

B O G A N M E L D E L S E R

R. G. D. Allen: Mathematical Economics. Macmillan, London 1956. XVI + 768 s. Pris 63 s.

1. I 1938 gjorde professor R. G. D. Allen vort fag den store tjeneste at udsende *Mathematical Analysis for Economists*, den første egentlige lærebog i matematik skrevet specielt for økonomer. Den er blevet genoptrykt gang på gang og kan for så vidt læses med lige stort udbytte den dag i dag – matematik »forældes« jo ikke – men den er først og fremmest en lærebog i almindelig differentialregning, og den raske udvikling der er sket indenfor den økonomiske videnskab i de forløbne 20 år har i meget høj grad været præget af at man også har taget andre matematiske redskaber i brug. Man behøver kun at nævne sådanne områder som moderne makrodynamik og konjunkturteori, hvor man ikke kommer nogen vegne uden kendskab til differens- og differentialligninger og komplekse tal, eller input-output-analysen og andre lineære modeller, der kræver matrixalgebra for at kunne håndteres.

Der savnedes altså enten en fortsættelse av 1938-bogen eller en ny, stærkt udvidet udgave hvor disse områder var taget med. Professor Allen har sikkert også tidligere syslet med tanken herom; men i stedet har han nu valgt at udsende det foreliggende kæmpeværk på henvend 800 sider, der har til hovedformål at gi en fremstilling av alt det nye der er sket indenfor matematisk økonomi i de sidste 20 år. *Mathematical Economics* er altså ikke, som 1938-bogen, en lærebog i matematik med økonomiske eksempler; den er i hovedsagen en antologisk fremstilling av dele av den økonomiske teori, hvor matematikken kun er et hjælpemiddel. Men i tilgift har vi alligevel også fået det længe ønskede supplement til 1938-bogen, idet 6 av bogens 20 kapitler – kap. 4-6 om komplekse tal, differens- og differentialligninger, og kap. 12-14 om lineær algebra, tilsammen ca. 200 sider – gir en rent matematisk fremstilling av disse emner. De pågældende kapitler, der er anbragt mellem bogens »egentlige« kapitler, burde

vel nok ha været placeret sidst i bogen som et matematisk appendix, eller de kunne – hvad der måske havde været endnu mere naturligt – ha været skilt fra og udsendt som et fortsættelsesbind til *Mathematical Analysis for Economists*. Hovedsagen er imidlertid at vi har fået dem. Alene for disse brillante kapitlers skyld vil Allen's nye bog finde en selvfølgelig plads i enhver økonoms håndbibliotek ved siden av værket fra 1938.

Men størst interesse knytter der sig naturligvis til de økonomiske afsnit, der udgør hovedparten av bogen. Her må det straks slås fast, at bogen ikke er og ikke gir sig ud for at være en lærebog i økonometri; den indeholder intet om anvendelse av statistiske metoder på økonomiske modeller. Det skal imidlertid ikke bebrejdes forf. – matematisk formulering av modellerne er jo en forudsætning for at der overhovedet kan blive tale om statistisk verifikation, og med den hurtige udvikling av økonometrien i de sidste 20 år er der, som det siges i forordet, »some risk that the necessary development of economic theory, formulated in a way which makes econometric sense to the statistician, will lag behind rather seriously«. Der er al mulig grund til at være professor Allen taknemmelig for at han har skrevet netop denne bog, en opgave som han har haft ganske særlige forudsætninger for at kunne løse.

2. Som indledning til en række kapitler om makrodynamik og konjunkturteori gir bogens kap. 1 en udførlig fremstilling av forskellige dynamiske modeller for et enkelt marked, både periodemodeller (med udgangspunkt i den vanlige spindelsvævsmodel) og »kontinuerte« modeller hvor tiden indgår som en kontinuert variabel. Den meget grundige redegørelse der gives for disse modellers opbygning og mekanik er såre nyttig som en generel introduktion til økonomisk dynamik, eftersom de væsentlige træk går igen også i mere komplicerede dynamiske modeller. Ikke mindst interessant er den indgåede behandling av for-

B O G A N M E L D E L S E R

R. G. D. Allen: Mathematical Economics. Macmillan, London 1956. XVI + 768 s. Pris 63 s.

1. I 1938 gjorde professor R. G. D. Allen vort fag den store tjeneste at udsende *Mathematical Analysis for Economists*, den første egentlige lærebog i matematik skrevet specielt for økonomer. Den er blevet genoptrykt gang på gang og kan for så vidt læses med lige stort udbytte den dag i dag – matematik »forældes« jo ikke – men den er først og fremmest en lærebog i almindelig differentialregning, og den raske udvikling der er sket indenfor den økonomiske videnskab i de forløbne 20 år har i meget høj grad været præget af at man også har taget andre matematiske redskaber i brug. Man behøver kun at nævne sådanne områder som moderne makrodynamik og konjunkturteori, hvor man ikke kommer nogen vegne uden kendskab til differens- og differentialligninger og komplekse tal, eller input-output-analysen og andre lineære modeller, der kræver matrixalgebra for at kunne håndteres.

Der savnedes altså enten en fortsættelse av 1938-bogen eller en ny, stærkt udvidet udgave hvor disse områder var taget med. Professor Allen har sikkert også tidligere syslet med tanken herom; men i stedet har han nu valgt at udsende det foreliggende kæmpeværk på henvend 800 sider, der har til hovedformål at gi en fremstilling av alt det nye der er sket indenfor matematisk økonomi i de sidste 20 år. *Mathematical Economics* er altså ikke, som 1938-bogen, en lærebog i matematik med økonomiske eksempler; den er i hovedsagen en antologisk fremstilling av dele av den økonomiske teori, hvor matematikken kun er et hjælpemiddel. Men i tilgift har vi alligevel også fået det længe ønskede supplement til 1938-bogen, idet 6 av bogens 20 kapitler – kap. 4-6 om komplekse tal, differens- og differentialligninger, og kap. 12-14 om lineær algebra, tilsammen ca. 200 sider – gir en rent matematisk fremstilling av disse emner. De pågældende kapitler, der er anbragt mellem bogens »egentlige« kapitler, burde

vel nok ha været placeret sidst i bogen som et matematisk appendix, eller de kunne – hvad der måske havde været endnu mere naturligt – ha været skilt fra og udsendt som et fortsættelsesbind til *Mathematical Analysis for Economists*. Hovedsagen er imidlertid at vi har fået dem. Alene for disse brillante kapitlers skyld vil Allen's nye bog finde en selvfølgelig plads i enhver økonoms håndbibliotek ved siden av værket fra 1938.

Men størst interesse knytter der sig naturligvis til de økonomiske afsnit, der udgør hovedparten av bogen. Her må det straks slås fast, at bogen ikke er og ikke gir sig ud for at være en lærebog i økonometri; den indeholder intet om anvendelse av statistiske metoder på økonomiske modeller. Det skal imidlertid ikke bebrejdes forf. – matematisk formulering av modellerne er jo en forudsætning for at der overhovedet kan blive tale om statistisk verifikation, og med den hurtige udvikling av økonometrien i de sidste 20 år er der, som det siges i forordet, »some risk that the necessary development of economic theory, formulated in a way which makes econometric sense to the statistician, will lag behind rather seriously«. Der er al mulig grund til at være professor Allen taknemmelig for at han har skrevet netop denne bog, en opgave som han har haft ganske særlige forudsætninger for at kunne løse.

2. Som indledning til en række kapitler om makrodynamik og konjunkturteori gir bogens kap. 1 en udførlig fremstilling av forskellige dynamiske modeller for et enkelt marked, både periodemodeller (med udgangspunkt i den vanlige spindelsvævsmodel) og »kontinuerte« modeller hvor tiden indgår som en kontinuert variabel. Den meget grundige redegørelse der gives for disse modellers opbygning og mekanik er såre nyttig som en generel introduktion til økonomisk dynamik, eftersom de væsentlige træk går igen også i mere komplicerede dynamiske modeller. Ikke mindst interessant er den indgåede behandling av for-

holdet mellem *ex ante* og *ex post* variable i forløbsmodeller. Det forekommer dog som om forf. trækker et unødigt principielt skel mellem på den ene side modeller av spindelvævstypen, hvor den drivende kraft er en diskrepans mellem forventet og realiseret pris, og på den anden side lagermodeller hvor det er utilsigtede lagerforandringer der sætter et forløb i gang. Allen beskriver disse to tilfælde som en »ligevægts-« ctr. en »uligevægtsmodel«, med den begrundelse at sælgerne i det første tilfælde gætter rigtigt og sætter den pris der sikrer afsætning av hele udbudet, medens de i lagermodellen kan gætte forkert m.h.t. hvilken pris der gir ligevægt i denne forstand. Det forekommer mere relevant at sige, at sælgerens handlingsparameter i spindelsvævsmodellen er mængden, medens de i den anden model bruger prisen som handlingsparameter og følgelig ikke kan være sikre på at få afsat hele produktionen i perioden; de to modeltyper er forsåvidt symmetriske m.h.t. mængde og pris. (Jfr. her Marshall's ctr. Walras' stabilitetsbetingelser, der er behandlet i et senere afsnit). Det ville iøvrigt ha været nyttigt om forf. havde gjort lidt mere ud av de institutionelle faktorer (markedstyper m.v.) der ligger bag de forskellige modeller der er behandlet; fremstillingen er nok en kende for formalistisk. – Kapitlet slutter med et afsnit om forskellige typer av *lags* i dynamiske modeller. Desværre er dette afsnit lovlig koncentreret; det ville f.eks. ha lettet læserens intuition om et kontinuert exponentielt lag og en simpel efterslæbning (den vanlige type time lag i enkle dynamiske modeller) havde været fremstillet som modsatte grænsetilfælde av et geometrisk fordelt lag. Man må håbe at dette vigtige afsnit blir omarbejdet i en eventuel ny udgave.

Kap. 2 gir en fremstilling av multiplieren og av forholdet mellem Keynes og klassikerne; både statiske og dynamiske modeller er gennemgået. Det følgende kapitel behandler accelerationseffekten og i forbindelse hermed Harrod-Domar's vækstmodel og multiplifier-accelerator-modellerne. Fremstillingen er klar og instruktiv, men nogle detaljer kan selvfølgelig altid kritiseres.

Når det f.eks. siges p. 33 at indkomsten ikke kan være nogen planlagt størrelse men altid er en forventningsparameter, havde det været nærliggende at tilføje at *produktions* størrelse i hvert fald kan være genstand for planlægning og i visse modeller optræder som handlingsparameter; i denne forbindelse undrer man sig oså over, at den model som angives at være den dynamiske udgave av den simple multiplifiermodel (pp. 48 f.) forudsætter at investeringsplaner og ikke produktionsplaner blir realiseret – hvordan er dette muligt når investering *ex post* er defineret som inkluderede lagerforandringer?

Man kan også kritisere at forfatteren uden videre identificerer konstantleddet i konsumtionsfunktionen med den autonome (ikke av indkomsten inducerede) komponent i forbruget. Side 62 ville det ha været nyttigt om accelerationsformlen var blevet udledt explicit av den tilgrundliggende relation mellem produktion og kapitalbestand; og hvorfor er Frisch's vigtige artikel i *Journal of Political Economy* 1931 ikke med blandt litteraturhenvisningerne? Side 68 f. undrer man sig lidt over at Harrod-Domar-modellen betegnes som »not really dynamic at all«, med den begrundelse at den ikke har nogen lags. Endelig ville det nok ha lettet forståelsen av nogle av de gennemgående periodemodeller, om deres struktur havde været illustreret ved de kendte pileskemaer à la Tinbergen.

Kapitlerne 4-6 gir en fremstilling av komplekse tal og deres anvendelse i svingningsteorien, og av lineære differential- og differensligninger. Disse kapitler er aldeles blændende skrevet; det kan slet ikke gøres bedre. Kun synes det som om analogien mellem vektorer og komplekse tal er drevet lidt for vidt; den definition der indføres på multiplikation av komplekse tal svarer ikke til nogen av de to kendte regler for vektormultiplikation (det indre produkt og det vektorielle produkt), og det er derfor en smule vildledende når det siges (p. 98) om de indførte regneregler at »when expressed in terms of vectors they are at least intelligible to those familiar with simple applied mathematics (e.g. mechanics)«.

Side 117 optræder der også to forskellige definitioner av perioden og fasen i svingninger.

I de følgende kapitler blir tråden fra kap. 3 taget op igen med en række konjunkturmodeller, med udgangspunkt i den simple multiplifier-accelerator model, og i kap. 9 behandles den åbenbart meget frugtbare analogi mellem økonomiske modeller og elektriske kredsløbsmodeller, baseret bl.a. på Tustin's bog fra 1953. En række av de tidligere gennemgåede dynamiske makromodeller av multiplifier-accelerator typen blir stillet op i dette skema. Det interessante her er at analogien i et vist omfang kan udstrækkes til de metoder hvorved systemet holdes under kontrol (f.eks. dæmpning av svingningerne); dette åbner muligheder for analog anvendelse av servoteknikkens principper og metoder til økonomisk stabiliseringspolitik.

Herefter, i kap. 10, kommer Allen ind på totale ligevægtsmodeller à la Walras. Stabilitetsproblemet omtales, og især spørgsmålet om produktionsfunktionernes form får en grundig behandling hvor den lineære produktionsmodels fordele og ulemper diskuteres. Dette fører lige ind i input-output modellerne (kap. 11). Den matematik der er nødvendig til at tumle sådanne lineære modeller er fremstillet i kap. 12-14 (om vektor- og matrixalgebra), hvortil knytter sig et kapitel om spilteori og et om teorien for lineær programmering. Desværre er dette sidstnævnte kapitel (16) næppe helt vellykket ud fra et pædagogisk synspunkt, en fejl som det deler med de fleste andre fremstillinger av lineær programmering. Den fundamentale sætning som det hele er baseret på kan udledes ved ganske simple hjælpemidler (som vist f.eks. av David Gale i Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi 1954); for en matematiker er det vel naturligt at ta udgangspunkt i teorien for konvekse sæt, men når man skriver for økonomer, er det nok lidt av en omvej. Den ubefæstede læser kommer let til at fare vild i konvekse polyedre, løsningsrum og andre mærkelige begreber. Erfaringsmæssigt er der også betydelige pædagogiske fordele forbundet med at forklare simplex-

tavlerne som slet og ret en kondenseret måde at skrive de lineære ligninger på, i stedet for at sige at de udtrykker koefficientmatricen som en lineær funktion av basisvektorerne. Det hele er jo i virkeligheden meget enklere end man får indtryk av ved at læse prof. Allen's fremstilling; i modsætning til hvad der siges p, 549, er der ikke noget som helst kompliceret ved simplex-metoden. Selv dualitetssætningen er meget let at bevise ved hjælp av simpel matrixalgebra, uden at man behøver ta spilteorien til hjælp som forf. gør.

Derimod er de økonomiske anvendelser av lineær programmering – Leontief-modeller med substitution, Koopmanns' efficiens-analyse og mikro-produktionsteorien – ypperligt fremstillet i kap. 17 og 18, omend det nok kunne ha været trukket lidt kraftigere op at *efficient* allokering av ressourcer kun er et skridt på vejen til *optimal* allokering (jfr. f.eks. p. 586, hvor man nærmest får indtryk av at det er det samme).

De to sidst kapitler gir en oversigt over de nyeste resultater m.h.t. mulighederne av at måle nytte (kap. 19) og en fremstilling av aggregeringsproblemet, væsentligt baseret på Theil's bog.

3. Disse mange kritiske bemærkninger som alle vedrører detaljer bør ikke tilsløre at »Mathematical Economics« er et stort værk, en himlens gave til alle der beskæftiger sig med økonometri og matematisk økonomi. Alene det at vi nu har fået en samlet fremstilling av de nye ting som er kommet frem i de sidste 20 år gør Allen's bog helt uundværlig. Skønt den ikke kan betegnes som et systemværk i egentlig forstand – den dækker ikke hele den økonomiske teori, men kun »certain economic theories of present interest, developed in mathematical terms by Anglo-American economists« – er den fortrinligt egnet som grundlag for videregående undervisning i moderne teori, med streg under videregående; fremstillingen er som helhed av meget høj kvalitet også i pædagogisk henseende (ikke mindst er det en god idé at illustrere samtlige afsnit med nyttige øvelseseksempler), men alligevel er det en van-

skelig bog at læse. Det kan nu engang ikke være anderledes, vi skal jo fremad, og der er unægtelig sket noget indenfor vort fag i de sidste årtier. Allen's bog er en udfordring til verbaløkonomerne: skriv denne bog om i ord og vi skal ta hatten av for jer!

Sven Danø.*

Jan Tinbergen: Selected Papers, ed. by L. H. Klaassen, L. M. Koyck & H. J. Witteveen, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1959. 318 sider. Pris 30 Fl.

»Twenty-five years have elapsed since Professor Tinbergen was first appointed Professor at the Netherlands School of Economics at Rotterdam and this fact offered the editors an opportunity to align the papers to show the development of Tinbergen's scientific activities over a long period of years«. Således forklarer de tre udgivere af ovennævnte bog baggrunden for, at man nu udsender 13 af Tinbergens artikler i engelsk udgave.

I et vellykket forsøg på at dække en væsentlig del af de områder, som Tinbergen har beskæftiget sig med, har udgiverne valgt arbejder om (1) konjunkturteori og -politik, (2) udenrigshandelens teori og politik, (3) økonomisk vækst, (4) indkomstfordelingen og (5) økonomiske systemer.

ad (1): *Konjunkturer*. Man har her, man fristes til at sige naturligvis, valgt at begynde med artiklen fra *Weltwirtschaftliches Archiv*, 1931, om »Schiffbauzyklus«. Denne artikel betegner vel Tinbergens genembrud på det internationale plan. Ved den konkrete påvisning af, hvorledes parametrene størrelse afgør bevægelsernes karakter kom her noget nyt ind i økonomien. – Den efterfølgende artikel fra *Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi* 1944, »Types of Equilibrium and Business-Cycle Movements«, er kendt og behøver ikke omtale. Derimod er den derpå følgende artikel, »An Economic Policy for 1936«, en oversættelse af et hidtil alene i Holland offentliggjort arbejde. Artiklen vil således være ny for de fleste læsere. Med den netop for Tinbergen karakteristiske blanding af teori

* Fuldmægtig i Boligministeriet.

og empiri opbygges her en makromodel for Holland. Afstanden fra denne model til de senere af »Centraal Planbureau« offentliggjorte modeller er forbløffende lille. (Også derved, at symbolikken er tung at lære. Selv i relation til en så festlig anledning må det være tilladt at anke over Tinbergens symboler). Man noterer, at det ikke er korrekt, når man plejer at sige, at med Tinbergens arbejde for Folkeforbundet i 1939 (*A Method and its Application to Investment Activity*), så man for første gang en egentlig økonometrisk makromodel. En sådan findes allerede i 1936, og tilmed indeholder 1936-modellen en række af de sammenhænge, som man ellers regner med daterer sig efter *General Theory*. – Også den næste artikel, »Lag Cycles and Life Cycles«, som er fra 1938 har hidtil kun været tilgængelig på hollandsk. »Lag Cycles« er konjunkturbevægelser, som »forklares« ved visse kortvarige lags, f. ex. mellem profitstigning og investering. »Life Cycles« på den anden side er bevægelser som »forklares« ved lange lags, f. eks. mellem investering og reinvestering. Tinbergen viser nu, at de to typer af lag kan give svingninger af samme længde. Når konjunkturbevægelsen »forklares« ved de korte lags finder man imidlertid, at periodelængden ændres stærkt selv ved små ændringer i parametrene, mens bevægelser, som kan henføres til lange lags, er meget mere ufølsomme overfor strukturelle ændringer. Så vidt det er anmelderen bekendt, har disse forhold og deres konsekvens for konjunkturpolitikken ikke været drøftet hverken før eller siden. – Den sidste artikel i dette afsnit hedder »Tonnage and Freight«. Artiklen er fra 1934 og giver med smuk forening af teori og empiri en analyse af fragtraternes bevægelse før den første verdenskrig.

ad (2): *Udenrigshandel*. I dette afsnit er fire artikler som her kun skal omtales kort. Den første artikel er fra *Metroeconomica*, 1949, og hedder »The Equalization of Factor Prices Between Freetrade Areas«. Denne artikel behandler problemet om faktorprisernes udligning ved handel. Den betegner en uddybning af Samuelson's