væsentlige som de af præses behandlede, selv om de er vanskeligere eller måske helt umulige at få presset ind i modellerne. De nævner jo selv mange af dem rundt omkring både i afhandlingen og navnlig i den i det hele taget langt mere realistiske konjunkturbog. Derfor tror jeg, at grænseproduktiviteten af en fortsat modelproduktion eller modelforfining, som den De her har foretaget, vil vise sig ret stærkt synkende. De beklager jo flere steder i afhandlingen, at De har måttet indskrænke Dem til »skrivebordsfilosofi« og ikke har haft lejlighed til at konfrontere Deres deduktive analyse med empirisk materiale. Nu hvor De har fået et forskningsinstitut og medarbejdere til Deres rådighed, har De jo mulighed for at lade det håb, der udtales s. 23 gå i opfyldelse. Det tror jeg vil være frugtbart.

6. Lad mig til sidst sige, at selv om jeg synes, der kan rettes væsentlige indvendinger mod præses' afhandling, har jeg intet øjeblik været i tvivl om, at han helt og fuldt fortjener den doktorgrad, han i dag erhverver sig.

Når man betragter begge de to arbejder, der har foreligget til bedømmelse, under eet, viser de os en rigt udstyret, alsidig forsker. I sin sidste afhandling har præses givet yderligere vidnesbyrd om sin evne til grundig og skarpsindig analyse. Havde den stået alene, ville dens undertiden snævre og virkelighedsfjerne forudsætninger måske have fået en til at tvivle om forfatterens realitetssans. Men ved siden af afhandlingen står konjunkturbogen, som med sit bredere sigte og mere virkelighedsnære oplæg viser, at dens forfatter står med begge ben på jorden og kan andet og mere end at lege med tal.

II.

Af A. HALD[1]

1. Det er med stor betænkelighed, at jeg har indvilliget i at indtræde i udvalget til bedømmelse af denne afhandling, hvis emne falder udenfor mit normale arbejdsområde. Min andel af bedømmelsen har derfor efter sagens natur været rent formel, idet jeg har måttet indskrænke mig til at kontrollere rigtigheden af de udledte formler og overlade realitetsbedømmelsen til de økonomisk sagkyndige. Den første officielle opponent, professor, dr. polit. Carl Iversen, og de to opponenter ex auditorio har da også underkastet både afhandlingens forudsætninger og konklusioner en kritisk vurdering ud fra driftsøkonomiske synspunkter, således at jeg på denne baggrund med sindsro kan nøjes med at behandle den anvendte matematiske teknik.

1. Dr. phil., professor ved Københavns Universitet.

væsentlige som de af præses behandlede, selv om de er vanskeligere eller måske helt umulige at få presset ind i modellerne. De nævner jo selv mange af dem rundt omkring både i afhandlingen og navnlig i den i det hele taget langt mere realistiske konjunkturbog. Derfor tror jeg, at grænseproduktiviteten af en fortsat modelproduktion eller modelforfining, som den De her har foretaget, vil vise sig ret stærkt synkende. De beklager jo flere steder i afhandlingen, at De har måttet indskrænke Dem til »skrivebordsfilosofi« og ikke har haft lejlighed til at konfrontere Deres deduktive analyse med empirisk materiale. Nu hvor De har fået et forskningsinstitut og medarbejdere til Deres rådighed, har De jo mulighed for at lade det håb, der udtales s. 23 gå i opfyldelse. Det tror jeg vil være frugtbart.

6. Lad mig til sidst sige, at selv om jeg synes, der kan rettes væsentlige indvendinger mod præses' afhandling, har jeg intet øjeblik været i tvivl om, at han helt og fuldt fortjener den doktorgrad, han i dag erhverver sig.

Når man betragter begge de to arbejder, der har foreligget til bedømmelse, under eet, viser de os en rigt udstyret, alsidig forsker. I sin sidste afhandling har præses givet yderligere vidnesbyrd om sin evne til grundig og skarpsindig analyse. Havde den stået alene, ville dens undertiden snævre og virkelighedsfjerne forudsætninger måske have fået en til at tvivle om forfatterens realitetssans. Men ved siden af afhandlingen står konjunkturbogen, som med sit bredere sigte og mere virkelighedsnære oplæg viser, at dens forfatter står med begge ben på jorden og kan andet og mere end at lege med tal.

II.

Af A. HALD[1]

1. Det er med stor betænkelighed, at jeg har indvilliget i at indtræde i udvalget til bedømmelse af denne afhandling, hvis emne falder udenfor mit normale arbejdsområde. Min andel af bedømmelsen har derfor efter sagens natur været rent formel, idet jeg har måttet indskrænke mig til at kontrollere rigtigheden af de udledte formler og overlade realitetsbedømmelsen til de økonomisk sagkyndige. Den første officielle opponent, professor, dr. polit. Carl Iversen, og de to opponenter ex auditorio har da også underkastet både afhandlingens forudsætninger og konklusioner en kritisk vurdering ud fra driftsøkonomiske synspunkter, således at jeg på denne baggrund med sindsro kan nøjes med at behandle den anvendte matematiske teknik.

1. Dr. phil., professor ved Københavns Universitet.

2. Matematisk behandling af økonomiske problemer har hidtil været en sjældenhed i disputatser ved Københavns universitet. Det er glædeligt, at vi med ca. et års mellemrum nu har haft to disputatser af denne type, og at begge forfattere er blevet professorer, således at man med større fortrøstning end hidtil kan imødese den videre udvikling på dette område. Anvendelse af matematik indenfor økonomien giver stadig anledning til diskussion, og kløften mellem verbaløkonomerne og de matematiske økonomer er stadig urimelig stor. Af de mange årsager hertil skal jeg kun nævne to.

Man er tilbøjelig til at glemme, at ord — ligesom matematiske udtryk — kun er symboler, der i videnskabelige afhandlinger kun må anvendes i veldefinerede betydninger og efter bestemte »regneregler«. Når man har formuleret en model i ord og ræsonnerer videre i ord, er der altid en stor risiko for, at ordenes mangetydighed giver anledning til fejl i ræsonnementet, eller at ræsonnementet bliver så kompliceret, at der begås logiske fejl. Hvis en model derimod er formuleret matematisk, kan man i den følgende deduktive proces gøre brug af hele det forråd af metoder og resultater, som matematikerne har opsamlet gennem de sidste to—tre tusind år, hvilket giver større sikkerhed og hurtighed i ræsonnementet. Man skulle tro, at denne form for arbejdsøkonomi på det åndelige område var særlig tiltalende netop for økonomer.

Der er naturligvis stor forskel på økonomernes og matematikernes verden. Det må vel bl. a. være en ufuldkommen undervisningsteknik i matematik, der har medvirket til at frembringe det matematiske skrækkompleks, der er så udbredt og samtidig så uforståeligt, idet matematikernes verden jo er den simpleste og mest krystalklare af alle verdener, opbygget som den er ved ren deduktion ud fra passende valgte aksiomer. (For matematikeren ligger en af de største vanskeligheder naturligvis netop i valget af aksiomer). Jo mere man fjerner sig fra matematikernes fantasiverden, og i særdeleshed jo større rolle den menneskelige adfærd spiller for det pågældende område, desto vanskeligere bliver beskrivelsen og analysen af det. Juraen, der i sin deduktive metode i høj grad er beslægtet med matematikken, forsøger at klare nogle af sine vanskeligheder ved at indføre et matematisk gespenst, der lyder navnet bonus pater familias. For den, der har læst både Bohr og Mollerup: Matematisk Analyse og H. Ussing: Obligationsretten, er slægtskabet i tankegangen påfaldende. Økonomerne har også undertiden benyttet sig af en »economic man«, men det er mit indtryk, at han aldrig har opnået samme popularitet som bonus pater. Det er mit håb, at den matematikundervisning, der for nylig er etableret ved fakultetet, vil medvirke til at nærme de to parter til hinanden, ligesom man også kan håbe på, at mellemskole- og gymnasieundervisningen i matematik engang vil blive taget op til grundig revision.

En anden vej til nærmere forbindelse mellem de to parter går over den empiriske verifikation af teorierne, hvad enten disse er formuleret på den ene eller den anden måde. Hvis begge parter i højere grad forsøgte på at underbygge teorierne med data (der ofte er vanskelige at fremskaffe) og anvendte flere kræfter på at diskutere overensstemmelsen mellem teori og data, ville meget være vundet. Den foreliggende afhandling er et typisk eksempel på en teori, der fortjener en sådan nærmere empirisk underbygning.

Disse betragtninger fører naturligt over i statistikken, således at resten af min opposition kunne forløbe efter det velkendte skema for anmeldelser, som i outreret form er formuleret i tidsskriftet Books of the Months for marts 1957: »A few weeks ago a critic reviewed a book on dogs. His review consisted (with some addition) of the statements, in series, that he did not like dogs, had never liked them and never would, but he was fond af cats.«

Jeg har imidlertid modstået denne fristelse og skal i det følgende nøjes med at tage nogle af afhandlingens problemer op til rent *matematisk* behandling.

3. En af de grundlæggende forudsætninger for udviklingerne i kap. 2—5 er udtrykt ved ligning (2.1), p. 30

$$'q_t = q_{t-1} + \alpha\,\Delta\, q_{t-1} - \beta\,(q_{t-1} - {}^*q), \qquad (1)$$

hvor $\alpha \geq 0$ og $\beta \geq 0$.[1]

En af svaghederne ved den matematiske analyse af modellen i disse kapitler kommer frem allerede på side 34, hvor forf. beviser, at det forventede salg kan være aftagende, selv om det faktiske salg er voksende. Beviset er — også i bogen — meget simpelt. At det forventede salg er aftagende, er ensbetydende med at $\Delta' q_t < 0$, d. v. s.

$$\Delta' q_t = \Delta\, q_{t-1} + \alpha\,\Delta^2 q_{t-1} - \beta\,\Delta\, q_{t-1} < 0, \qquad (2)$$

hvoraf umiddelbart følger betingelsen

$$\Delta^2 q_{t-1} < \frac{\beta - 1}{\alpha}\,\Delta q_{t-1}, \; (\Delta q_{t-1} > 0), \qquad (3)$$

der er identisk med forfatterens betingelse på side 34. Sætningen kan altså formuleres således: Det forventede salg er aftagende, selv om det faktiske salg er voksende, såfremt *accelerationen af det faktiske salg er tilstrækkelig lille* sammenlignet med stigningen i salget.

Det virker overraskende, at forf. ikke direkte har indført det matematiske accelerationsbegreb, d. v. s. differensen af anden orden, i en afhandling

1. Forf. definerer Δq_t som $q_t - q_{t-1}$ i modsætning til sædvanlig dansk praksis. Her følges forfatterens definitioner.

om accelerationsprincippet. Bortset fra et enkelt sted i afhandlingen benyttes begrebet acceleration ikke direkte, men forf. indskrænker sig til at operere med differenser af første orden, hvilket gør fremstillingen unødig tung og sætningerne vanskeligere at gennemskue.

4. Den grundlæggende model, der udtrykker forbindelsen mellem ordreafgivelse og afsætning, formel (2.9), p. 38, kan i overensstemmelse med det ovenstående bedst skrives på formen

$$o_t = q_{t-1} + \gamma\,(1-\beta)\;\Delta\, q_{t-1} + \gamma\,\alpha\,\Delta^2 q_{t-1}\,. \tag{4}$$

Det ses umiddelbart heraf, at sammenhængen mellem ordreafgivelse og afsætning kun afhænger af *to* parametre til trods for, at der ved modellens opbygning er anvendt tre parametre. Dette fremgår også af formel (2.9).

Indføres to parametre

$$\mu = \gamma\;(1-\beta)\,, \quad -\infty < \mu \leq \gamma\,, \tag{5}$$

og

$$\lambda = \gamma\,\alpha\,, \qquad\qquad \lambda \geq 0\,, \tag{6}$$

fås

$$o_t = q_{t-1} + \mu\Delta\, q_{t-1} + \lambda\,\Delta^2 q_{t-1}\,. \tag{7}$$

Det bemærkes, at den tredie parameter indgår i bestemmelsen af μ's definitionsområde.

På de følgende sider diskuterer forf. betingelsen for, at den normale accelerationseffekt udebliver. Udtrykt med ovenstående symboler er ræsonnementet følgende: Betingelsen for, at $o_{\max} \leq q_{\max}$, er, at $o_{t+1} \leq q_{\max}$ for alle t, d. v. s.

$$q_t + \mu\,\Delta\, q_t + \lambda\,\Delta^2\, q_t \leq q_{\max} \tag{8}$$

eller

$$\Delta^2 q_t \leq -\frac{\mu}{\lambda}\,\Delta q_t + \frac{q_{\max} - q_t}{\lambda}\,, \tag{9}$$

hvilket også kan skrives på formen

$$\Delta^2 q_t \leq \frac{\beta - 1}{\alpha}\Delta q_t + \frac{q_{\max} - q_t}{\gamma\alpha} \text{ for alle } t. \tag{10}$$

Resultatet kan altså udtrykkes således: *Den normale accelerationseffekt udebliver, hvis accelerationen af det faktiske salg er tilstrækkelig lille.*

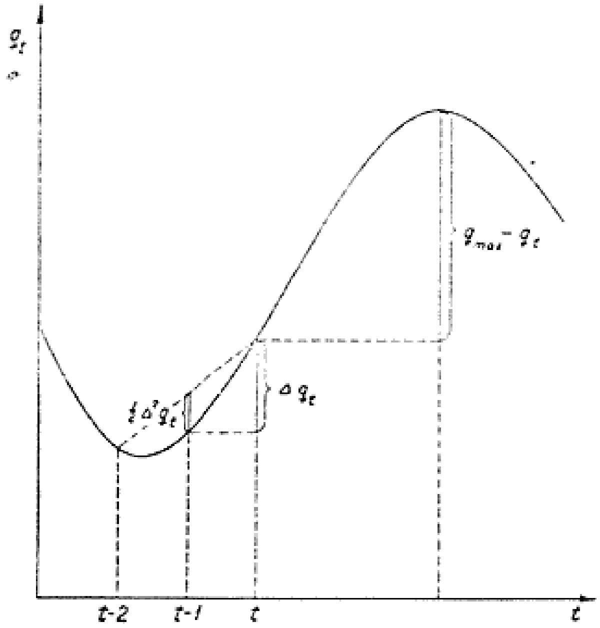

Fig. 1.
Geometrisk fremstilling af de tre størrelser, $\Delta^2 q_t$, Δq_t og $q_{max} - q_t$, i formel (10).

De tre størrelser, der indgår i denne formel, kan let udtrykkes geometrisk, jvf. fig. 1.

Lad os antage, at den normale accelerationseffekt udebliver for parameterværdierne (λ_0, μ_0). Det følger da af (5) og (6), at *accelerationseffekten udebliver for de uendelig mange parameterværdier* (α, β, γ), *der fremkommer ved variation af* γ *i talsættet* $\left(\frac{\lambda_0}{\gamma}, 1 - \frac{\mu_0}{\gamma}, \gamma\right)$, hvor $\gamma \geq \mu_0$.

Efter en almindelig diskussion af betingelsen (10) går forf. over til at belyse spørgsmålet yderligere ved konstruktion af 15 taleksempler svarende til forskellige kombinationer af de tre parametre, jvf. tabel 5, pp. 48—49. Accelerationseffekten vurderes her på den ejendommelige måde, at o_{max} udtrykkes i procent af q_{max}. Forfatteren har åbenbart et kort øjeblik glemt sin egen definition af accelerationseffekt på side 39. Han burde allerede her have indført den på side 121 definerede accelerationskoefficient, der i denne forbindelse antager formen

$$f = \frac{o_{max} - o_{min}}{q_{max} - q_{min}} . \tag{11}$$

Medens accelerationskoefficienten for disse taleksempler varier fra 0.67 til 1.44, varierer forfatterens indeks fra 0.97 til 1.03. Fejlen er naturligvis, at det benyttede indekstal afhænger af det vilkårligt valgte gennemsnitlige salg.

5. Forfatterens analysemetode bygger på to fremstillingsformer, der benyttes sideløbende gennem hele afhandlingen. For det første udledes ad matematisk vej visse generelle sætninger og betingelser, som de indførte (uspecificerede) funktioner må opfylde. Dernæst belyses meningen hermed ved gennemregning af simple konstruerede taleksempler, idet forf. vælger simple tal som funktionsværdier, uden iøvrigt at specificere funktionerne matematisk, jvf. f. eks. tabel 5, p. 48.

Man kunne have ønsket, at forf. yderligere havde benyttet sig af grafiske fremstillinger samt analyseret sine modeller med forskellige *funktionstyper* som udgangspunkt. En sådan analyse ville i adskillige henseender være mere værdifuld end taleksemplerne, idet man ved variation af parametrene i de valgte funktionstyper kan frembringe resultater svarende til uendelig mange taleksempler. I adskillige tilfælde forekommer forfatterens taleksempler vilkårlig valgt, og det er vanskeligt at uddrage konklusionerne af disse eksempler.

For at belyse hvilke resultater forf. kunne have opnået ved at benytte passende valgte funktioner som udgangspunkt for variationerne i salget, skal jeg kort gøre rede for en sådan analyse, hvor

$$q_t = A_0 + A \sin \varphi \tag{12}$$

med

$$\varphi = \frac{2\pi t}{T} - v, \tag{13}$$

d.v.s. q_t er en periodisk funktion af t med periodelængde T, gennemsnitsværdi A_0, maksimumværdi $A_0 + A$ og minimumsværdi $A_0 - A$, jvf. fig. 2, der viser et eksempel på en sådan funktion.

Ved anvendelse af simple trigonometriske formler[1] fås

$$\Delta q_t = A\,[a \cos \varphi + (1 - b) \sin \varphi] \tag{14}$$

og

$$\Delta^2 q_t = 2A\,(1 - b)\,[a \cos \varphi - b \sin \varphi], \tag{15}$$

1. Beviser findes samlet i appendiks til artiklen.

hvor
$$a = \sin\frac{2\pi}{T} \text{ og } b = \cos\frac{2\pi}{T}, \tag{16}$$

jvf. fig. 2, der viser et eksempel på forløbet af disse funktioner.

Indsættes disse resultater i
$$o_{t+1} = q_t + \mu\,\Delta q_t + \lambda\,\Delta^2 q_t \tag{17}$$
fås
$$\begin{aligned} o_{t+1} = A_0 &+ A\,[1 + (1-b)\,(\mu - 2b\lambda)]\sin\varphi \\ &+ A\,a\,[2\lambda + (\mu - 2b\lambda)]\cos\varphi\,, \end{aligned} \tag{18}$$
der kan sammentrækkes til
$$o_{t+1} = A_0 + \sqrt{B^2 + C^2}\,\sin(\varphi + \eta)\,, \tag{19}$$
hvor B og C repræsenterer koefficienterne til henh. $\sin\varphi$ og $\cos\varphi$ i (18) og $\operatorname{tg}\eta = C/B$.

Forf. model bevirker altså, at sinus-svingninger af salget medfører sinus-svingninger af ordreafgivelsen, og at de to sinus-funktioners amplituder og faser står i en simpel relation til hinanden.

Man får umiddelbart accelerationskoefficienten[1]
$$f = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A}\right)^2}, \tag{20}$$
hvor
$$\frac{B}{A} = 1 + (1-b)\,(\mu - 2b\lambda) \tag{21}$$
og
$$\frac{C}{A} = a\,(2\lambda + (\mu - 2b\lambda))\,. \tag{22}$$

Betingelsen for, at den normale accelerationseffekt udebliver, er $f \leq 1$ eller $f^2 \leq 1$, hvor
$$f^2 = 1 + 2\,(1-b)\,[\mu - 2b\lambda + \mu^2 + 2\,(1-b)\,\mu\lambda + 2(1-b)\,\lambda^2]\,. \tag{23}$$

Geometrisk fremstillet svarer denne betingelse til, at parametrene (λ, μ) ligger indenfor en ellipse i (λ, μ)-planen med centrum i $\left(\frac{1}{2(1-b)}, -1\right)$ og med en hovedakse, der danner vinklen u med λ-aksen, hvor $\operatorname{tg} 2u = 2\,(1-b)/[2\,(1-b) - 1]$.

1. Dette forudsætter, at ekstremumsværdierne af o og q er henholdsvis $A_0 \pm \sqrt{B^2 + C^2}$ og $A_0 \pm A$, d.v.s. at $\sin(\varphi + \eta)$ og $\sin\varphi$ antager værdierne ± 1. Denne betingelse vil kun med tilnærmelse være opfyldt for heltallige værdier af t. Afvigelserne fra ± 1 kan blive særlig store for små værdier af T.

Ellipsen går gennem følgende 8 punkter:

λ	μ_1	μ_2
0	0	-1
1	$2b-1$	-2
$\frac{b}{1-b}$	0	$-1-2b$
$\frac{1}{1-b}$	-1	-2

(Til hver værdi af λ er anført de to tilsvarende værdier af μ). Ved bestemmelse af ellipsens vandrette og lodrette tangenter fås de mindste og største værdier af parametrene, for hvilke den normale accelerationseffekt udebliver. Under hensyn til parametrenes definitionsområder fås

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2(1-b)}\left[1+\sqrt{\frac{2}{1+b}}\right] \tag{24}$$

og

$$-1-\frac{1}{|a|} \leq \mu \leq -1+\frac{1}{|a|}\,. \tag{25}$$

For

$$(\lambda,\mu) = \left(\frac{1}{2(1-b)}, -1\right) \tag{26}$$

bliver $f = 0$, d.v.s. der forekommer ingen svingninger i ordreafgivelsen. Dette svarer til, at de oprindelige parametre antager værdierne

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{1}{2(1-b)\gamma},\ 1+\frac{1}{\gamma},\ \gamma\right). \tag{27}$$

På grundlag af disse resultater er det simpelt at konstruere eksempler med en vilkårlig accelerationskoefficient ligesom forståelsen af resultaterne i forfatterens tabel 5, p. 48, lettes.

En approksimation til det i tabel 5 vilkårligt opstillede salgsforløb kan fås ved hjælp af sinusfunktionen.

$$q_t = 218 + 18\sin\left(\frac{2\pi t}{10} - 0.7\,\pi\right). \tag{28}$$

Værdierne af q, Δq og $\Delta^2 q$ er anført i nedenstående tabel 1, og de tre funktioner er afbildet i fig. 2.

Den ovenfor omtalte ellipses ligning bliver da

$$\mu - 1.618\,\lambda + \mu^2 + 0.382\,\mu\lambda + 0.382\,\lambda^2 = 0\,. \tag{29}$$

Ellipsens centrum er (2.62, — 1.00), og hovedaksens hældning er —0.285, jvf. fig. 3, hvor ellipsen er afbildet.

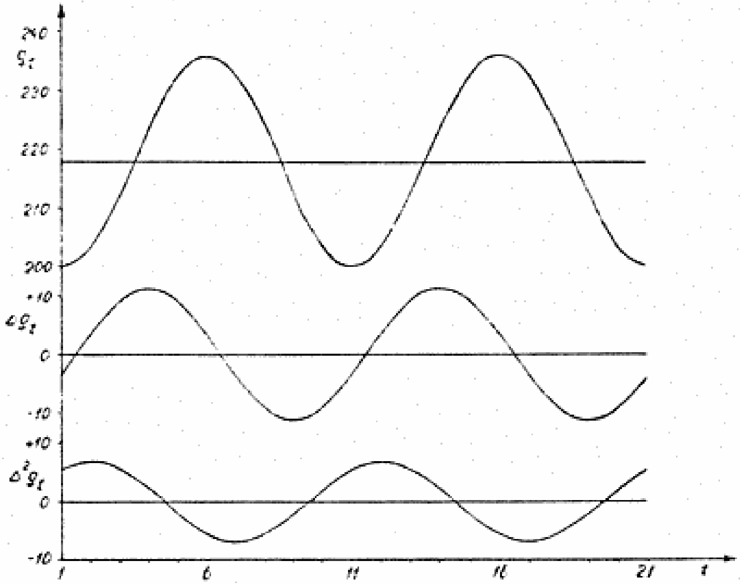

Fig. 2.

Afsætningen, ændringen i afsætningen (første differens) samt accelerationen af afsætningen (anden differens) som funktioner af tiden ifl. nedenstående formler.

$$q_t = 218 + 18 \sin\left(\frac{2\pi t}{10} - 0.7\,\pi\right)$$
$$\Delta q_t = 18\ [0.588 \cos\varphi + 0.191 \sin\varphi]$$
$$\Delta^2 q_t = 6.88\ [0.588 \cos\varphi - 0.809 \sin\varphi]$$

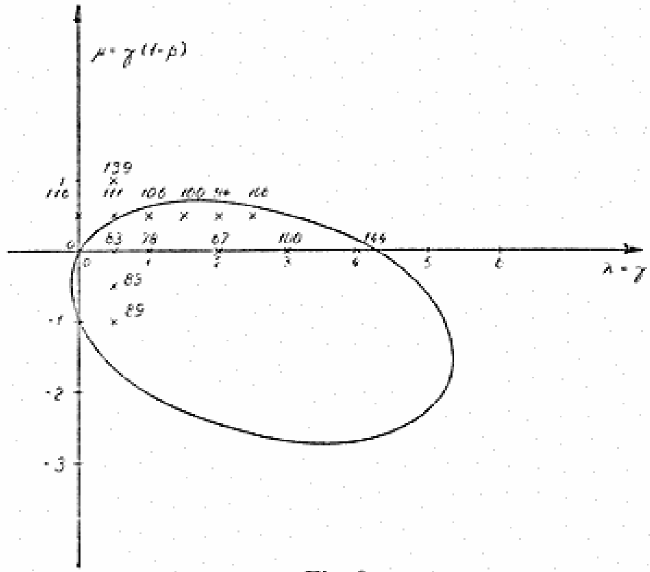

Fig. 3.

Ellipse svarende til ligning (29). Krydsene angiver forfatterens valg af parameterværdier, og de tilsvarende tal angiver forfatterens accelerationskoefficienter, jvf. tabel 3.

Tabel 1.

$$q_t = 218 + 18 \sin\left(\frac{2\pi t}{10} - 0.7\pi\right).$$

t	q_t	Δq_t	$\Delta^2 q_t$
1	200.0	—3.4	5.6
2	203.4	3.4	6.8
3	212.4	9.0	5.6
4	223.6	11.2	2.2
5	232.6	9.0	—2.2
6	236.0	3.4	—5.6
7	232.6	—3.4	—6.8
8	223.6	—9.0	—5.6
9	212.4	—11.2	—2.2
10	203.4	—9.0	2.2
11	200.0	—3.4	5.6

Værdier af (λ, μ) på ellipsens periferi giver accelerationskoefficienten 1, indenfor periferien fås $0 \leq f < 1$ og udenfor $f > 1$.

Til illustration heraf er i tabel 2 og figur 4 vist værdierne af o_t svarende til fire værdipar af (λ, μ), nemlig (2,62, —1), der som tidligere anført angiver koordinaterne til ellipsens centrum og derfor giver accelerationskoefficienten 0, (1.125, —1), der ligger indenfor periferien og giver accelerationskoefficienten 0.58, (1.125, —2.08), der ligger på ellipsens periferi og giver accelerationskoefficienten 1, samt (1.125, —3), der ligger udenfor ellipsen og giver accelerationskoefficienten 1.46.

Tabel 2. Beregning af $o_{t+1} = q_t + \mu\Delta q_t + \lambda\Delta^2 q_t$ svarende til fire værdipar af (λ, μ).

t	q_t	Δq_t	$\Delta^2 q_t$	$\lambda = 2.62$, $\mu = -1.00$, o_{t+1}	$\lambda = 1.125$, $\mu = -1.00$, o_{t+1}	$\lambda = 1.125$, $\mu = -2.08$, o_{t+1}	$\lambda = 1.125$, $\mu = -3.00$, o_{t+1}
1	200.0	— 3.4	5.6	218.1	209.7	213.4	216.5
2	203.4	3.4	6.8	217.8	207.7	204.0	200.9
3	212.4	9.0	5.6	218.1	209.7	200.0	191.7
4	223.6	11.2	2.2	218.2	214.9	202.8	192.5
5	232.6	9.0	—2.2	217.8	221.1	211.4	203.1
6	236.0	3.4	—5.6	217.9	226.3	222.6	219.5
7	232.6	— 3.4	—6.8	218.2	228.3	232.0	235.1
8	223.6	— 9.0	—5.6	217.9	226.3	236.0	244.3
9	212.4	—11.2	—2.2	217.8	221.1	233.2	243.5
10	203.4	— 9.0	2.2	218.2	214.9	224.6	232.9
f				0.01	0.58	1.00	1.46

Til ethvert værdipar af (λ, μ) svarer uendelig mange værdisæt af de oprindelige parametre, bestemt ved ligningen

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}, 1 - \frac{\mu}{\gamma}, \gamma\right).$$

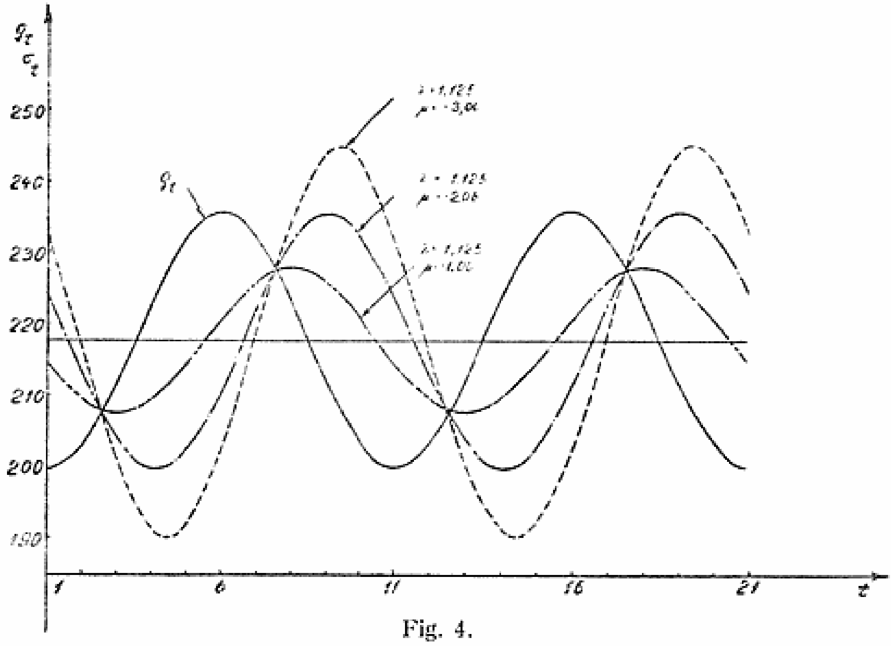

Fig. 4.
Variationer i ordreafgivelsen svarende til de i tabel 2 anførte værdier af q_t og (λ, μ).

I nedenstående skema er eksempelvis anført nogle af disse værdisæt svarende til de ovenfor anførte værdier af (λ, μ).

λ μ	2.62 —1.00		1.125 —1.00		1.125 —2.08		1.125 —3.00	
γ	α	β	α	β	α	β	α	β
1.00	2.62	2.00	1.13	2.00	1.13	3.08	1.13	4.00
1.50	1.75	1.67	0.75	1.67	0.75	2.39	0.75	3.00
2.00	1.31	1.50	0.56	1.50	0.56	2.04	0.56	2.50
2.50	1.05	1.40	0.45	1.40	0.45	1.83	0.45	2.20
3.00	0.87	1.33	0.38	1.33	0.38	1.69	0.38	2.00
f	0.01		0.58		1.00		1.46	

De til tallene i forfatterens tabel 5 svarende accelerationskoefficienter er anført i omstående tabel 3.

Værdierne af (λ, μ) er afsat i fig. 3 og de tilsvarende accelerationskoefficienter er noteret. Hvis forfatterens q_t i tabel 5 havde været en sinusfunktion, ville alle f-værdier indenfor ellipsen have været mindre end 1 og alle udenfor større end 1. Da q_t afviger noget fra en sinusfunktion, gælder ovennævnte kun i store træk. Fortolkningen af resultaterne i tabel 5 lettes dog betydeligt ved sammenligning med ellipsen.

Tabel 3.

α	β	γ	$\lambda = \gamma\alpha$	$\mu = \gamma(1-\beta)$	$100\,f$
0	$^1/_2$	1	0	$^1/_2$	116
$^1/_2$	$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$	111
1	$^1/_2$	1	1	$^1/_2$	106
$^3/_2$	$^1/_2$	1	$^3/_2$	$^1/_2$	100
2	$^1/_2$	1	2	$^1/_2$	94
$^5/_2$	$^1/_2$	1	$^5/_2$	$^1/_2$	106
$^1/_2$	0	1	$^1/_2$	1	139
$^1/_2$	$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$	111
$^1/_2$	1	1	$^1/_2$	0	83
$^1/_2$	$^3/_2$	1	$^1/_2$	$-^1/_2$	83
$^1/_2$	2	1	$^1/_2$	-1	89
1	1	1	1	0	78
1	1	2	2	0	67
1	1	3	3	0	100
1	1	4	4	0	144

6. De ovenstående betragtninger kan generaliseres på forskellige måder ved at betragte andre funktioner end sinusfunktioner, hvorved man vil kunne få et værdifuldt indblik i modellens virkemåde og parametrenes betydning.

Det ville f. eks. være nærliggende at fremstille q_t ved en autoregressiv stokastisk proces, f. eks. ved ligningen

$$q_t = c_1\, q_{t-1} + c_2\, q_{t-2} + \varepsilon_t\,, \tag{30}$$

hvor ε_t er en stokastisk variabel med middelværdi lig med nul.

Forf. forudsætter næsten overalt, at q_t er en periodisk funktion. Tænker man sig, at der føjes f. eks. en lineær trend til den periodiske funktion, således at salgsforløbet udtrykkes ved

$$q_t^* = k_0 + k_1\, t + q_t$$

fås ved indsættelse i (7)

$$\begin{aligned} o_t^* &= q^*_{t-1} + \mu\Delta\, q^*_{t-1} + \lambda\, \Delta^2 q^*_{t-1} \\ &= (k_0 + k_1\,(\mu - 1)) + k_1 t + (q_{t-1} + \mu\Delta\, q_{t-1} + \lambda\Delta^2 q_{t-1}) \\ &= c_0 + c_1\, t + o_t\,, \end{aligned} \tag{31}$$

d.v.s. svingningerne i ordreafgivelsen vil fremkomme som svingninger af samme art som tidligere diskuteret blot lejret ovenpå en lineær trend. Denne relation er nyttig ved diskussion af trendens betydning for accelerationseffekten.

7. Hovedproblemerne i kap. 3 er knyttet til undersøgelsen af modellen på side 68, der kan skrives som

$$o_t = q_{t-1} + \gamma \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu}\, \Delta\, q_{t-\nu} \tag{32}$$

og en sammenligning af denne med

$$\sigma_t^* = q_{t-1} + \gamma \Delta q_{t-1} . \tag{33}$$

Formel (32) omskrives let til

$$o_t = q_{t-1} + \frac{\gamma}{2}(q_{t-1} - \bar{q}_{t-2}) , \tag{34}$$

hvor

$$\bar{q}_{t-2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} q_{t-\nu-1} , \tag{35}$$

d.v.s. $\bar{q}_{t-2}$ er et vejet gennemsnit af alle q-værdier, der ligger forud for q_{t-1}.

Forf. har på side 68—69 udledt betingelserne for, at $o_{\max} > o^*_{\max}$, samt diskuteret disse betingelser og belyst dem ved taleksempler.

Modellen kan belyses yderligere ved en lignende fremgangsmåde som i afsnit 5. Sættes

$$q_t = A_0 + A \sin \varphi , \tag{36}$$

hvor $\varphi = \frac{2\pi t}{T} - v$, fås

$$\bar{q}_{t-1} = A_0 + A \frac{2 \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{T}\right) - \sin \varphi}{1 + 4(1-b)} . \tag{37}$$

Ved indsætning i (32) fås efter nogen reduktion

$$o_{t+1} = A_0 + A \sqrt{1 + \frac{2(1-b)\gamma(3+\gamma)}{1+4(1-b)}} \sin(\varphi + \eta) , \tag{38}$$

hvor

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{a\gamma}{1 + (1-b)(4+3\gamma)} . \tag{39}$$

På analog måde fås

$$o^*_{t+1} = A_0 + A \sqrt{1 + 2(1-b)\gamma(1+\gamma)} \sin(\varphi + \eta^*) , \tag{40}$$

hvor

$$\operatorname{tg} \eta^* = \frac{a\gamma}{1 + (1-b)\gamma} . \tag{41}$$

Indføres også her et indeks for de relative udsving defineret som

$$f = \frac{o^*_{\max} - o^*_{\min}}{o_{\max} - o_{\min}} \tag{42}$$

fås

$$f^2 = \frac{1 + 2(1-b)\gamma(1+\gamma)}{1 + \frac{2(1-b)\gamma(3+\gamma)}{1+4(1-b)}} . \tag{43}$$

Hvis de relative udsving i ordreafgivelsen under varierende priser skal være større end under faste priser, må f være mindre end 1, hvilket kræver

$$1 \leq \gamma < \frac{1}{2\,(1-b)} - 1\,. \tag{44}$$

Såfremt $b < {}^3/_4$, d.v.s. periodelængden $T \leq 8$, findes der ikke nogen værdi af γ, som opfylder betingelsen. Med forholdsvis kortvarige periodiske svingninger i salget, vil udsvingene i ordreafgivelsen under varierende priser således ikke kunne overstige udsvingene under faste priser. Dersom periodelængden $T \geq 9$, kan betingelsen opfyldes for tilstrækkelig små værdier af γ. Dette belyses yderligere af f-værdierne i nedenstående tabel 4, der er beregnet efter formel (43).

Tabel 4.

Værdier af $f = \dfrac{o^*_{\max} - o^*_{\min}}{o_{\max} - o_{\min}}$,

beregnet efter formel (43).

T	$\gamma = 1$	$\gamma = 1.5$	$\gamma = 2$	Øvre grænse for γ ifl. (44)
4	1.39	1.52	1.61	—
6	1.13	1.21	1.27	—
8	1.02	1.06	1.10	—
10	0.97	0.99	1.02	1.6
12	0.95	0.96	0.97	2.7
20	0.95	0.94	0.93	9.2
40	0.98	0.97	0.96	39.7
∞	1.00	1.00	1.00	∞

Resultaterne af nogle mere detaillerede beregninger over forløbet af funktionerne o_t og o_t^* for $\gamma = 1$ fremgår af tabel 5.

Tabel 5.

Tre eksempler på forløbet af q_t, o_t og o_t^* ifl. (36), (38) og (40) for $\gamma = 1$.

$q_t = 110.5 + 10.5 \sin [90\,(t-2)]$
$o^*_{t+1} = 110.5 + 23.48 \sin [90\,(t-2) + 26.56]$
$o_{t+1} = 110.5 + 16.93 \sin [90\,(t-2) + 7.12]$

t	q_t	o_t^*	o_t	f
1	100.0	100.0	108.4	
2	110.5	89.5	93.7	
3	121.0	121.0	112.6	1.25
4	110.5	131.5	127.3	
5	100.0	100.0	108.4	

(Tabel 5 fortsat).

$$q_t = 110.5 + 10.5 \sin [45 (t - 3)]$$
$$o^*_{t+1} = 110.5 + 15.48 \sin [45 (t - 3) + 28.67]$$
$$o_{t+1} = 110.5 + 15.14 \sin [45 (t - 3) + 13.05]$$

t	q_t	o_t^*	o_t	f
1	100.0	95.6	97.7	
2	103.1	96.9	95.8	
3	110.5	106.1	102.5	
4	117.9	117.9	113.9	
5	121.0	125.4	123.3	1.01
6	117.9	124.1	125.2	
7	110.5	114.9	118.5	
8	103.1	103.1	107.1	
9	100.0	95.6	97.7	

$$q_t = 110.5 + 10.5 \sin [30(t - 4)]$$
$$o^*_{t+1} = 110.5 + 13.01 \sin [30(t - 4) + 23.79]$$
$$o_{t+1} = 110.5 + 13.68 \sin [30(t - 4) + 14.47]$$

t	q_t	o_t^*	o_t	f
1	100.0	97.6	97.3	
2	101.4	98.6	97.3	
3	105.2	102.8	100.7	
4	110.5	109.1	106.8	
5	115.8	115.7	113.9	
6	119.6	121.0	120.1	
7	121.0	123.4	123.7	0.98
8	119.6	122.4	123.7	
9	115.8	118.2	120.3	
10	110.5	111.9	114.2	
11	105.2	105.3	107.1	
12	101.4	100.0	100.9	
13	100.0	97.6	97.3	

Det ses også af disse eksempler, at f er større end 1 for $T = 4$ og T $= 8$, medens f er mindre end 1 for $T = 12$.

Funktionen q_t i tabel 5 for $T = 8$ svarer nogenlunde til forfatterens taleksempel i tabel 7, p. 70, hvor det lykkes at få betingelsen $f < 1$ opfyldt for $\gamma = 1$, men ikke for $\gamma = 3/2$.

Den ovenfor gennemførte analyse er knyttet til en sinusfunktion, men resultaterne kan antagelig i nogen grad generaliseres. En nærliggende generalisation kan fås ved at indføre 4 (vilkårlige, positive) parametre i stedet for de 4 differenser (4, 8, 6 og 3 erstattes af a_1, a_2, a_3 og a_4) i forfatterens tabel 7, p. 70, hvorved q_t, o_t^* og o_t kan udtrykkes som lineære funktioner af disse parametre. På tilsvarende måde kan cykliske svingninger af andre længder beskrives. Herved frigør man sig for forudsætninger om funktionstypen, og accelerationseffekten udtrykkes lineært ved disse parametre. Metoden består simpelthen i at udnytte periodiciteten af q_t i forbindelse med ligning (3.15), hvorved den uendelige række kan summeres, således som forfatteren selv har vist det i taleksemplet.

8. I kap. 7 behandles problemerne om variationer i maskinanskaffelser som funktion af variationer i produktionen under forudsætning af, at alle maskiner af den pågældende type har samme levetid l, og at produktionen udviser periodiske svingninger af længden n tidsenheder.

Forf. udleder og diskuterer med stor omhu de grundlæggende relationer og gennemgår en række specialtilfælde og modifikationer, til dels ved hjælp af taleksempler. Også her kan den i det foregående skitserede teknik anvendes til belysning af forfatterens resultater.

Da tiden inddeles i perioder af længden l tidsenheder, svarende til den konstante levetid af maskinerne, er det praktisk at skrive t som

$$t = i + (\nu - 1)\, l\,, \tag{45}$$

hvor

$$i = 1\,, 2\,, \ldots\,, l$$

og

$$\nu = 0\,,\ 1\,,\ 2\,, \ldots$$

Tidspunkterne svarende til $\nu = 0$, d.v.s. $t = -(l-1), -(l-2), \ldots, -1, 0$, betragtes som udgangstidspunkter, i hvilke maskinanskaffelserne $N_0, N_{-1}, \ldots, N_{-(l-1)}$ er givne.

Den grundlæggende relation

$$N_t = \Delta^* B_t + N_{t-l}\,, \tag{46}$$

jvf. afhandlingens formel (7.6 a), p. 99, kan skrives på formen

$$N_{i+(\nu-1)l} = \Delta\, B_{i+(\nu-1)l} + N_{i+(\nu-2)l}\,. \tag{47}$$

(I det følgende skrives for nemheds skyld B i stedet for $^*B$, idet vi kun betragter de situationer i hvilke (7.6a) er opfyldt).

Af (47) fås umiddelbart

$$N_{i+(\nu-1)l} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \Delta\, B_{i+\mu l} + N_{i-l}\,, \tag{48}$$

svarende til forf. formel (7.8), hvoraf maskinanskaffelserne kan beregnes, når udgangssituationen N_{i-l} og produktionssvingningerne $\Delta\, B$ er kendt.

Lad produktionen variere efter en sinusfunktion med periodelængde n tidsenheder, d.v.s.

$$B_t = A_0 + A \sin\varphi\,, \tag{49}$$

hvor

$$\varphi = \frac{2\,\pi\, t}{n} - v\,. \tag{50}$$

Heraf følger, at

$$\Delta\, B_{i+\mu l} = 2\, A \sin\frac{\pi}{n}\, \sin\left(\frac{2\,\pi\, l\,\mu}{n} + \frac{2\,\pi\, i}{n} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} - v\right), \tag{51}$$

der ved indsættelse i (48) giver

$$N_{i+(\nu-1)l} = N_{i-l} + A \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{n} (i + \nu l) - w \right) - \sin \left(\frac{2\pi i}{n} - w \right) \right], \quad (52)$$

hvor

$$w = v + \frac{\pi}{n} (l + 1) . \quad (53)$$

Formel (52) forudsætter, at l ikke er et multiplum af n. Indføres igen $t = i + (\nu - 1) l$, fås

$$N_t = N_{t-\nu l} + A \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} \left[\sin \left(\frac{2\pi t}{n} - w_0 \right) - \sin \left(\frac{2\pi (t - \nu l)}{n} - w_0 \right) \right], \quad (54)$$

hvor

$$w_0 = v - \frac{\pi}{n} (l - 1) \quad (55)$$

og

$$-(l-1) \leq t - \nu l \leq 0 . \quad (56)$$

Forfatteren har på p. 104 bevist, at $B_{av} = l\, N_{av}$. Indsættes B_{av} og N_{av} beregnet af (49) og (54) fås

$$A_0 = N_0 + N_{-1} + \ldots + N_{-(l-1)} + A \sin v \quad (57)$$

eller

$$B_0 = N_0 + N_{-1} + \ldots + N_{-(l-1)} . \quad (58)$$

Forf. benytter som regel i sine taleksempler en »jævn« fordeling af maskinanskaffelserne i »begyndelsesperioden«, hvorved forstås, at

$$N_1 = N_0 = N_{-1} = \ldots = N_{-(l-2)} = \frac{B_1}{l} . \quad (59)$$

Sammenholdes denne betingelse med (58) fås følgende ligning til bestemmelse af $N_{-(l-1)}$:

$$N_{-(l-1)} = \frac{B_1}{l} + (B_0 - B_1) . \quad (60)$$

Dersom man sammenfatter de to led på højre side af (54), der kun afhænger af $t - \nu l$, fås

$$N_t = N^*_{t-\nu l} + A \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} \sin \left(\frac{2\pi t}{n} - w_0 \right) , \quad (61)$$

hvor

$$N^*_{t-\nu l} = N_{t-\nu l} - A \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} \sin \left(\frac{2\pi(t-\nu l)}{n} - w_0 \right). \tag{62}$$

Denne formel viser — i overensstemmelse med forfatterens generelle resultat — at maskinanskaffelserne udviser periodiske svingninger med periodelængden ln tidsenheder, idet første led af (61) er periodisk med periodelængde l, og andet led er periodisk med periodelængde n.

Det ses umiddelbart af (54), at

$$N_{\max} \leq \operatorname{Max}\left\{ N_{t-\nu l} \right\} + 2A \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}}. \tag{63}$$

Ved en tilsvarende vurdering af $N_{\min}$ fås

$$N_{\max} - N_{\min} \leq 4A \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} + \operatorname{Max}\left\{ N_{t-\nu l} \right\} - \operatorname{Min}\left\{ N_{t-\nu l} \right\},$$

hvoraf følger, at

$$f \leq 2l \left| \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} \right| + \frac{\operatorname{Max}\left\{ N_{t-\nu l} \right\} - \operatorname{Min}\left\{ N_{t-\nu l} \right\}}{2A} l, \tag{64}$$

såfremt B_t antager værdierne $A_0 \pm A$.

Et særlig simpelt tilfælde fremkommer, dersom maskinanskaffelserne i udgangsperioden ($N_{t-\nu l}$) varierer i omvendt takt af andet led i (62), således at $N^*_{t-\nu l}$ bliver konstant. Dette betyder, at

$$N_{t-\nu l} = \frac{A_0}{l} + A \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} \sin \left(\frac{2\pi(t-\nu l)}{n} - w_0 \right), \tag{65}$$

og

$$N_t = \frac{A_0}{l} + A \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} \sin \left(\frac{2\pi t}{n} - w_0 \right), \tag{66}$$

d.v.s. N_t bliver periodisk med en periodelængde på n tidsenheder. I dette tilfælde bliver

$$f = \left| \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi l}{n}} \right| l. \tag{67}$$

Tabel 6.

Tabellering af B_t og N_t ifl. (68) og (69).

t	ν	$t-3\nu$	B_t	$\sin u$	$\sin v$	Diff.	$14.51 \times$ Diff.	$N_{t-3\nu}$	N_t
1	1	—2	59.9	—·588	—·588	0.000	0.0	19.9	19.9
2	1	—1	73.7	·000	—·951	0.951	13.8	20.0	33.8
3	1	0	96.0	·588	—·951	1.539	22.3	20.0	42.3
4	2	—2	118.3	·951	—·588	1.539	22.3	19.9	42.2
5	2	—1	132.1	·951	—·951	1.902	27.6	20.0	47.6
6	2	0	132.1	·588	—·951	1.539	22.3	20.0	42.3
7	3	—2	118.3	·000	—·588	0.588	8.5	19.9	28.4
8	3	—1	96.0	—·588	—·951	0.363	5.3	20.0	25.3
9	3	0	73.7	—·951	—·951	0.000	0.0	20.0	20.0
10	4	—2	59.9	—·951	—·588	—0.363	—5.3	19.9	14.6
11	4	—1	59.9	—·588	—·951	0.363	5.3	20.0	25.3
12	4	0	73.7	·000	—·951	0.951	13.8	20.0	33.8
13	5	—2	96.0	·588	—·588	1.176	17.1	19.9	37.0
14	5	—1	118.3	·951	—·951	1.902	27.6	20.0	47.6
15	5	0	132.1	·951	—·951	1.902	27.6	20.0	47.6
16	6	—2	132.1	·588	—·588	1.176	17.1	19.9	37.0
17	6	—1	118.3	·000	—·951	0.951	13.8	20.0	33.8
18	6	0	96.0	—·588	—·951	0.363	5.3	20.0	25.3
19	7	—2	73.7	—·951	—·588	—0.363	—5.3	19.9	14.6
20	7	—1	59.9	—·951	—·951	0.000	0.0	20.0	20.0
21	7	0	59.9	—·588	—·951	0.363	5.3	20.0	25.3
22	8	—2	73.7	·000	—·588	0.588	8.5	19.9	28.4
23	8	—1	96.0	·588	—·951	1.539	22.3	20.0	42.3
24	9	0	118.3	·951	—·951	1.902	27.6	20.0	47.6
25	9	—2	132.1	·951	—·588	1.539	22.3	19.9	42.2
26	9	—1	132.1	·588	—·951	1.539	22.3	20.0	42.3
27	9	0	118.3	·000	—·951	0.951	13.8	20.0	33.8
28	10	—2	96.0	—·588	—·588	0.000	0.0	19.9	19.9
29	10	—1	73.7	—·951	—·951	0.000	0.0	20.0	20.0
30	10	0	59.9	—·951	—·951	0.000	0.0	20.0	20.0

$u = 36\,(t-2)$. $v = 36\,(t-3\,\nu-2)$. $14.51 = 38 \sin 18/\sin 54$.

Heraf følger, at $f \geq 1$, og at f vil ligge desto nærmere ved 1 jo større n er i forhold til l.

Anvendelsen af disse formler er illustreret i tabellerne 6 og 7 for $n = 10$ og $l = 3$. Tabel 6 viser størrelsen af den planlagte produktion beregnet efter formlen

$$B_t = 96 + 38 \sin\,[36\,(t-3)] \tag{68}$$

samt de tilsvarende maskinanskaffelser beregnet efter formlen

$$N_t = N_{t-3\nu} + 38\,\frac{\sin 18}{\sin 54}\left\{\sin\,[36\,(t-2)] - \sin\,[36\,(t-3\nu-2)]\right\}, \tag{69}$$

hvor $N_1 = N_0 = N_{-1} = B_1/3 = 20.0$ og $N_{-2} = 19.9$. Fig. 5 viser forløbet af de to sinusfunktioner og deres differens.

Accelerationskoefficienten bliver lig med

$$\frac{47.6 - 14.6}{132.1 - 59.9}\, 3 = 1.37\,.$$

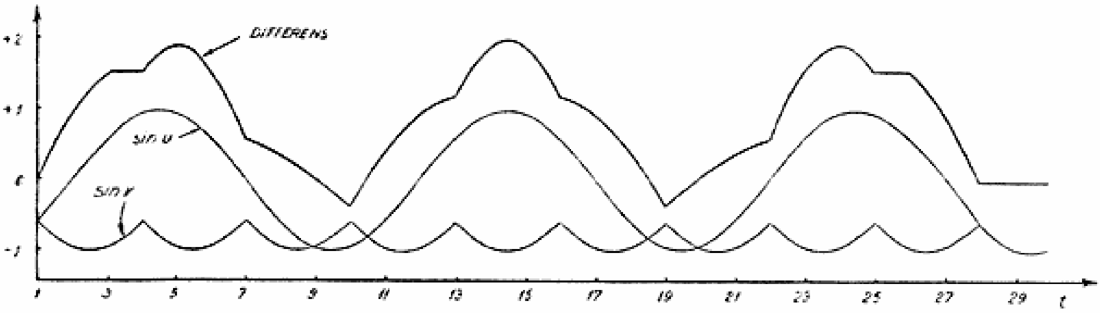

Fig. 5.

Afbildning af de to sinusfunktioner og deres differens, jvf. formel (69) og tabel 6.

Tabel 7 illustrerer anvendelsen af formel (66), der her antager formen

$$N_t = 32 + 14.51 \sin\,[36\,(t - 2)]\,, \tag{70}$$

svarende til værdierne $N_0 = 18.2$, $N_{-1} = 18.2$ og $N_{-2} = 23.5$.

Tabel 7.

Tabellering af B_t og N_t ifl. (68) og (70).

t	B_t	N_t
1	59.9	23.5
2	73.7	32.0
3	96.0	40.5
4	118.3	45.8
5	132.1	45.8
6	132.1	40.5
7	118.3	32.0
8	96.0	23.5
9	73.7	18.2
10	59.9	18.2

Accelerationskoefficienten bliver lig med

$$\frac{45.8 - 18.2}{132.1 - 59.9}\, 3 = 1.15\,.$$

9. Den i kap. 7 fastholdte forudsætning om samme levetid for alle maskiner forlades i kap. 8, hvor der indføres en overlevelsestavle for maskinerne med en dertil svarende middellevetid. Forf. giver ved elementære matematiske metoder en beundringsværdig klar analyse af disse vanskelige problemer.

Det er måske kun godt — i hvert fald for fuldendelsen af denne afhandling — at forf. ikke har bekymret sig om de mange afhandlinger om beslægtede problemer, der er publiceret af matematikere og statistikere, idet han utvivlsomt ville være blevet overvældet af den matematiske teknik, der er bragt i anvendelse. Jeg tænker her på visse dele af befolkningsstatistikken og de stokastiske processers teori, specielt fødsels- og dødsprocesser. Det ligger jo lige for at sammenligne den totale beholdning af maskiner med folketallet og antallet af nyanskaffede maskiner med fødselstallet. Der findes endvidere en righoldig matematisk litteratur specielt om »replacement«-problemer.

Forf. løser det generelle problem om bestemmelse af N som funktion af B ved opstilling af et lineært ligningssystem med $N_t, N_{t-1}, \ldots, N_{t-n+1}$ som ubekendte, idet han først har bevist, at N er periodisk med periodelængde n, såfremt dette gælder for B.

Forf. har imidlertid undervejs selv udledt en formel, der eksplicit giver N udtrykt ved B, jvf. (8.9 a), der kan skrives på formen

$$N_t = B_t \sum_{i=o}^{\infty} \Delta \chi_{in} + B_{t-1} \sum_{i=o}^{\infty} \Delta \chi_{1+in} + \ldots$$

$$\ldots + B_{t-n+1} \sum_{i=o}^{\infty} \Delta \chi_{(n-1)+in}, \tag{71}$$

idet $\Delta \chi_0 = 1$ og $\Delta \chi_\nu = \chi_\nu - \chi_{\nu-1}$.

Denne fremstilling er antagelig i adskillige tilfælde velegnet til direkte fremstilling af N_t ud fra simple matematiske forudsætninger om dødeligheden og produktionen. Man kunne f. eks. forsøge at kombinere $\theta_i = \frac{1}{h}$, d.v.s. samme dødelighed (afskrivning) i alle h tidsenheder, hvorved χ_ν bliver forholdsvis simpel, med B_t fremstillet som en sinusfunktion. En sådan analyse ville være et værdifuldt supplement til de mange taleksempler.

10. Resten af afhandlingen rejser ingen matematiske problemer, som ikke allerede er berørt. Sammenfattende kan jeg sige, at afhandlingen er særdeles klart skrevet, og at de matematiske udredninger er rigtigt og dygtigt gennemført om end med elementære midler. Dette har bevirket, at afhandlingen er blevet noget lang og tung, hvilket vel kan beklages ud fra et matematisk synspunkt, men i hvert fald ikke fra et pædagogisk, når man tager læserkredsens matematiske baggrund i betragtning.

Jeg vil ønske, at forf. må få tid og lejlighed til at fortsætte dette arbejde i to retninger. For det første i empirisk retning med henblik på verifikation og modifikation af modellen, således at parametrene kan estimeres og resultaterne frugtbargøres i praksis. For det andet i statistisk-teoretisk retning, idet mange af de rejste problemer bedst løses indenfor rammen af de stokastiske processers teori.

Hvis ikke forf. selv får tid, hvilket man måske kan befrygte, må man håbe, at en af hans elever vil tage opgaven op. Forf. har haft den lykke at være med til at skabe et miljø for arbejdet med økonomisk teori på Handelshøjskolen. Dette har også haft stor betydning for Universitetet, hvor fakultetets personalepolitik hidtil har været således, at heldagsbeskæftigelse ved videnskabeligt arbejde er forbeholdt professorer, medens yngre videnskabsmænd må tjene til livets ophold ved andet arbejde, hvilket har medvirket til den underproduktion af videnskabeligt arbejdende økonomer, som vi lider under i dag, ikke alene på Universitetet, men også i erhvervslivet og centraladministrationen.

Nu bliver forf. selv ansvarlig for den videre udvikling af miljøet på Handelshøjskolen, og jeg vil håbe, at han derigennem kan medvirke til at frembringe en overproduktion af videnskabeligt arbejdende økonomer i forhold til antallet af lærerstillinger ved de højere læreanstalter, således at vi altid har rigeligt med velkvalificerede ansøgere til ledige stillinger, og således at overskudet må søge stillinger i erhvervslivet og centraladministrationen.

Også i en anden henseende vil forf. komme til at indtage en nøglestilling, nemlig med hensyn til muligheden for som Handelshøjskolens direktør at påvirke erhvervslivets ledere og overbevise dem om, at det betaler sig at ansætte videnskabeligt uddannede økonomer i erhvervslivet og lade dem få forholdsvis frie hænder til at anvende deres viden og fortsat dygtiggøre sig.

Der er god grund til at ønske forf. til lykke med de videnskabelige resultater, han allerede har opnået, og held og lykke med løsningen af de administrative opgaver, som han nu skal i gang med og af hvis løsning arbejdsvilkårerne for mange andre videnskabsmænd afhænger.

Appendiks

1. Bevis for formel (14), (15) og (19).

Af
$$q_t = A_0 + A \sin\varphi \,, \quad \varphi = \frac{2\pi t}{T} - v \,,$$
fås
$$\begin{aligned} \Delta q_t &= A\left[\sin\varphi - \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{T}\right)\right] \\ &= 2A \sin\frac{\pi}{T}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{T}\right) \\ &= 2A\sin\frac{\pi}{T}\left[\cos\varphi\cos\frac{\pi}{T} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{T}\right] \\ &= A\left[a\cos\varphi + (1-b)\sin\varphi\right] \,, \end{aligned} \tag{14}$$

idet mange af de rejste problemer bedst løses indenfor rammen af de stokastiske processers teori.

Hvis ikke forf. selv får tid, hvilket man måske kan befrygte, må man håbe, at en af hans elever vil tage opgaven op. Forf. har haft den lykke at være med til at skabe et miljø for arbejdet med økonomisk teori på Handelshøjskolen. Dette har også haft stor betydning for Universitetet, hvor fakultetets personalepolitik hidtil har været således, at heldagsbeskæftigelse ved videnskabeligt arbejde er forbeholdt professorer, medens yngre videnskabsmænd må tjene til livets ophold ved andet arbejde, hvilket har medvirket til den underproduktion af videnskabeligt arbejdende økonomer, som vi lider under i dag, ikke alene på Universitetet, men også i erhvervslivet og centraladministrationen.

Nu bliver forf. selv ansvarlig for den videre udvikling af miljøet på Handelshøjskolen, og jeg vil håbe, at han derigennem kan medvirke til at frembringe en overproduktion af videnskabeligt arbejdende økonomer i forhold til antallet af lærerstillinger ved de højere læreanstalter, således at vi altid har rigeligt med velkvalificerede ansøgere til ledige stillinger, og således at overskudet må søge stillinger i erhvervslivet og centraladministrationen.

Også i en anden henseende vil forf. komme til at indtage en nøglestilling, nemlig med hensyn til muligheden for som Handelshøjskolens direktør at påvirke erhvervslivets ledere og overbevise dem om, at det betaler sig at ansætte videnskabeligt uddannede økonomer i erhvervslivet og lade dem få forholdsvis frie hænder til at anvende deres viden og fortsat dygtiggøre sig.

Der er god grund til at ønske forf. til lykke med de videnskabelige resultater, han allerede har opnået, og held og lykke med løsningen af de administrative opgaver, som han nu skal i gang med og af hvis løsning arbejdsvilkårerne for mange andre videnskabsmænd afhænger.

Appendiks

1. Bevis for formel (14), (15) og (19).

Af

$$q_t = A_0 + A\sin\varphi\,,\quad \varphi = \frac{2\pi t}{T} - v\,,$$

fås

$$\begin{aligned}\Delta q_t &= A\left[\sin\varphi - \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{T}\right)\right]\\ &= 2A\sin\frac{\pi}{T}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{T}\right)\\ &= 2A\sin\frac{\pi}{T}\left[\cos\varphi\cos\frac{\pi}{T} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{T}\right]\\ &= A\left[a\cos\varphi + (1-b)\sin\varphi\right]\,, \qquad (14)\end{aligned}$$

hvor
$$a = \sin \frac{2\pi}{T} \text{ og } b = \cos \frac{2\pi}{T}.$$

På analog måde fås

$$\Delta^2 q_t = 2A(1-b)[a\cos\varphi - b\sin\varphi], \tag{15}$$

idet relationen $a^2 + b^2 = 1$ udnyttes ved reduktionen.

Formel (19) fås af formel (18) ved anvendelse af følgende formel:

$$B\sin\varphi + C\cos\varphi = \sqrt{B^2 + C^2}\,\sin(\varphi + \eta), \tag{72}$$

hvor
$$\sin\eta = \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}} \text{ og } \cos\eta = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}.$$

2. Bevis for formel (37) og (38).

Først udledes følgende hjælpeformel:

$$\sum_{x=1}^{\infty} 2^{-x} \sin(\alpha + \beta x) = \frac{2\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha}{1 + 4(1-\cos\beta)}. \tag{73}$$

Ved hjælp af omskrivningen

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \tag{74}$$

fås

$$\sum_{x=1}^{\infty} 2^{-x}\sin(\alpha + \beta x) = \frac{1}{2i}\left[e^{i\alpha}\sum_{1}^{\infty} e^{x(i\beta - \log 2)} - e^{-i\alpha}\sum_{1}^{\infty} e^{-x(i\beta + \log 2)}\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\beta + \log 2} - 1} - \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\beta + \log 2} - 1}\right],$$

der let reduceres til ovenstående resultat.

Af (35) og (36) fås ved anvendelse af denne hjælpeformel

$$\bar{q}_{t-1} = \sum_{x=1}^{\infty} 2^{-x}\left[A_0 + A\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{T}x\right)\right]$$
$$= A_0 + A\,\frac{2\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{T}\right) - \sin\varphi}{1 + 4\left(1 - \cos\frac{2\pi}{T}\right)}.$$

Indsættes
$$\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{T}\right) = b\sin\varphi - a\cos\varphi,$$

hvor
$$a = \sin\frac{2\pi}{T} \text{ og } b = \cos\frac{2\pi}{T},$$

fås
$$\bar{q}_{t-1} = A_0 + A\,\frac{(2b-1)\sin\varphi - 2a\cos\varphi}{1 + 4(1-b)}$$

samt
$$q_t - \bar{q}_{t-1} = 2\,A\,\frac{3\,(1-b)\sin\varphi + a\cos\varphi}{1+4\,(1-b)}\,.$$

Ved indsætning i (34) fås

$$o_{t+1} = A_0 + A\left(\sin\varphi + \gamma\,\frac{3\,(1-b)\sin\varphi + a\cos\varphi}{1+4\,(1-b)}\right)$$
$$= A_0 + \frac{A}{1+4\,(1-b)}\Big[(1+(1-b)\,(4+3\,\gamma))\sin\varphi + a\,\gamma\cos\varphi\Big],$$

der ved anvendelse af (72) fører til (38).

3. Bevis for formel (51) og (52).
Af afsnit 1 i appendiks følger, at

$$\Delta\sin\varphi = 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{n}\right),$$

der kan omskrives til

$$\Delta\sin\varphi = 2\sin\frac{\pi}{n}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right),$$

hvilket umiddelbart fører til formel (51).
Formel (52) udledes af (48) og (51) ved anvendelse af hjælpeformlen

$$\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\sin(\alpha + \beta\mu) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\nu-1}{2}\,\beta\right)\sin\frac{\nu\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

idet
$$\alpha = \frac{2\,\pi\,i}{n} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} - v$$

og
$$\beta = \frac{2\,\pi\,l}{n}.$$

Omskrivningen af produktet af de to sinusfunktioner til en differens mellem to sinusfunktioner udføres ved hjælp af formlen

$$2\sin u\sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$
$$= \sin\left(u + v - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(u - v - \frac{\pi}{2}\right).$$