NOGLE BEMÆRKNINGER TIL H. ULDALL-HANSENS DISPUTATS »TID OG RENTE«

Af W. SIMONSEN*

Den 15. Oktober 1959 forsvarede cand. polit. H. Uldall-Hansen sin for Erhvervelse af den statsvidenskabelige Doktorgrad skrevne Afhandling »Tid og Rente«. Som første officielle Opponent er jeg af Tidsskriftets Redaktion blevet opfordret til i Overensstemmelse med gældende Tradition at knytte nogle Bemærkninger til det under selve Forsvarshandlingen fremførte. Det er med en vis Betænkelighed, at jeg har fulgt denne Opfordring, idet mit principielle Synspunkt er, at Forsvarshandlingen maa være det centrale og i det Omfang, den tilmaalte Tid tillader, omfatte alt, hvad der er væsentligt i Oppositionen. Paa den anden Side maa det erkendes, at en dyberegaaende Behandling af visse Enkeltheder, særlig naar de gør Brug af matematiske Hjælpemidler nødvendig, tidsmæssigt kan overskride Handlingens Rammer, og da den citerede Afhandling rummer Enkeltheder af særdeles interessant Art, skal jeg i det følgende nærmere uddybe nogle af disse.

Mine Bemærkninger, der saaledes kun har Karakter af et Supplement til det under Oppositionen allerede fremførte og ikke tilsigter Gentagelser, maa jeg efter Sagens Natur begrænse til Punkter i Afhandlingen, som vedrører Rentesregningen i egentlig Forstand, og Bedømmelsen af de økonomiske Afsnit i Arbejdet maa selvfølgelig overlades til de paa dette Omraade sagkyndige. I et vist Omfang har jeg endvidere fraveget Forfatterens Betegnelsessystem, enten for at benytte velkendte Betegnelser inden for Rentesregningen eller for i en konkret Sammenhæng at undgaa supplerende Indices o.l., som det i en saadan Forbindelse er af mindre Betydning at fremhæve.

(i) Forfatteren kommenterer p. 34, L.2–13 f.o., de mulige Former for Diskonteringsfaktoren $d_{\overline{t}|}$, men er tilsyneladende ikke opmærksom paa det for Rentesregningen fundamentale multiplikative Princip, som finder sit Udtryk ved Fordringen

$$d_{\overline{s+t}|} = d_{\overline{s}|}\, d_{\overline{t}|}\,, \tag{1}$$

* Professor ved Københavns Universitet.

NOGLE BEMÆRKNINGER TIL H. ULDALL-HANSENS DISPUTATS »TID OG RENTE«

Af W. SIMONSEN*

Den 15. Oktober 1959 forsvarede cand. polit. H. Uldall-Hansen sin for Erhvervelse af den statsvidenskabelige Doktorgrad skrevne Afhandling »Tid og Rente«. Som første officielle Opponent er jeg af Tidsskriftets Redaktion blevet opfordret til i Overensstemmelse med gældende Tradition at knytte nogle Bemærkninger til det under selve Forsvarshandlingen fremførte. Det er med en vis Betænkelighed, at jeg har fulgt denne Opfordring, idet mit principielle Synspunkt er, at Forsvarshandlingen maa være det centrale og i det Omfang, den tilmaalte Tid tillader, omfatte alt, hvad der er væsentligt i Oppositionen. Paa den anden Side maa det erkendes, at en dyberegaaende Behandling af visse Enkeltheder, særlig naar de gør Brug af matematiske Hjælpemidler nødvendig, tidsmæssigt kan overskride Handlingens Rammer, og da den citerede Afhandling rummer Enkeltheder af særdeles interessant Art, skal jeg i det følgende nærmere uddybe nogle af disse.

Mine Bemærkninger, der saaledes kun har Karakter af et Supplement til det under Oppositionen allerede fremførte og ikke tilsigter Gentagelser, maa jeg efter Sagens Natur begrænse til Punkter i Afhandlingen, som vedrører Rentesregningen i egentlig Forstand, og Bedømmelsen af de økonomiske Afsnit i Arbejdet maa selvfølgelig overlades til de paa dette Omraade sagkyndige. I et vist Omfang har jeg endvidere fraveget Forfatterens Betegnelsessystem, enten for at benytte velkendte Betegnelser inden for Rentesregningen eller for i en konkret Sammenhæng at undgaa supplerende Indices o.l., som det i en saadan Forbindelse er af mindre Betydning at fremhæve.

(i) Forfatteren kommenterer p. 34, L.2–13 f.o., de mulige Former for Diskonteringsfaktoren $d_{\overline{t|}}$, men er tilsyneladende ikke opmærksom paa det for Rentesregningen fundamentale multiplikative Princip, som finder sit Udtryk ved Fordringen

$$d_{\overline{s+t|}} = d_{\overline{s|}}\, d_{\overline{t|}}\,, \tag{1}$$

* Professor ved Københavns Universitet.

hvor s og t opfattes som kontinuert varierende Perioder. Fordringen (1) giver Udtryk for, at Diskonteringen, opfattet som en kontinuert forløbende Proces, skal give uforandret Resultat ved en Spaltning af Totalperioden $s+t$ i Partialperioder, henholdsvis s og t, og medfører (under Forudsætning af Kontinuitet af $d_{\overline{t|}}$ og under Hensyn til $d_{\overline{0|}} = 1$) som eneste mulig Form for Diskonteringsfaktoren

$$d_{\overline{t|}} = (1+i)^{-t} = e^{-\delta t}\,, \tag{2}$$

hvor i er (helaarlig) Rentefod og δ $(= \mathrm{Log}(1+i))$ den tilsvarende Renteintensitet.

(ii) I Afsnit 2.3 (p. 75) indfører Forfatteren det vigtige Begreb *Kurskvotient* som Forholdet mellem »ideelle« Kurser paa et m-aarigt og et n-aarigt Laan af samme Type (hvor $m<n$), idet Kapitaliseringer baseres paa et Sæt af varierende (helaarlige) Rentesatser $i_1, \ldots, i_n$ (»ideelle« Satser, med Forfatterens Terminologi). I Bilag 1 (pp. 217—222) vises det for ensforrentede Serielaan eller Annuitetslaan ved Anvendelse af partiel Differentiation med Hensyn til de respektive »ideelle« Satser, at en isoleret Ændring af een af de »ideelle« Satser medfører en Ændring af Kurskvotienten i samme Retning. Bindes alle »ideelle« Satser saaledes, at de skal være lig en fælles effektiv Sats for de to betragtede Laan, naar man under Benyttelse af sammensat Differentiation til et korresponderende Resultat, som af Forfatteren er formuleret i den vigtige Sætning 2.3–02 (p. 75).

Dette Resultat har udover Anvendelserne i selve det foreliggende Arbejde meget stor Interesse for Rentesregningen i egentlig Forstand, idet det tillader vidtgaaende Generalisationer af betydelig praktisk Værdi.

Til nærmere Belysning heraf betragtes to Laan med *Restvarigheder* henholdsvis m og n, hvor $m \leqq n$; Rækken af resterende Ydelser (pr. Restgæld 100) for de to Laan, der for Simpelheds Skyld antages at forfalde helaarligt, antages at være henholdsvis $\varkappa_t$ og λ_t. Om den mere detaillerede Struktur af Laanene forudsættes indtil videre intet; specielt gøres der ingen Forudsætninger om ensartet Type eller ensartede nominelle Forrentningsforhold. Betegner i den for de to Laan fælles (helaarlige) effektive Rentesats og $v = 1/(1+i)$ den tilsvarende Diskontofaktor, er Kurserne for Laanene henholdsvis

$$K = \sum_{t=1}^{m} \varkappa_t\, v^t \tag{3}$$

og

$$L = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t\, v^t\,. \tag{4}$$

Kurskvotienten Q er da givet ved

$$Q = K/L, \tag{5}$$

saa at $K = LQ$. Ved Differentiation med Hensyn til i faar man under Hensyn til (3) og (4):

$$\frac{dK}{di} = L\frac{dQ}{di} + Q\frac{dL}{di}$$

eller

$$-\sum_{t=1}^{m} t\,\varkappa_t\,v^{t+1} = L\frac{dQ}{di} - Q\sum_{t=1}^{n} t\,\lambda_t\,v^{t+1}.$$

Division med vK giver da

$$\frac{1}{v\,Q}\,\frac{dQ}{di} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t\,\lambda_t\,v^t}{\sum_{t=1}^{n} \lambda_t\,v^t} - \frac{\sum_{t=1}^{m} t\,\alpha_t\,\lambda_t\,v^t}{\sum_{t=1}^{m} \alpha_t\lambda_t\,v^t}, \tag{6}$$

hvor

$$\alpha_t = \varkappa_t/\lambda_t \qquad (t = 1, \ldots, m). \tag{7}$$

Antages det nu, at α_t er ikke-voksende for $t = 1, \ldots, m$, kan man vise, at $\frac{dQ}{di} \geqq 0$, saa at Forholdet mellem Kurserne K og L er en ikke-aftagende Funktion af den effektive Rentesats i.

Beviset herfor kan føres ved Anvendelse af en Metode analog med den af Forfatteren anvendte. Noget simplere er dog Benyttelse af en inden for Rentesregningen og Forsikringsmatematiken ofte anvendt Ulighed (jfr. f.Eks. J. F. Steffensen: Forsikringsmatematik (1934), pp. 436—437):

$$\frac{\sum_{t=1}^{m} a_t\,b_t\,w_t}{\sum_{t=1}^{m} a_t\,w_t} \leqq \frac{\sum_{t=1}^{n} b_t\,w_t}{\sum_{t=1}^{n} w_t} \qquad (m \leqq n). \tag{8}$$

Denne Ulighed er gyldig, hvis $w_t \geqq 0$ og b_t er ikke-aftagende for $t = 1, \ldots, n$, a_t er ikke-voksende og $\geqq 0$ for $t = 1, \ldots, m$, medens Nævnerne paa hver Side af Uligheden er $\neq 0$. Erstatter man i denne Ulighed w_t med $\lambda_t\,v^t$, b_t med t og a_t med α_t, ser man umiddelbart, at højre Side af (6) under den angivne Forudsætning om α_t er $\geqq 0$.

Det kan bemærkes, at i de Tilfælde, hvor Ydelserne ved de to betragtede Laan kun omfatter Rente af Restgæld samt Afdrag, men ikke Subsidiærydelser i Form af »Kurstillæg« (Agio) eller »Gevinster« (som ved visse Former for Præmielaan), og Laanene er nominelt ensforrentede, reduceres Kurskvotienten til 1, hvis i er lig den fælles nominelle Sats.

For at illustrere Anvendelsen af det generelle Resultat anføres følgende Eksempler, som fremkommer ved passende Specialiseringer.

(I) *Serielaan — Serielaan.*

Man har, idet de nominelle Rentesatser for Laanene er henholdsvis i^I og i^{II}:

$$\frac{1}{100}\varkappa_t = \frac{1}{m} + \left(1 - \frac{t-1}{m}\right) i^I \tag{9}$$

og

$$\frac{1}{100}\lambda_t = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) i^{II} .$$

Her er

$$\frac{m}{n}\alpha_t = \frac{1 + (m+1-t)\, i^I}{1 + (n+1-t)\, i^{II}} ;$$

skriver man Tælleren paa Formen

$$1 + (n+1-t)\, i^{II} - [(n-m)\, i^{II} - (m+1-t)(i^I - i^{II})],$$

finder man

$$\frac{m}{n}\alpha_t = 1 - \frac{(n-m)\, i^{II} - (m+1-t)\,(i^I - i^{II})}{1 + (n+1-t)\, i^{II}} .$$

Antages $i^I \geqq i^{II}$, er dette Forhold ikke-voksende, saa at Kurskvotienten er en ikke-aftagende Funktion af i.

(II) *Annuitetslaan — Annuitetslaan.*

Idet de nominelle Satser atter betegnes ved henholdsvis i^I og i^{II}, har man

$$\frac{1}{100}\varkappa_t = 1/a^{I}_{\overline{m|}}$$

og

$$\frac{1}{100}\lambda_t = 1/a^{II}_{\overline{n|}} . \tag{10}$$

Her er α_t konstant, altsaa ikke-voksende, saa at ogsaa i dette Tilfælde Kurskvotienten er en ikke-aftagende Funktion af i.

(III) *Serielaan — Annuitetslaan.*

Med de respektive nominelle Satser i^I og i^{II} er $\varkappa_t$ givet ved (9) og λ_t ved (10); man ser da umiddelbart, at α_t er ikke-voksende og dermed Kurskvotienten ikke-aftagende som Funktion af i.

(iii) I nær Tilknytning til Begrebet Kurskvotient definerer Forfatteren i

Afsnit 2.4 (p. 75) Begrebet »(m, n)-Efterrenten« som den *fælles* effektive Rentesats, som maatte være gældende for de to betragtede Laan for at opnaa, at deres Kurskvotient blev lig Forholdet mellem de to tilsvarende (»ideelle«) Markedskurser, der taget hver for sig vilde betinge tilsvarende og i Almindelighed forskellige effektive Rentesatser for de to Laan. Forfatteren beviser den vigtige Sætning 2.5–01, som beskriver Efterrentens Placering i Forhold til de to sidst nævnte effektive Rentesatser, og som sammen med ovennævnte Sætning 2.3–02 danner Grundlaget for den kvantitative Del af Undersøgelserne i Afhandlingen. Et supplerende Resultat, som vedrører Efterrenteforholdene for tre ensforrentede Laan af samme Type, er af Forfatteren placeret under Kapitel 4 som Sætning 4.22–01, men havde maaske naturligere fundet sin Plads i Kapitel 2.

I Kapitel 4 giver Forfatteren under Forudsætning af Tilstedeværelsen af den som »kursligevægtig Stabiltilstand« betegnede stationære Markedstilstand en Beskrivelse af den grafiske Fremstilling af Efterrenteforløbet, der betragtes i Sammenhæng med den grafiske Fremstilling af henholdsvis Kurs og tilsvarende effektiv Rente for de mulige Løbetider. Forfatteren betragter herunder — i den Hensigt at illustrere Forholdene uden at være besværet af de Ulemper, som Antagelsen af Løbetider, der ikke er kontinuert fordelt, medfører — det Grænsetilfælde, der repræsenteres ved, at vilkaarlige Løbetider antages mulige. Man føres herved under passende Differentiabilitetsforudsætninger om de paagældende Kurver til en (momentan) Efterrenteintensitet, der spiller en Rolle analog med Efterrentens. Forfatterens Udviklinger p. 122, L. 3—22 f.o., tager Sigte paa Fastlæggelsen af denne Intensitet (der betegnes som »Punktefterrente«). Tilladeligheden af den foretagne Grænseovergang bør imidlertid noget nærmere begrundes, idet det maa paavises, at den ved en fast Løbetid n og en variabel Løbetid $n+h$ $(h > 0)$ bestemte Efterrenteintensitet $\delta = \delta(h)$ for $h \to 0$ som Grænseværdi har en Størrelse δ^*, den momentane Efterrenteintensitet, der eentydigt er bestemt ved Relationen (4.23–03).

Det kan først bemærkes, at Resultaterne vedrørende Kurskvotientens Variation med den effektive Rente med mindre væsentlige Modifikationer kan overføres til kontinuert amortisable Laan, og at dette ogsaa gælder den ovenfor under (ii) betragtede Generalisation, idet der gælder en med (8) analog Ulighed for Integraler i Stedet for Summer.

Idet man som i Afhandlingen indskrænker sig til at betragte nominelt ensforrentede Serielaan eller Annuitetslaan, bestemmes den ovenfor betragtede Intensitet $\delta = \delta(h)$ ved Relationen (4.23–01), som vi med lidt ændrede Betegnelser kan skrive som

$$\frac{C(n+h)}{C(n)} = \frac{K(n+h, \delta)}{K(n, \delta)}, \tag{11}$$

hvor $K(t,\delta)$ betegner Kursen for et Laan af den paagældende Type med Løbetid t under Forudsætning af en effektiv Renteintensitet af Størrelsen δ. At (11) eentydigt bestemmer $\delta(h)$, følger af, at Resultaterne vedrørende Kurskvotientens Variation med den effektive Rente som netop bemærket vedblivende er gyldige og for de to specielle Laantyper yderligere i den skarpere Form, at Kurskvotienten er en *voksende* Funktion af den effektive Renteintensitet.

Relationen (11) kan skrives paa Formen (jfr. (4.23–02)):

$$\frac{1}{C(n)}\;\frac{C(n+h)-C(n)}{h}=\frac{1}{K(n,\delta)}\;\frac{K(n+h,\delta)-K(n,\delta)}{h}\,. \tag{12}$$

For de to betragtede Laantyper kan man vise, at $\delta^* = \lim\limits_{h \succ 0} \delta(h)$ eksisterer og eentydigt bestemmes ved

$$\frac{C'(n)}{C(n)}=\frac{K'_n\,(n,\delta^*)}{K(n,\delta^*)}\,, \tag{13}$$

saafremt $C(t)$ er differentiabel for $t=n$ (jfr. (4.23–03)).

Ved den efterfølgende Behandling betegner δ^I ved begge Typer af Laan den nominelle Renteintensitet.

Serielaan.

Man har

$$\frac{1}{100}\,K(t,\delta)=\frac{\delta^I}{\delta}+\left(1-\frac{\delta^I}{\delta}\right)\frac{\bar a_{\overline{t}|}}{t}\,.$$

Herved faas

$$\frac{1}{K(n,\delta)}\;\frac{K(t,\delta)-K(n,\delta)}{t-n}=\frac{1-\dfrac{\delta^I}{\delta}}{\dfrac{\delta^I}{\delta}+\left(1-\dfrac{\delta^I}{\delta}\right)\dfrac{\bar a_{\overline{n}|}}{n}}\;\frac{\dfrac{\bar a_{\overline{t}|}}{t}-\dfrac{\bar a_{\overline{n}|}}{n}}{t-n}=u, \tag{14}$$

hvor

$$u=\varphi(t,\delta) \tag{15}$$

er en analytisk Funktion af (t,δ) for $t>0$, $\delta>0$; specielt er

$$\varphi(n,\delta)=-\frac{1-\dfrac{\delta^I}{\delta}}{\dfrac{\delta^I}{\delta}+\left(1-\dfrac{\delta^I}{\delta}\right)\dfrac{\bar a_{\overline{n}|}}{n}}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{\bar a_{\overline{n}|}}{n}-v^n\right), \tag{16}$$

idet

$$\frac{\dfrac{\bar a_{\overline{t}|}}{t}-\dfrac{\bar a_{\overline{n}|}}{n}}{t-n}\to\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar a_{\overline{t}|}}{t}\right)\right]_{t=n}=-\frac{1}{n}\left(\frac{\bar a_{\overline{n}|}}{n}-v^n\right).$$

Ifølge Sætningen om Kurskvotienten er $\varphi(t,\delta)$ for et fast $t \neq n$ en aftagende Funktion af δ (da u kan skrives paa Formen $\frac{1}{t-n}\left(\frac{K(t,\delta)}{K(n,\delta)} - \frac{1}{t-n}\right)$. Heraf følger $\varphi'_\delta(t,\delta) \leqq 0$ for $t \neq n$, og da $\varphi'_\delta(t,\delta)$ er analytisk, er ogsaa $\varphi'_\delta(n,\delta) \leqq 0$, saa at $\varphi(n,\delta)$ er ikke-voksende. Endvidere kan $\varphi(n,\delta)$ ikke være konstant i noget Interval (da i saa Fald en Eksponentialfunktion i δ skulde stemme overens med en bruden rational Funktion af δ i et saadant Interval); altsaa er ogsaa $\varphi(n,\delta)$ en aftagende Funktion af δ.

For hvert fast t er følgelig $u = \varphi(t,\delta)$ en aftagende Funktion af δ, og da $\delta\bar{a}_{\overline{t|}} = 1 - v^t \to 1$ og $\delta\bar{a}_{\overline{n|}} = 1 - v^n \to 1$ for $\delta \to \infty$, ser man ved at skrive u paa Formen

$$u = \frac{1 - \frac{\delta^I}{\delta}}{\delta^I + \left(1 - \frac{\delta^I}{\delta}\right)\frac{\delta\bar{a}_{\overline{n|}}}{n}} \frac{\frac{\delta\bar{a}_{\overline{t|}}}{t} - \frac{\delta\bar{a}_{\overline{n|}}}{n}}{t-n},$$

at

$$\varphi(t,\delta) \to \frac{1}{\delta^I + \frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{n}}{t-n} = -\frac{1}{(1+n\delta^I)\,t}$$

for $\delta \to \infty$. For $\delta \to 0$ har man endvidere

$$\frac{\bar{a}_{\overline{n|}}}{n} \sim \frac{1}{n\delta}\left(n\delta - \frac{1}{2}n^2\delta^2\right) = 1 - \frac{1}{2}n\delta$$

og

$$\frac{\bar{a}_{\overline{t|}}}{t} - \frac{\bar{a}_{\overline{n|}}}{n} \sim \frac{1}{2}n\delta - \frac{1}{2}t\delta = \frac{1}{2}(n-t)\delta,$$

saa at

$$\varphi(t,\delta) \sim -\frac{\frac{1}{2}(\delta - \delta^I)}{1 - \frac{1}{2}n(\delta - \delta^I)} \to \frac{\delta^I}{2 + n\delta^I}$$

for $\delta \to 0$.

Heraf ses, at man har

$$\delta = \psi(t,u),$$

hvor $\psi(t,u)$ er en analytisk Funktion af (t,u) i Omraadet

$$t > 0, \quad -\frac{1}{(1+n\delta^I)t} < u < \frac{\delta^I}{2+n\delta^I}.$$

Sammenholdes (12), (14) og (15), ser man da, at

$$\delta(h) = \psi\left(n+h,\ \frac{C(n+h) - C(n)}{h\,C(n)}\right) \qquad (h > 0);$$

eksisterer $C'(n)$, vil følgelig $\delta(h) \to \delta^*$ for $h \to 0$, hvor

$$\delta^* = \psi\left(n,\ \frac{C'(n)}{C\,(n)}\right). \tag{17}$$

Man ser, at (17) eentydigt bestemmer δ^*, og endvidere, at (17) er ensbetydende med

$$\frac{C'(n)}{C\,(n)} = \varphi(n,\,\delta^*)\ ; \tag{18}$$

ved (14) og (15) for $t \to n$ faas da, idet $\delta \to \delta^*$:

$$\frac{C'(n)}{C\,(n)} = \frac{K'_n(n,\delta^*)}{K(n,\delta^*)}\,,$$

hvilket netop er (13).

Man bemærker, at man ved (16) har $\varphi(n,\delta^I) = 0$.

Annuitetslaan.

I dette Tilfælde er

$$\frac{1}{100}\,K(t,\delta) = \frac{\bar{a}_{\overline{t}|}}{\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}}\,,$$

saa at

$$\frac{1}{K(n,\delta)}\,\frac{K(t,\delta) - K(n,\delta)}{t-n} = \frac{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}}\,\frac{\dfrac{\bar{a}_{\overline{t}|}}{\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}} - \dfrac{\bar{a}_{\overline{n}|}}{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}}}{t-n} = u, \tag{19}$$

hvor

$$u = \eta\,(t,\delta)$$

er en analytisk Funktion af (t,δ) for $t>0$, $\delta>0$; man har

$$\eta(n,\delta) = \frac{1}{\bar{s}_{\overline{n}|}} - \frac{1}{\bar{s}^{I}_{\overline{n}|}}\,, \tag{20}$$

da

$$\frac{\dfrac{\bar{a}_{\overline{t}|}}{\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}} - \dfrac{\bar{a}_{\overline{n}|}}{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}}}{t-n} \to \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{a}_{\overline{t}|}}{\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}}\right)\right]_{t=n} = \frac{v^n}{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}} - \frac{\bar{a}_{\overline{n}|}\,v^n_I}{\left(\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}\right)^2}\,.$$

Paa tilsvarende Maade som ved Serielaan ser man da (idet man benytter, at $\eta(n,\delta)$ er en aftagende Funktion af δ, som det direkte ses af (20)), at $u = \eta(t,\delta)$ for hvert fast t er en aftagende Funktion af δ med

$$\eta(t,\delta) \to \bar{a}^{I}_{\overline{n}|} \frac{\dfrac{1}{\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}} - \dfrac{1}{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}}}{t-n}$$

for $\delta \to \infty$, idet (som ovenfor vist) $\delta \bar{a}_{\overline{t}|} \to 1$ og $\delta \bar{a}_{\overline{n}|} \to 1$. Da $\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}$ vokser med t, er denne Grænseværdi < 0.

Endvidere vil

$$\eta(t,\delta) \to \frac{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}}{n} \frac{\dfrac{t}{\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}} - \dfrac{n}{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}}}{t-n}$$

for $\delta \to 0$, da $\bar{a}_{\overline{t}|} \to t$ og $\bar{a}_{\overline{n}|} \to n$. Højre Side er > 0, da $t/\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}$ vokser med t.

Den resterende Del af Ræsonnementet forløber som ved Serielaan, idet man har $\delta = \zeta(t,u)$, hvor $\zeta(t,u)$ er en analytisk Funktion af (t,u) i Omraadet

$$t > 0, \quad \bar{a}^{I}_{\overline{n}|} \left(\frac{1}{\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}} - \frac{1}{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}} \right) \Big/ (t-n) < u < \frac{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}}{n} \left(\frac{t}{\bar{a}^{I}_{\overline{t}|}} - \frac{n}{\bar{a}^{I}_{\overline{n}|}} \right) \Big/ (t-n).$$

Man ser ved (20), at $\eta(n,\delta^{I}) = 0$.