellem husstande og lejligheder bruges de to begreber synonymt.

prognosemodellen skal være for tilgangen af forretningsabonnenter, er det af betydning at vide, at tilgangen af disse kun udgør 15% af den samlede tilgang.

Tyngdepunktet i prognosearbejdet må lægges i forbindelse med skønnet over tilgangen af boligabonnenter. For at skabe en forbindelse mellem det til grundliggende procesforløb og den anvendte model vil det være nødvendigt at knytte boligabonnenterne til husstandstallet. Dette gøres ved at indføre det tidligere omtalte begreb, boligtelefonetæthed, defineret som forholdet mellem boligabonnenter og husstande til et bestemt tidspunkt, idet antallet af boligabonnenter til et givet tidspunkt da vil fremkomme som et produkt af husstandstallet (H_t) og boligtelefonetætheden (y_t).

Tilgangen af boligabonnenter kan da fremkomme gennem en tilvækst af såvel H_t som y_t , hvilket rent faktisk betyder, at tilgangen i et givet område i en given periode fremkommer gennem en forøgelse af y_t i lejlighedsmassen ved periodens begyndelse, samt en udbredelse i de gennem periodens løb tilkomne lejligheder, idet der regnes med samme telefonetæthed i gamle og nye lejligheder. Denne sidste hypotese er realistisk, da de forskellige centralområder i almindelighed dækker områder af forholdsvis ensartet karakter i social og indkomstmæssig henseende, altså netop de to faktorer, som gennem forskellige undersøgelser er udpeget som værende helt afgørende for størrelsen af y_t . Hypotesen om samme værdi af y_t i gamle og nye lejligheder vil naturligvis ikke kunne anvendes i de ret få områder, som fuldstændig ændrer karakter. Dette er f.eks. tilfældet, når et landområde med ret lav indkomst pr. capita bliver omdannet til et eksklusivt boligområde. I dette tilfælde vil y_t udvise en voldsom stigning. Fastlæggelsen af den nye værdi af y_t vil imidlertid let kunne foretages på grundlag af erfaringer fra andre områder af lignende karakter.

Det prognosticerede abonnental i et vilkårligt centralområde C_j til $t = T + n$ vil da bestemmes gennem følgende ligning:

$$(1) A_{T+n} = (H_T + H_{T/T+n}) K_f + (H_T + H_{T/T+n}) (y_T + y_{T/T+n})$$

hvor

H_T : Husstandstallet til $t = T$.

$H_{T/T+n}$: Tilvæksten i husstandstallet fra T til $T + n$.

K_f : Forholdet mellem forretningsabonnenter og husstande.

y_T : Boligtelefonetætheden til $t = T$.

$y_{T/T+n}$: Tilvækst i boligtelefonetætheden fra T til $T + n$.

Det fremgår af denne ligning, at vi for hvert centralområde skal vurdere udviklingen i boligtelefonetæthed og husstandstallet. En konsekvent anvendelse af princippet om, at fluktuerende, eksterne faktorer skal indgå eksplicit i prognosefunktionen, måtte medføre, at der skulle indgå et udtryk for levestandarden. Når dette ikke er tilfældet, hænger det for det første sammen med manglende viden om den nøjagtige sammenhæng mellem stigningen i leve-

standarden og abonnenttilgangen, en sammenhæng som i øvrigt ikke synes særlig stabil. For det andet skyldes det manglende viden om udviklingen i levestandarden i kvantitativ henseende.

I modsætning hertil foreligger der planer for boligbyggeriet, hvor der også synes at være en stabil sammenhæng fra centralområde til centralområde mellem tilvæksten af lejligheder og telefonens udbredelse i en given tidsperiode på grund af den ensartede boligtelefonetæthed i gamle og nye lejligheder.

Dette betyder, at med hensyn til abonnenttilgangen i nytilkomne lejligheder står vi på ret sikker grund, da der her forekommer såvel planer som stabile sammenhænge, medens vi med hensyn til y_t , i hvert fald indtil videre, stort set må bygge på »inertien«.

Som tidligere nævnt kan det tages som et særdeles veldokumenteret faktum, at y_t ikke vil overstige 1, men synes med aftagende hastighed at nærme sig denne grænse, idet den stadig voksende levestandard (som altså forudsættes) bevirker, at der må regnes med stigende værdier af y_t for voksende t . D.v.s., at vi må vælge en funktion, som i hvert fald tilgodeser disse tre egenskaber ved y_t . En sådan funktion er blandt andet den logistiske, som blev omtalt i afsnit B, 3.

Ifølge denne vil boligtelefonetætheden til $t = T + n$ være:

$$y_{T+n} = \frac{1}{1 + c \cdot e^{-bn}}$$

Der findes også andre funktioner, som har disse egenskaber. Men når den logistiske funktion foretrækkes, hænger det sammen med, at den også på anden måde beskriver en udvikling med hensyn til y_t , som ud fra aprioriske overvejelser forekommer rimelig.

Den nævnte funktions udvikling er således beskaffen, at tilvækstintensiteten, d.v.s. $\frac{dy_t}{dt}$ er stadig voksende for $y_t \leq 0,5$, hvorefter $\frac{dy_t}{dt}$ er stadig aftagende. Dette svarer til, at telefonens udbredelse i et givet centralområde i 1. fase vil foregå langsomt, fordi selve fænomenet er nyt og på grund af den ringe fordel, som er forbundet med telefonbesiddelsen, så længe kredsen af aktuelle abonnenter er ringe. Efterhånden vil udbredelsen foregå stærkere, fordi disse to hæmningsfaktorer forsvinder, hvorfor de mere velhavende og potentielt »telefonmindede« husstande vil overgå til telefonabonnenter (2. fase). Når udbredelsen har nået en vis styrke, vil nye hæmmende faktorer sætte ind, fordi telefonen nu skal trænge ind blandt de mindre velhavende og potentielt mindre »telefonmindede« husstande, således at tilvæksten vil aftage i styrke, efterhånden som man nærmer sig en boligtelefonetæthed på 1 (3. fase). Med hensyn til telefonens udvikling befinder vi os i dag i 2. og 3. fase.

Hvorvidt $\frac{dy_t}{dt}$ netop begynder at aftage for $y_t \geq 0,5$, eller hvorvidt udvik-

lingen i det hele taget følger den logistiske kurve under visse nærmere specificerede »stabile forhold« vil aldrig kunne verificeres, fordi de faktorer (realindkomst, takstændringer, leveringsstop), som er bestemmende for y_t 's udvikling, stadig er underkastet ændringer. y_t 's udvikling kan kun opfattes »logistisk«, når vi tid efter anden forudsætter ændringer i parameteren b .

Vi kan derfor konkludere, at brugen af denne funktion ikke kan retfærdiggøres gennem en verifikation på grundlag af historiske data. Den kan kun opfattes som en praktisk og brugbar model, fordi den besidder de forlangte egenskaber (voksende y_t , $y_t = 1$ for $t \rightarrow \infty$ og aftagende $\frac{dy_t}{dt}$ for $t \rightarrow \infty$) og i øvrigt giver en beskrivelse af abonnentudviklingen, som harmonerer med vore apriorisk prægede ræsonnementer.

Ligning (1) vil da få følgende udseende:

$$(2) \quad A_{T+n} = (H_T + H_{T+n}) k_f + (H_T + H_{T+n}) \frac{1}{1 + c \cdot e^{-bn}}.$$

På basis af givne husstandsprognoser, hvis behandling skal tages op på et senere tidspunkt, kan det nødvendige skøn over parametrene i den logistiske funktion udøves på forskellige måder, som dog alle står i nøje sammenhæng med det tidligere udviklede vedrørende »inertien« i forbindelse med samfundsprocesserne.

For given maximumsværdi ($a = 1$) kan parameteren b fastlægges på grundlag af to historiske værdier af y_t (værdien af parameteren c frembyder intet vurderingsproblem, da fastlæggelsen af denne blot har betydning i forbindelse med det nummereringssystem, man ønsker at anvende i forbindelse med den uafhængige variable t).

Når skønnet over b skal foretages, ønsker man principielt at inddrage så mange af de seneste perioder som muligt, for derved at reducere den tilfældige variation mest muligt. Dette betyder, at vi skal tage stilling til, i hvor mange af de seneste tidsperioder væksten har været så ensartet, at disse perioder kan sammenfattes.

I det følgende skal der angives en let håndterlig og dog begrundet regel til at afgøre, hvor mange perioders tilvækst, der bør inddrages i skønnet over parameteren. Dette er så meget vigtigere, som der på dette som på andre prognoseområder har dannet sig en tradition, hvorefter man ganske ukritisk danner et gennemsnit af de sidste tre eller fem års tilvækster for at reducere »usikkerheden« og derved i mangfoldige tilfælde ikke får dannet skøn over noget som helst.

Da stigningen i antallet af abonnenter inden for et givet centralområde foregår ved, at en vis andel af de telefonløse husstande erhverver telefon, kan den andel af disse husstande, som overgår fra potentielle til aktuelle abonnenter i løbet af en given periode, opfattes som en hyppighed, der svinger omkring en given sandsynlighed.

I et centralområde med konstant husstandstal (d.v.s. et fuldt udbygget område) gives et skøn over denne sandsynlighed i periode t_1 ved:

$$\frac{(y_{t_1} - y_{t_1-1}) \cdot H}{\bar{H}_{t_1-1}} = \frac{(y_{t_1} - y_{t_1-1})}{\bar{H}_{t_1-1} \cdot H^{-1}} \approx \theta_{t_1}$$

hvor $y_{t_1} - y_{t_1-1}$ fremkommer på grundlag af den logistiske funktion, og $\bar{H}_{t_1-1}$ betegner antallet af telefonløse husstande til tidspunktet $t_1 - 1$, medens H angiver det samlede antal husstande, som altså er uafhængigt af tiden.

Da den logistiske funktion inden for kortere tidsrum er næsten lineær, vil brøkenes tæller stort set være konstant fra periode til periode.

Nævneren vil i periode t_1 og periode $t_1 + 1$ antage værdierne:

$$\bar{H}_{t_1-1} H^{-1} \text{ og } \bar{H}_{t_1-1} (1 - \theta_{t_1}) H^{-1}.$$

Med de hidtil kendte vækstforhold indenfor telefonien kan man regne med, at θ_{t_1} selv for y_{t_1} omkring 0,5, højst antager værdier på 0,03. Dette betyder, at der indenfor kortere tidsrum kun foregår beskedne ændringer i brøkenes nævner¹.

D.v.s., at for udbyggede centralområder kan vi for uændret b regne med nogenlunde konstant sandsynlighedsintensitet og små ændringer i antallet af telefonløse husstande,

Abonenttilvæksterne kan derfor beskrives ved hjælp af en binomiallov med samme θ og samme middelværdi. Da θ imidlertid er lille, vil poissonloven i dette tilfælde give en udmærket approximation til binomialloven, hvorfor vi på samme måde som tidligere udviklet på side 146, kan nøjes med at betragte selve tilvæksterne (a_t) og undersøge, hvor mange af disse, der kan opfattes som hidrørende fra samme poissonfordeling, idet undersøgelsen da gennemføres for hvert centralområde.

Ovenstående forudsætter et konstant antal boliger i det pågældende område. Imidlertid findes der som nævnt en lang række centralområder, hvor lejlighedsmassen i løbet af ganske kort tid kan forøges ganske væsentligt. Der kan derfor for konstant b -værdi fremkomme voldsomme svingninger i abonenttilvæksten, fordi de nye lejligheder straks får samme boligtelefonæthed som de gamle. Vi kan derfor ikke anvende poissonfordelingen til en umiddelbar sammenligning af de enkelte perioders tilvækster.

Disse vanskeligheder kan man til dels overvinde ved at samle centralområderne i større områder, som hver for sig er karakteriseret af ensartede værdier af y_t og b på grund af ligheder i erhvervs- og indkomstmæssig henseende.

Thi medens boligmassen i et enkelt centralområde som nævnt kan øges stærkt i en enkelt periode, vil boligmassen for større områder kun ændre sig langsomt, da boligproduktionen er ringe i forhold til bestanden. Herved elimi-

1. På grund af de ret ustabile forhold i forbindelse med parameteren b kan man kun forvente at kunne sammenfatte tilvæksten i ganske få af de seneste tidsperioder.

neres i nogen grad husstandstilvækstens forstyrrende indflydelse på vurderingen af en konstant b -værdi.

Hermed er vi kommet til spørgsmålet om prognosticeringen af $H_{T/T+n}$. Mellem skønnet over b og $H_{T/T+n}$ gør der sig en afgørende forskel gældende, når sagen anskues fra telefonselskabernes synsvinkel. Medens skønnet over b må bygges op af telefonselskaberne, såvel begrebs- som vurderingsmæssigt (det sidste gælder i hvert fald så længe, der ikke er planer eller prognoser fra offentlig side m.h.t. levestandardens udvikling), indtager selskaberne en passiv holdning over for vurderingen af $H_{T/T+n}$, idet denne størrelse bestemmes og fastlægges af myndighederne gennem den førte boligpolitik og administrationen af by-, egns- og landsplanlægningen. Når dette er tilfældet, bliver en prognose over $H_{T/T+n}$ meningsløs, da dette blot vil blive en prognose over myndighedernes planer. Naturligvis kan der være områder, som ikke kontrolleres af myndighederne, hvorfor man kan blive tvunget til at opstille skøn baseret på den historiske udvikling, eller myndighedernes manglende planer kan tvinge en til at lægge sig fast på en bestemt mulighed. Men alt dette tjener principielt set kun til at udfylde mangler i myndighedernes viden, mangler, som må formodes at blive mindre, efterhånden som hele by-, egns- og landsplanlægningsarbejdet kommer ind i fastere rammer.

Opgaven for telefonselskaberne bliver da at udbygge et stadigt snævrere og snævrere samarbejde med myndighederne for hele tiden at sikre sig, at deres egne planer harmonerer med det offentliges planer og således kun foretage egne husstandsprognoser i det omfang, der ikke foreligger planer fra myndighedernes side.

Til slut skal der gives en omtale af abonnentprognosens administration, et spørgsmål som er af vital betydning for de resultater, der kan opnås ved hjælp af prognosen, hvorfor man kan undre sig over, at spørgsmålet ofres så lidt opmærksomhed. Da selve administrationen af prognosen, foruden af prognosemodellen, afhænger af dens anvendelse i forbindelse med investeringsbeslutningerne, vil det være nødvendigt at give et kort rids af telefonselskabernes investeringer på centralområdet.

I tabel 1 er i forspalten angivet de forskellige centralområder, medens tabelens indhold viser de investeringer, som i hver af tidsperioderne fra og med $T + 1$ skal foretages i disse områder for hele tiden at kunne realisere enhver ønsket overgang fra potentiel til aktuel abonnent, samtidig med at investeringens størrelse og tidsmæssige placering er vist som en funktion af udviklingen i abonnentmassen (A) i det pågældende område. Naturligvis vil værdien af I være nul for et stort antal kombinationer af m og n , hvilket betyder, at der ikke skal foretages nogen investering i det pågældende år. (Tabel 1).

Sammenhængen mellem abonnentprognosen og investeringerne i de enkelte tidsperioder i forbindelse med centralernes udvidelse er vist i fig. 1 i afsnit A.

Tabel 1

område \ t	T + 1	T + 2
C_1	$I_{1, T+1} (A_{1, T+1}; n_E \leq r \leq \infty)$	$I_{1, T+2} (A_{1, T+2}; n_E \leq r \leq \infty) \dots$
C_2	$I_{2, T+1} (A_{2, T+1}; n_E \leq r \leq \infty)$	$I_{2, T+2} (A_{2, T+2}; n_E \leq r \leq \infty) \dots$
C_m	$I_{m, T+1} (A_{m, T+1}; n_E \leq r \leq \infty)$	$I_{m, T+2} (A_{m, T+2}; n_E \leq r \leq \infty) \dots$
område \ t	-----	... T + n ...
C_1	-----	$I_{1, T+n} (A_{1, T+n}; n_E \leq r \leq \infty) \dots$
C_2	-----	$I_{2, T+n} (A_{2, T+n}; n_E \leq r \leq \infty) \dots$
C_m	-----	$I_{m, T+n} (A_{m, T+n}; n_E \leq r \leq \infty) \dots$

De investeringsbeslutninger, som skal foretages, kan deles i tre grupper.

Den første gruppe refererer sig til investeringens *tidsmæssige* placering, den anden til investeringens *størrelse* m.h.t. centraludstyr, medens den tredje omfatter dimensionering af grund- og bygningsstørrelse, når den gamle centralbygning ikke længere har tilstrækkelig kapacitet.

Den tidsmæssige placering af investeringen er bestemt af A_{T+n_E} . Disse beslutninger sker altså på grundlag af prognosevariablens størrelse n_E -tidsperioder fremme, altså i begyndelsen af prognosetidsrummet. Her vil usikkerheden være mindst på grund af inertien i forbindelse med parameteren b , og fordi $H_{T/T+n_E}$ også er behæftet med mindst usikkerhed, da vi i almindelighed har mulighed for information om de byggeplaner, som ligger inden for den nærmeste fremtid. Dette betyder, at risikoen for større fejlinvesteringer i dette tilfælde er begrænset. Denne risiko kan dog kun holdes på et lavt niveau i de følgende perioder ved, at man stadig efter afslutningen af hver tidsperiode fornyer udgangsbestanden og ajourfører skønnet over b og husstandstilvæksten.

Den anden gruppe af investeringsbeslutninger har som nævnt med fastlæggelsen af udbygningsenhedens størrelse at gøre. Som det blev nævnt i afsnit A, er denne bestemt af prognosevariablens størrelse mellem $t = T + n_E$ og $t \rightarrow \infty$, d.v.s. en periode, hvor prognoseusikkerheden er overordentlig stor, og hvor vi ikke har mulighed for at formindske den gennem stadige ajourføringsprocedurer. Selv om der her er tale om en meget stor usikkerhed, be-

høver dette dog ikke at øge risikoen for fejlinvesteringer væsentligt, da det er blevet påvist, at den optimale udbygningsstørrelse er ret ufølsom selv over for meget væsentlige ændringer i vækstforholdene¹.

Vedrørende spørgsmålet om investeringen i bygning og grund gælder, at man her ønsker at dimensionere således, at der bliver plads til centralområdets maximale abonnenttal, d.v.s. A_t for $t \rightarrow \infty$. Herved glider b ud af billedet og A_t bestemmes af det maximale husstandstal i området. I dette tilfælde bevirker det lange tidsrum, at sikkerheden på prognosevariablen bliver ret stor, da det maximale husstandstal kan angives på basis af myndighedernes planer m.h.t. områdets udbygning. Også her kræves et stadig intimt samarbejde med myndighederne for at holde usikkerheden nede.

Vi kan derfor konkludere, at usikkerheden på prognosevariablen til de tidspunkter, hvor denne giver anledning til igangsættelse af investeringer, reduceres mest muligt ved efter udløbet af hver tidsperiode at indføre de faktisk optalte abonnenttal og gennem stadig ajourførte skøn over parameteren b på basis af de sidste observationer, samtidig med at man hele tiden holder sig i kontakt med de offentlige myndigheder af hensyn til skønnet over H_t .

Men ved siden heraf er det af afgørende betydning at kontrollere modellens forudsætninger og søge efter nye stabile sammenhænge gennem et fortløbende analysearbejde.

Til slut skal der gøres opmærksom på et forhold m.h.t. risikoen for fejlinvesteringer, som er knyttet til visse af de områder, hvor der er tale om en stadig vækst. Medens der på andre områder ved etablering af en given investering opstår et spørgsmål om, hvorvidt investeringen overhovedet nogensinde bør etableres, gælder dette f. eks. ikke telefonselskaberne.

Thi den kendsgerning, at vi kan forudsætte en stadig voksende abonnentbestand i et givet centralområde og beregne det maximale abonnenttal, betyder, at vi kan tænke på abonnentudviklingen som et stadig voksende, uregelmæssigt forløb, som foregår mellem det aktuelle antal abonnenter og en given maximumsgrænse, idet denne udvikling sker i løbet af et kortere eller længere tidsrum. Dette betyder, at vi med sikkerhed ved, hvor store investeringer, der skal præsteres i området. Vor uvidenhed indskrænker sig blot til tidspunktet for disse investeringers placering. Dette betyder, at vore tab på grund af investeringsfejl ikke skyldes en fejlagtig investering som sådan (d.v.s. en investering, som aldrig burde være foretaget), men derimod et tab, som skyldes enten for tidlig investering (rentetab) eller for sen investering (tabte abonnentindtægter, fordi overgangen fra potentiel til aktuel abonnent ikke er mulig).

Det vil heraf fremgå, at det må være en vigtig opgave for telefonselskaberne at vurdere størrelsen af tabet resp. gevinsten ved at komme for sent eller for tidligt med de enkelte investeringer.

1. Se Yngve Rapp.