

LINEAR PROGRAMMING

I PRODUKTIONSTEORIEN

III

Af SVEN DANØ¹⁾

VIII. Forudsætningerne for anvendelse af linear programming.

A. I de to foregående artikler²⁾ er det vist, hvorledes en virksomheds produktionsstruktur kan beskrives og dens allokeringsproblemer løses ved hjælp af en lineær programmeringsmodel. Anvendelsen af denne metode bygger på en række postulater og forudsætninger, hvorav nogle er fælles med traditionel marginal produktionsteori, medens andre er specielle for linear programming. Spørgsmålet er nu, om disse forudsætninger kan antages at være opfyldt i virkeligheden og praktisk relevante, og hvad man kan gøre, hvis det ikke er tilfældet.

De fleste af antagelserne kan, som navnet linear programming antyder, formelt rummes under betegnelsen linearitet, taget i videste forstand. De produktions- og allokeringsmodeller, vi har beskrevet, er lineære såvel i selve produktionsrelationerne, og dermed i de betingelser, under hvilke man søger et maximum, som i det udtryk, der bruges som kriterium på optimalitet.

B. For at begynde med det sidste: Vi har overalt forudsat, at profitten er et lineært udtryk i produkt- og faktormængderne, hvadenten det nu er de totale mængder, der indgår i en kontinuert og differentiabel produktionsfunktion, eller det er de mængder, som indgår i den enkelte proces. Dette betyder — foruden at der er constant returns to scale, hvorom senere — at virksomheden antages at være *mængdetilpasset i et fuldkomment konkurrencemarked* for produkter såvel som faktorer. Det vil åbenbart i mange tilfælde være en urealistisk forudsætning, vel især på produksiden.

I traditionel statisk produktionsteori volder dette dog ingen principielle eller analytiske vanskeligheder. Det går uden videre at udlede betingelserne for maximal profit under givne produktionsbetingelser, når produktpriserne

¹⁾ Cand., polit. universitetsadjunkt, Københavns Universitet.

²⁾ Nationaløkonomisk Tidsskrift 1955, hæfte 3-4 og hæfte 5-6. Litteraturhenvisningerne refererer til bibliografien efter den første artikel.

LINEAR PROGRAMMING

I PRODUKTIONSTEORIEN

III

Af SVEN DANØ¹⁾

VIII. Forudsætningerne for anvendelse af linear programming.

A. I de to foregående artikler²⁾ er det vist, hvorledes en virksomheds produktionsstruktur kan beskrives og dens allokeringsproblemer løses ved hjælp af en lineær programmeringsmodel. Anvendelsen af denne metode bygger på en række postulater og forudsætninger, hvorav nogle er fælles med traditionel marginal produktionsteori, medens andre er specielle for linear programming. Spørgsmålet er nu, om disse forudsætninger kan antages at være opfyldt i virkeligheden og praktisk relevante, og hvad man kan gøre, hvis det ikke er tilfældet.

De fleste af antagelserne kan, som navnet linear programming antyder, formelt rummes under betegnelsen linearitet, taget i videste forstand. De produktions- og allokeringsmodeller, vi har beskrevet, er lineære såvel i selve produktionsrelationerne, og dermed i de betingelser, under hvilke man søger et maximum, som i det udtryk, der bruges som kriterium på optimalitet.

B. For at begynde med det sidste: Vi har overalt forudsat, at profitten er et lineært udtryk i produkt- og faktormængderne, hvadenten det nu er de totale mængder, der indgår i en kontinuert og differentiabel produktionsfunktion, eller det er de mængder, som indgår i den enkelte proces. Dette betyder — foruden at der er constant returns to scale, hvorom senere — at virksomheden antages at være *mængdetilpasset i et fuldkomment konkurrencemarked* for produkter såvel som faktorer. Det vil åbenbart i mange tilfælde være en urealistisk forudsætning, vel især på produksiden.

I traditionel statisk produktionsteori volder dette dog ingen principielle eller analytiske vanskeligheder. Det går uden videre at udlede betingelserne for maximal profit under givne produktionsbetingelser, når produktpriserne

¹⁾ Cand., polit. universitetsadjunkt, Københavns Universitet.

²⁾ Nationaløkonomisk Tidsskrift 1955, hæfte 3-4 og hæfte 5-6. Litteraturhenvisningerne refererer til bibliografien efter den første artikel.

i stedet for at være givne parametre er funktioner af de respektive producerede og avsatte mængder (avsætningsfunktionerne), og faktorpriserne tilsvarende afhænger af, hvor store mængder virksomheden vil købe (tilbudsfunktionerne). Produktpriserne blir da blot i den analytiske løsning erstattet med grænseindtægterne, faktorpriserne med grænseudlæggene etc. I de sædvanlige geometriske avbildninger betyder det, at de isokost- og iso-indtægtslinjer, der skal tangere isokvanter og transformationskurver, blir krumme kurver i stedet for rette linjer, at grænseindtægten blir faldende etc. Alt dette er velkendt og skal ikke omtales nærmere her.

I linear programming går det knapt så glat. Den geometriske løsning vil næppe volde vanskeligheder — også langs en ikke-differentiabel isokvant kan man uden videre finde tangeringen med en krum isokostlinje — men den analytiske og numeriske løsning til et programmeringsproblem blir i almindelighed mere kompliceret, når det udtryk, der skal maximeres under en lineær produktionsstruktur, ikke længere er lineært; matematisk er problemet ikke ganske det samme som før. I visse simple tilfælde kan man dog i princippet klare sig med de kendte hjælpemidler. Hvis f. eks. faktorpriserne er givne, alle faktorer er variable, og der kun fremstilles ét produkt, kan man på sædvanlig måde finde minimalomkostningskombinationen for en vilkårlig produktmængde, og man har da samtidig fundet expansionsvejen, idet den samme proces vil være optimal ved ethvert x ; grænseomkostningerne langs denne expansionsvej (der er konstante) kan da let bestemmes, og kender man avsætningsfunktionen, findes det optimale x ved hjælp af betingelsen grænseomkostninger = grænseindtægt. Man ser, hvorledes løsningen udledes ved en kombination av linear-programming-metoder og marginal analyse.

I mere komplicerede tilfælde går det ikke så glat, men der er blevet udledt metoder til analytisk og numerisk løsning av programmeringsproblemer, hvor man approximerer produkternes avsætningskurver og faktorernes tilbudskurver ved rette linjer; profitudtrykket blir da av 2. grad, hvorav betegnelsen »*quadratic programming*»¹⁾. Denne metode er ligesom vort simple eksempel ovenfor en blanding av linear-programming-metoder og marginalanalyse. En anden metode, som kan anvendes ved prisdiskrimination, går ud på, at avsætningskurverne approximeres ved diskontinuerte trinfunktioner²⁾. Vi skal i øvrigt ikke gå nærmere ind på dette.

C. Linear programming, anvendt som vi har gjort det, lader profitmaximering være kriteriet på optimalitet og *postulerer således, at virksomheden handler rationelt*³⁾. Det samme gør i regelen traditionel produktionsteori; vi skal derfor ikke komme nærmere ind på holdbarheden av denne forudsæt-

¹⁾ Jfr. Dorfman (1951), kap. III.

²⁾ Jfr. Charnes, Cooper & Henderson (1953), pp. 19 f.

³⁾ Vi ser her bort fra spørgsmålet om, under hvilken tidshorisont profitten bør søges maximeret.

ning¹⁾), men skal nøjes med at pege på, at det altid vil være relevant at spørge: hvorledes skal en virksomhed handle i en given situation, hvis den skal opnå størst mulig profit? Lineær programmering er en metode til at besvare konkrete spørgsmål av denne type, snarere end en model, der tilsigter en beskrivelse av virksomhedernes faktiske adfærd.

D. Lad os dernæst se på de relationer, som beskriver selve produktstrukturen i virksomheden. Linear programming postulerer en lineær produktionsmodel. Dette vil nærmere sige, at hvis man har en vilkårlig kombination av sammenhørende produkt- og faktormængder, der tilfredsstiller modellen, så vil enhver anden kombination med de samme proportioner mellem inputs og outputs også være mulig indenfor modellen; m.a.o., har man et sæt av relative tekniske koefficienter, definerer de — behørigt normeret — en proces, som kan drives med enhver positiv intensitet, bortset naturligvis fra, at faktorknapheder etc. kan sætte en grænse for expansionen.

Dette linearitetsbegreb²⁾ indeholder, som man vil se, to postulater, der dog hænger nøje sammen. Det forudsætter nemlig dels, at *produkt- og faktormængderne er kontinuerte variable (dvs. delelige)*, dels, at en proportional variation i alle produkt- og faktormængder undtagen én ændrer denne i samme forhold (*constant returns to scale*), således at også procesintensiteterne er kontinuerte (delbare). Det sidste ses at forudsætte det første; omvendt har det været hævdet, at man altid vil få en proportionalitetslov, når produkter og faktorer er fuldt delbare. Det hele er i øvrigt nøje forbundet med spørgsmålet om, i hvilke enheder man skal måle produkt- og faktormængder. Problemet har interesse også for traditionel marginal produktionsteori, der jo kan formuleres i proces-terminologi, når produktionsfunktionen kan forudsættes at være homogen, således at der gælder en proportionalitetslov.

Manglende delbarhed forekommer navnlig i faktormængderne, specielt i den faste kapitaludrustning. Bygninger, maskiner o. lign., der kun anvendes i et ringe antal store enheder i den enkelte virksomhed, er udpræget diskontinuerte variable. Denne omstændighed er imidlertid ikke helt så generende, som det først kunne se ud til. Sagen er jo den, at det ikke så meget er de varige kapitalgenstande selv som deres ydelser, der forbruges i en produktionsproces, kombineret med arbejdskraft og andre løbende inputs; disse ydelser og dermed også den producerede mængde er i almindelighed fuldt ud delbare, således at de kan behandles som kontinuerte variable i modellen. De restriktioner (bibetingelser), under hvilke man søger en optimal løsning i linear programming, vil netop oftest gå ud på, at nogle av faktorerne er

¹⁾ Et forsvar for rationalitetspostulatet findes hos Dorfman (1951), pp. 3 f. og 79 f.

²⁾ I videre forstand omfatter linearitet i et programmeringsproblem alt, hvad der gir anledning til, at problemet formelt kommer til at gå ud på maximering av en lineær funktion under lineære bibetingelser, herunder lineær form på optimalitetskriteriet og additivitet (se nedenfor).

faste (knappe), og for varige faktorerers vedkommende udtrykkes dette ved, at det samlede forbrug av hver enkelt faktors ydelser ikke må overstige faktorens kapacitet målt i ydelsesenheder, f. eks. maskintimer pr. periode. (Restprocessen for den pågældende faktor tar sig da av den udnyttede kapacitet).

Men volder det nu ikke vanskeligheder, at man ikke kender prisen på en enhed av en varig faktors ydelser? Man kender prisen på en maskine av den og den type, men hvad koster en maskintime? Det avhænger av maskinens levetid, og den kender vi ikke med sikkerhed *ex ante*. Hvad hjælper det at ha delbare faktorer, når faktorpriserne ikke er defineret for de samme enheder, og man ikke kan omregne på rationel basis uden vilkårlighed?

Dette behøver imidlertid ikke bekymre os, når de varige faktorer er *faste* faktorer, thi omkostningerne til dem er uden betydning. De faste omkostninger skal betales, uanset hvorledes de givne mængder av faktorydelser i perioden blir fordelt på de forskellige aktive processer og restprocesser, og vi behøver derfor ikke ta hensyn til dem, når vi søger den optimale udnyttelse av anlægget. I de numeriske regninger kan vi, som vi har set, betragte bruttoprofiten — indtægt minus variable omkostninger — som det udtryk, der skal maximeres (ganske svarende til, at de faste omkostninger ikke indgår i grænseomkostningerne ved den sædvanlige marginale betragtning). Vi behøver ikke engang altid indføre de faste faktorerers ydelser som *explicite* variable i modellen; ved enkeltproduktion kan kapacitetsgrænser ligeså godt udtrykkes som restriktioner direkte på procesintensiteterne.

Hvad homogenitet i produktionsfunktionen angår¹⁾ (proportionalitetsloven, *constant returns to scale*), lyder det på forhånd ganske plausibelt, at en fordobling av alle inputs gir den dobbelte produktmængde. Det er naturligvis et empirisk spørgsmål, om de konkrete produktionsfunktioner, man kommer ud for, i almindelighed er homogene. Produktionsfunktionens form og egenskaber avhænger dog til en vis grad av, hvordan man definerer sine inputs og outputs, og i hvilke enheder man måler dem. Hvis man i sin model opererer med teknologisk veldefinerede, homogene inputs, således at to forskellige enheder av samme input er teknisk helt ækvivalente²⁾, har man formentlig større chancer for at få *constant returns to scale* i den pågældende proces, i hvert fald som en brugbar approximation indenfor et rimeligt pro-

¹⁾ For nærmere diskussion av denne forudsætning i almindelighed se f. eks. Chamberlin (1948), Frisch (1946) pp. 64 f., Samuelson (1948) pp. 83 ff., og Schmidt (1939) pp. 279 ff. Specielt med henblik på linear programming se Chipman (1953 b) p. 114 og Dorfman (1951) p. 82 samt Koopmans (1951 a) p. 6.

²⁾ Flere av de gængse lærebogseksempler på ikke-homogenitet i produktionsfunktionen (jfr. eksemplet med kedler, hvis rumfang vokser mere end proportionalt med den mængde metal, der medgår) har deres rod i, at dette krav ikke er opfyldt. Det samme gælder produktionsfunktioner, hvori der optræder et vagt og uklart defineret input »kapital«. — For nærmere diskussion se Schmidt (1939), *loc. cit.*

duktionsinterval; at processen drives i større skala, betyder jo i dette tilfælde simpelthen, at den samme kombination gentages. — Det er i øvrigt ikke altid umuligt at løse programmeringsproblemer, når proportionalitetssloven ikke gælder¹⁾, selv om homogenitet unægtelig er en højst bekvem simplificerende forudsætning.

E. Endnu et postulat av lineær karakter er den forudsætning, at de forskellige processer i et program er *additive*. Denne forudsætning er væsentlig og karakteristisk for linear programming, hvor man typisk vil få løsninger, der er lineære kombinationer av flere processer; i marginal produktionsteori derimod vil sådanne kombinationer i almindelighed være inefficente²⁾.

At en proces er additiv med sig selv, således at man f. eks. kan fordoble samtlige inputs og outputs, der indgår i den, følger allerede av, at der er forudsat constant returns to scale; herudover postulerer linear programming, at også punkter tilhørende forskellige processer kan adderes, faktor for faktor og produkt for produkt. Dette betyder rent konkret, at *de tekniske koefficienter i en proces er uafhængige av, om man samtidig bruger en anden proces*, og uafhængige av dennes intensitet. Det er muligt at tænke sig eksempler, hvor dette ikke er tilfældet; f. eks. kan støj- eller røgplage fra én proces medføre nedsat arbejdsproduktivitet, dvs. større arbejds-koefficient, i en anden. Omvendt kunne man måske også forestille sig processer, der stimulerer og støtter hinanden, påvirker hinandens koefficienter i gunstig retning, når de drives samtidig. Men alt i alt er der næppe grund til at tro, at dette spiller nogen større rolle i de konkrete problemer, man kommer til at stå overfor, undtagen i helt specielle tilfælde.

F. Den avgørende forskel mellem linear programming og marginal produktionsanalyse er den, at der er *diskontinuert substitution* i lineære programmeringsproblemer; der arbejdes med en produktionsfunktion, som er kontinuert, men ikke differentiabel, idet den kan udspændes ved et endeligt antal elementære processer³⁾. Spørgsmålet er nu, hvorvidt dette er relevant og realistisk.

I visse specielle tilfælde ligger det umiddelbart i selve problemets natur, at der kun er et endeligt antal processer. Dette gælder f. eks. diætproblemet, hvor der er én og kun én proces for hvert av de næringsmidler, der indgår i diæten. Men linear programming prætenderer at ha et langt videre anvendelsesområde indenfor produktionsteorien.

Forudsætningen om kontinuert substitution, der ligger til grund for den traditionelle behandling av produktionstilpasningsproblemet, synes ofte at være berettiget indenfor *landbruget*. Her kan samme mængde av produktet

¹⁾ Jfr. Koopmans (1951 a), p. 6.

²⁾ Bortset fra de tilfælde, der omtales av Gloerfelt-Tarp (1937).

³⁾ Dorfman taler derfor om *endeligheds*postulatet, hvor vi taler om diskontinuert substitution. Jfr. Dorfman (1951), pp. 81 ff.

(f. eks. korn) fremstilles med forskellige kombinationer av arbeidsindsats, jordmængde, gødning etc.; det er muligt at variere mængdeforholdet mellem disse inputs infinitesimalt, og ved partiel tilpasning av arbeidsindsatsen på et givet jordstykke får man en proportionslov av den velkendte type. Her er den marginale betragtning åbenbart på sin plads. Dette forudsætter imidlertid, at »jord« er en teknisk homogen produktionsfaktor; hvis der er tale om et (endeligt) antal givne jordstykker av forskellig kvalitet, vil det ofte være naturligt at betragte dem som lige så mange forskellige inputs, og der kommer da et element av diskontinuitet ind i modellen.

Indenfor *industrien* er det særlig substitution mellem arbejdskraft og kapital, der har interesse. Den industrielle udvikling har været karakteriseret ved, at man er gået over til relativt mere kapitalkrævende udstyr og til gengæld har sparet på arbejdskraften. Med nogen velvilje kan denne overgang til højere teknik beskrives som en kontinuert substitution indenfor en produktionsfunktion med arbejde og kapital som inputs, når blot man gør sig klart, at »kapital« lige så lidt som »jord« — eller for den sags skyld arbejdskraft — er en teknologisk homogen produktionsfaktor. Der er tale om et abstrakt kapitalbegreb, som dækker over en hel skala av konkrete fremtrædelsesformer, kvalitativt forskellige og teknisk inkommensurable realkapitalgenstande (redskaber, maskiner av forskellige typer, etc.)¹⁾. Men ved total tilpasning i det lange løb er den teknologiske valgfrihed så udstrakt, at det ikke synes urimeligt at tale om kontinuert substitution; antallet av mulige tekniske processer til fremstilling av samme varemængde er praktisk talt uendeligt²⁾.

Men når vi ser på en konkret industrivirksomheds tilpasning i det korte løb, er problemstillingen en anden. Virksomheden råder over et fast anlæg bestående av en række forskellige realkapitalgenstande eller delanlæg — bygninger, forskellige slags maskineri osv. — og ønsker at udnytte det optimalt, dvs. maximere sin profit indenfor de begrænsninger på handlefriheden, der kommer av, at anlægget er fast. Her er det ikke relevant at betragte anlægget under eet som udtrykt for en bestemt given mængde kapital. Produktionstilpasningen består i, at virksomheden fastsætter de forskellige inputs og outputs, så vidt det er foreneligt med produktionsbetingelserne og faktorrestriktionerne; og at man har et fast anlæg, betyder normalt, at der er flere inputs, som kun findes i begrænset mængde. Der kan f. eks. være flere parallelle eller sideordnede afdelinger, der hver kan producere op til en bestemt kapacitetsgrænse; eller produkterne passerer gennem flere successive produktionstrin med hver sin kapacitet. Der er lige så mange restriktioner

¹⁾ *Brems* — med udgangspunkt i *Jantzen* — understreger stærkt, at hvis »substitution mellem arbejde og kapital« skal dække over en realitet, må det forstås som det, at en type realkapital erstattes av en anden (der også har en anden arbejds-koefficient). Jfr. *Brems* (1952 a), p. 585, og (1952 b), p. 210 f.

²⁾ Jfr. *Dorfman* (1951), pp. 87 ff.

tioner på problemet, som der er faste faktorer. (I et konkret problem har man naturligvis en vis valgfrihed m.h.t., hvor mange variable man vil operere med i virksomhedens produktionsfunktion; et kompleks av inputs kan ofte med fordel betragtes som én faktor. Spørgsmålet må avgøres ud fra hensigtsmæssighedssynspunkter. Det gælder om at få alle relevante kapacitetsgrænser udtrykt i modellen; og de inputs, man opererer med, bør være fuldstændigt teknologisk specificerede og homogene). Man har bundet sig til bestemte konkrete iklædningsformer for kapitalen og kan derfor kun vælge imellem — og eventuelt kombinere — et begrænset antal metoder til fremstilling av produktet¹⁾.

Et eksempel, hentet fra *Dorfman*²⁾, vil gøre dette klart. En virksomhed fremstiller en eller anden vare i et fast anlæg, der er sammensat av flere parallelle »avdelinger«, som ikke er lige effektive; hver afdeling har en bestemt kapacitet. Det kan f. eks. være flere teknisk adskilte bedrifter eller delanlæg, hvor den bedste har et helt moderne kapitaludstyr, medens de øvrige er udstyret med mere eller mindre forældet maskineri; også de to eller tre skift ved flerholdsdrift kan betragtes som sådanne »avdelinger«. Det er nu klart, at det vil afhænge av avsaltningsforholdene for produktet (i et konkurrence-marked: produktprisen), hvor mange av avdelingerne der vil blive taget i brug i en given periode. Kan virksomheden kun lige få dækket omkostningerne i den mest effektive afdeling, vil de øvrige avdelinger ligge stille; ved en noget højere pris lønner det sig at ta den næstbedste afdeling i brug; og så fremdeles. Der blir altså tale om at kombinere flere tekniske fremstillingsmetoder³⁾; hver afdeling (bedrift, skift etc.) har sin tekniske produktionsfunktion. Hvis man specielt antar, at hver av disse produktionsfunktioner er en lineær proces med faste tekniske koefficienter, er tilfældet åbenbart egnet for linear programming. Der er meget, der taler for, at denne antagelse ofte vil være berettiget i industrien, navnlig når det gælder kompliceret maskineri, som er konstrueret til en ganske bestemt bemanning, har et bestemt kraftforbrug etc., således at arbejdstid-, maskintime-, energi- og råstofkoefficienterne er konstante regnet pr. enhed av produktet⁴⁾. Tilfældet gir da anledning til en omkostningsfunktion av form som vist på fig. 10⁵⁾; der er

¹⁾ Det samme gælder selv ved total tilpasning i det ikke-alt-for-lange løb, hvor »teknikken ikke er kontinuert«; når virksomheden skal anskaffe f. eks. en maskine til et bestemt formål, må den vælge mellem det begrænsede antal maskintyper (-modeller), der findes på markedet.

²⁾ Jfr. *Dorfman* (1951), pp. 16 ff. — Tilfældet er allerede omtalt i artikel I, p. 115 note 2.

³⁾ I Gloerfelt-Tarp's terminologi: en heterogen fremstillingsproces.

⁴⁾ Jfr. f. eks. *Dorfman* (1953), p. 803. — *Brems* har specielt behandlet sådanne processer, se *Brems* (1952 a) og (1952 b).

En forsker som *Jantzen* har altid, ud fra sine erfaringer som praktisk arbejdende tekniker, hævdet, at forudsætningen om faste koefficienter er særdeles realistisk i industrielle produktionsprocesser.

⁵⁾ Artikel I, p. 114.

et knæk i kurven for de variable totalomkostninger, og et tilsvarende spring i grænseomkostningskurven, for hver gang man passerer en kapacitetsgrænse og må ta det »næste« anlæg i brug. I store træk kan det samme beskrives ved en kontinuert og differentiabel kurve (den, som man ville få ved partiel tilpasning indenfor en kontinuert produktionsfunktion med »kapital« som fast faktor); men når man i princippet sigter på praktisk anvendelse av modellen til numerisk løsning av konkrete virksomheders tilpasningsproblemer, bør man ikke se bort fra mulige diskontinuiteter, men tværtimod formulere sin model således, at de træder explicit frem. De er jo udtryk for noget højest reelt, nemlig at virksomheden er underkastet et bestemt antal specifikke tekniske kapacitetsgrænser (og har proportionale omkostninger på hvert kapacitetstrin), noget, som man kun kan se bort fra i en meget bred, almindelig, teoretisk beskrivelse av produktionsforholdene.

Nu er dette, som man let ser, et meget specielt eksempel på et lineært programmeringsproblem. Processerne er nemlig ikke interdependente; hvert av de inputs, for hvilke der gælder kapacitetsgrænser, indgår kun i én proces, således at der ikke er nogen faktorrestriktioner, der er fælles for flere processer. Den ene proces tar ikke noget fra den anden av de knappe inputs. Som følge herav kan processerne betragtes uafhængigt av hinanden; for hver enkelt proces gælder det, at hvis profitten pr. enhed produceret i den er positiv, skal man udnytte kapaciteten fuldt ud, og er stykprofitten negativ, skal man indstille driften i den pågældende proces, aldeles uanset intensiteterne i de andre processer. Den optimale løsning er altså umiddelbart indlysende ved inspektion, og man behøver ikke foretage komplicerede linear-programmerings-beregninger, men kan straks udlede omkostningsfunktionen. — Formelt ytrer det specielle ved tilfældet sig i, at man har lige så mange aktive processer, som der er restriktioner, og at den kvadratformede koefficientmatrix for de k faste faktorer, som derved fremkommer, har nuller på alle pladser udenfor diagonalen¹⁾.

	P_1	P_2	...	P_k	Restriktioner
x	1	1		1	
v_1	a_{11}	0		0	$\leq \bar{v}_1$
v_2	0	a_{22}		0	$\leq \bar{v}_2$
$\vdots$					
v_k	0	0		a_{kk}	$\leq \bar{v}_k$
$\vdots$					
v_m	a_{1m}	a_{2m}		a_{km}	

Lad os ta et andet eksempel — ligeledes hentet fra Dorfman²⁾ — hvor der virkelig er tale om interdependente processer, altså processer, som indbyrdes

¹⁾ Ligesom i diætproblemet, hvor der dog er flere produkter.

²⁾ Jfr. Dorfman (1953), p. 798 ff.

konkurrerer om de knappe inputs. En automobilfabrik, der fremstiller 2 produkter: personbiler og lastvogne, består af 4 afdelinger med hver sit faste anlæg, der har en bestemt kapacitet. I den første blir der presset plader, i den anden samlet motorer, og nr. 3 og 4 er samleavdelinger for de to slags automobiler. Personbiler og lastvogne fremstilles i hver sin proces med faste koefficienter, og processerne er interdependente, fordi begge produkter passerer igennem afdeling nr. 1 og 2. Idet v_1-v_4 er de fire afdelinger (eller rettere mængderne af deres ydelser) og v_5-v_m de variable inputs (arbejds-kraft, materialer etc.), medens x_1 og x_2 er produktmængderne, får vi en matrix af følgende form:

	P_1	P_2	Restriktioner
x_1	b_{11}	0	
x_2	0	b_{22}	
v_1	a_{11}	a_{21}	$\leq \bar{v}_1$
v_2	a_{12}	a_{22}	$\leq \bar{v}_2$
v_3	a_{13}	0	$\leq \bar{v}_3$
v_4	0	a_{24}	$\leq \bar{v}_4$
:			
v_m	a_{1m}	a_{2m}	

I et tilfælde som dette slår intuitionen ikke til; den optimale udnyttelse af virksomhedens samlede faste anlæg må beregnes ved lineære programmerings-metoder.

I begge eksempler ser man, hvorledes virksomheden er i stand til at substituere og kombinere diskrete processer. I det første eksempel er dette udtryk for, at man kan fremstille samme vare ved hjælp af et endeligt antal alternative former for realkapital. Dette kan beskrives som en indirekte, diskontinuert substitution mellem arbejdskraft (+ andre variable faktorer) og kapital; men teknisk set er der i virkeligheden snarere tale om en diskontinuert substitution mellem flere slags realkapital, idet hver af dem definerer en proces. I intet af tilfældene er der tale om substitution mellem på den ene side arbejdskraft m.m. og på den anden side en bestemt type realkapital. Det vil sikkert også være vanskeligt at finde praktiske eksempler på, at en given mængde af samme vare kun kan fremstilles ved et endeligt antal alternative kombinationer af de *samme* to konkrete inputs — hvorfor skulle der netop eksistere måske 2 eller 3 mulige sæt af tekniske koefficienter? Det, som gir anledning til et endeligt antal mulige elementære processer, er snarere, at der *kun findes et endeligt antal kvalitativt forskellige inputs* (det første eksempel ovenfor) eller et endeligt antal outputs (det anden eksempel), *der hver definerer sin limitationale proces*. Det er derfor nok mere plausibelt at antage, at enten er der kun 1 mulig proces (en limitational proces) for hver type realkapital, og i så fald er der ikke andre substitutionsmuligheder end

at erstatte den ene konkrete type realkapital (f. eks. maskintype) med den anden; eller også er der både kontinuert teknisk substitution mellem arbejdskraft og hver enkelt maskines ydelser, og valg mellem forskellige maskintyper¹⁾. I det første tilfælde — det, som umiddelbart er egnet for linear programming — skal man altså næppe vente at finde flere processer, som har alle inputs fælles, men snarere processer, som avviger ved, at der ikke indgår de samme inputs i dem; m. a. o., der vil i almindelighed være en del nuller i matricen. (Grafisk viser det sig i, at todimensionale diagrammer som fig. 5—7 ikke vil kunne forekomme; for hver ny proces, der indføres, kommer der samtidig en ny dimension ind, og de forskellige processtråler ligger ikke længere i samme plan). Men det er på den anden side klart, som allerede nævnt, at kontinuert substitution — det andet tilfælde — kan approximeres ved et endeligt antal processer, og i så fald vil der optræde flere alternative kombinationer af de samme faktorer (fig. 8).

G. Det fremhæves endelig som karakteristisk ved linear programming, at denne metode explicit bringer til udtryk, at *de indgående variable skal være ikke-negative*²⁾; en komplet liste over de bibetingelser, under hvilke profitten skal maximeres, omfatter også det krav for hver enkelt intensitet, at den skal være større end eller lig med nul, således at optimum må søges blandt de ikke-negative løsninger til ligningssystemet. En løsning med negative intensiteter har ikke nogen økonomisk mening, eftersom man normalt ikke kan vende en produktionsproces på hovedet og fremstille inputs af outputs.

Imidlertid må det være underforstået som en selvfølge i al økonomisk teori, at man ikke kan bruge løsninger til en model, som er økonomisk meningsløse, f. eks. — med visse undtagelser — negative priser og mængder. Der må altid stiltiende gælde et sæt »boundary conditions«, som forbyder noget sådant, og der kan let nævnes eksempler på, at en løsning forkastes, fordi den antages at implicere en negativ pris el. lign.³⁾. I alle numeriske modeller, ikke blot linear-programming-modeller, må kravet om ikke-negativitet explicit udtrykkes ved de fornødne boundary conditions⁴⁾.

H. De linear-programming-modeller, vi har beskrevet, er rent *statiske*; der er ikke tale om, at man betragter flere perioders produktion og kæder

¹⁾ Det sidstnævnte, mere generelle tilfælde er behandlet af *Gloerfelt-Tarp*, der viser, hvorledes også det — ligesom det første tilfælde, der må behandles ved linear programming — gir anledning til kombination af flere fysisk adskilte produktionsprocesser. Jfr. *Gloerfelt-Tarp* (1937), pp. 270 f.

²⁾ En anden sag er, at inputs ofte — således i input-output-analysen — bekvemt kan betragtes som negative outputs. Ikke-negativitetskravet refererer sig til procesintensiteterne.

³⁾ Jfr. f. eks., at *Klein* forkaster den klassiske renteteori, når skæring mellem opsparings- og investeringskurven gir negativ rente. Se Lawrence R. Klein: *The Keynesian Revolution*. London, 1950, pp. 84 f.

⁴⁾ Således f. eks. i J. Tinbergen: *On the Theory of Economic Policy*. Amsterdam, 1952.

dem sammen. Der er imidlertid intet i vejen for, at modellen kan generaliseres på dette punkt, således som det kan være relevant, når man interesserer sig for en virksomheds vækst i tiden. Der kan da f. eks. blive tale om interdependens i tiden derved, at en periodes output optræder som input i næste periode. Man får da en dynamisk model, som meget ligner den statiske. Vi skal i øvrigt ikke gå nærmere ind på dette¹⁾.

IX. Afsluttende bemærkninger.

A. Vi skal nu forsøge at gøre op, hvilke konklusioner der kan drages af det foregående, specielt m.h.t. linear programming's teoretiske og praktiske anvendelighed.

Den neoklassiske produktionsteori kendte stort set kun de to i en vis forstand ekstreme tilfælde m.h.t. produktionsfunktionens form: limitationalitet (dvs. fuldstændig mangel på substitutionsmuligheder) og kontinuert substituerbarhed indenfor en differentiabel produktionsfunktion. Man kan sige, at man først i den sidste halve snes år har fået udfyldt mellemrummet, idet linear programming har behandlet de tilfælde, hvor der kun er et endeligt antal elementære sæt av tekniske koefficienter (omend disse diskrete processer kan kombineres lineært i ethvert forhold).

Så helt nyt er det dog ikke alt sammen — naturligvis, fristes man til at sige, har der været tilløb fra forskellige sider.

Det er således et gammelt og velkendt trick at *approximere en ikke-lineær funktion i økonomien ved successive lineære trin*. En generel behandling av *egentlige diskontinuiteter i produktionsfunktionen* (eller rettere: i dens partielle afledede) er givet av *Samuelson*²⁾. Udgangspunktet er et lidt andet end i linear programming, idet formålet ikke alene er analytisk beskrivelse og udledning av det optimale tilpasningspunkt, men nok så meget er at udlede restriktioner på formen av faktorefterspørgselsfunktionerne. Men hans behandling av diskontinuiteter er mere generel end linear programming, idet den ikke forudsætter, at produktionsfunktionen er homogen, eller at isokvanter og produktivitetskurver er sammensat av rette linjestykker; det er tilstrækkeligt, at de har knæk i et antal punkter. — Til gengæld gir den ikke som linear programming en metode til analytisk og numerisk løsning av konkrete allokeringsproblemer.

Selve *procesbegrebet*, der spiller en central rolle i linear programming, er en gammel travet; *Walras'* konstante tekniske produktionskoefficienter bygger på den samme tankegang, og den limitationale produktionsmodel for den enkelte virksomhed har længe været kendt (ordet limitational er dannet av *Frisch*). Den tanke, at flere processer kan kombineres, således at der frem-

¹⁾ Der henvises til Dorfman (1953), p. 822, og (1951), pp. 86 ff.

²⁾ Jfr. Samuelson (1948), pp. 70—81.

kommer en afledet proces, har som tidligere nævnt været foregrebet af *Gloerfelt-Tarp* — omend med et noget andet sigte end det, som linear programming tar — der også som den første behandlede rester i en produktionsmodel ved hjælp av *restprocesser*. Og med *Zeuthen's* teorem: at ved faste tekniske koefficienter vil man, når man har flere metoder med forskelligt forhold mellem ydelserne, anvende begge metoder, så længe ydelserne findes i et forhold, der ligger imellem de til produktionsmåderne svarende forhold¹⁾, forelå hovedideen i linear programming — at der kan være diskontinuert substitution, og at dette kan gi anledning til kombination av flere processer — faktisk klart udtrykt; der manglede kun det formelle analytiske apparat til numerisk løsning av konkrete problemer.

Trods disse tilløb nåede den neoklassiske produktionsteori ikke til at indbygge tilfældet med diskret substitution i den almindelige teori for virksomhedens tilpasning. Og set udfra et abstrakt teoretisk synspunkt er det vel ikke så mærkeligt. Den »rene«, formelle økonomiske teori plejer ikke at beskæftige sig med diskontinuiteter, når den kan undgå det, efter at grænsebetragtingen er blevet indført som analytisk hjælpemiddel i den økonomiske teori. Man antar fuld delbarhed, når det ikke er i alt for åbenbar strid med realiteterne, og forudsætter i det hele taget kontinuitet på alle leder og kanter; ellers er det jo ikke muligt at bruge infinitesimalregning, der unægtelig også er et højest bekvemt analytisk redskab og fører til »pæne« løsninger²⁾. Når kontinuitetsforudsætningen kan antages i store træk at dække de virkelige forhold, er der så vist ingen grund til at bruge en diskontinuert model som approximation i teorien.

Men hvor der virkelig er tale om betydelige og øjensynlige diskontinuiteter — valg mellem et begrænset antal diskrete alternativer — kommer en realistisk model ikke uden om at ta hensyn dertil; ganske særligt gælder dette om en model, der prætenderer at kunne bruges ved praktisk, numerisk løsning av konkrete virksomheders tilpasningsproblemer på rationelt grundlag. Her kommer linear programming ind som en praktisk operationel metode, når også de øvrige forudsætninger — som vi har gjort rede for ovenfor — kan antages at være opfyldt med rimelig tilnærmelse; det gælder da om at bestemme de tekniske koefficienter i de enkelte processer, hvad der ofte er meget simpelt.

B. Om disse forudsætninger er tilstede i en konkret situation, kan i almindelighed ikke avgøres fuldstændigt ud fra aprioriske overvejelser. Man

¹⁾ Jfr. Zeuthen (1942), p. 66.

Det var også Zeuthen, der fandt på at indføre rester som *explicite variable* i Walras' model, se Zeuthen (1932).

²⁾ Når *Samuelson* (Samuelson (1948) p. 81) hævder, at det generelle diskontinuerte tilfælde i virkeligheden er simplere end det specielle kontinuerte, skal det åbenbart tages med en skefuld salt.

må gå den møjsommelige vej, at man i detaljer undersøger — foruden naturligvis markedsforholdene — den teknologiske struktur af den pågældende virksomhed, enten udfra foreliggende statistiske data for variationer i inputs og outputs eller ved at spørge ingeniørerne. Den sidste metode må vel som regel antages at gi de mest fuldstændige resultater, bl. a. fordi der sjældent vil foreligge statistiske data, som dækker tilstrækkeligt store variationsintervaller for in- og outputs. Der er normalt mere at hente hos teknikerne, som har det mest indgående kendskab til produktionsprocessernes fysiske og kemiske grundlag og til deres praktisk-industrielle udformning.

Mærkeligt nok synes der praktisk talt ikke at ha været nogen økonomer, der har interesseret sig for at undersøge konkrete industrielle produktionsprocesser ud fra sådanne synspunkter i samarbejde med teknikerne¹⁾, før spørgsmålet blev påtrængende aktuelt i forbindelse med input-output-analysen, hvor produktionsrelationerne indtar en helt central plads²⁾. Grunden har antagelig været den, at det forudsætter en vis teknisk viden hos økonomerne; ingeniørerne arbejder ikke med sådanne begreber som »produktionsfunktioner«, »faktorer« osv. — disse begreber er dem i regelen aldeles fremmede — og det kræver derfor et ret vanskeligt »oversættelsesarbejde« i samarbejde med ingeniørerne, før man kan udnytte teknologiske data som empirisk basis for økonomiske produktionsmodeller. Men i princippet må det altid være muligt at foretage oversættelsen, idet man med udgangspunkt i de tekniske (fysisk-kemiske) relationer, som ingeniørerne leverer, eliminerer de variable, som ikke har direkte økonomisk relevans, således at man ender med en produktionsmodel — ikke nødvendigvis bestående af kun 1 relation — hvori der kun indgår inputs og outputs i økonomisk forstand, foruden naturligvis en række parametre. At dette er muligt, turde fremgå af, at det, som virksomhedernes praktikere til syvende og sidst ser som deres opgave, netop går ud på at kombinere inputs og outputs med henblik på økonomisk tilpasning.

Først når man således har dannet sig et indtryk af den teknologiske struktur, under hvilken den økonomiske tilpasning skal finde sted, kan man sige, hvilken analytisk metode der er den relevante til at behandle det konkrete problem med³⁾.

Det er således klart, at hvis ingeniørerne ligefrem kan levere et sæt fysiske og kemiske relationer, som fører til en kontinuert og differentiabel produktionsfunktion, så vil den traditionelle produktionsanalyse i princippet kunne anvendes direkte til numerisk løsning af virksomhedens allokeringsproblem (omkostningsminimering, profitmaximering). Hvis den tekniske information

¹⁾ Se dog Frisch (1935).

²⁾ Jfr. her Leontief and others (1953), Part IV.

³⁾ De praktiske problemer, der blir tale om at løse, vil naturligvis i almindelighed være væsentligt mere komplicerede end de simple teoretiske modeller, der er analyseret ovenfor.

derimod foreligger i form af kendskab til et antal diskrete processer, og dette kan antages at være udtryk for virkelig diskontinuitet i substitutionsmulighederne — dvs. at kontinuert substitution er fysisk umulig, eller at den i hvert fald er udelukket i den konkret foreliggende situation, fordi man er bundet til et bestemt fast anlæg eller til et begrænset antal maskintyper etc. — kan der blive tale om at bruge linear programming, hvis de øvrige forudsætninger for anvendelse af denne metode ellers er tilnærmelsesvis opfyldt.

Er situationen den, at vi nok kun kender et begrænset og diskontinuert udvalg af lineære processer, men at disse kan opfattes som et udpluk fra en kontinuert og i princippet differentiabel produktionsfunktion, så kan man principielt bruge begge metoder, idet man enten søger at tilpasse en matematisk funktion af passende form til sine tekniske data, bestemmer konstanterne i denne produktionsfunktion og derpå løser sit problem ved marginale metoder, eller man lader, som om der virkelig er diskontinuitet, og bruger linear programming som en art interpolationsmetode. Gør man det sidste, må man som omtalt ovenfor blot være klar over, at tolkningen af en løsning, som er en sammensat (afledet) proces, blir en anden, end hvis der virkelig havde været diskontinuitet i substitutionen.

Imidlertid, det meste af dette må forblive hjernesvind, indtil man har set nogle eksempler på konkret anvendelse af linear programming til numerisk løsning af allokeringsproblemer i virksomheder. Der foreligger enkelte sådanne undersøgelser¹⁾, men man kan næppe på indeværende tidspunkt sige noget med sikkerhed om, hvor stort et anvendelsesområde linear programming vil få på dette felt. En vis skepsis er måske på sin plads; det forekommer en lille smule suspekt, at de få konkrete eksempler, der foreligger, fortrinsvis drejer sig om processer, der går ud på simpel *blanding* af ingredienser (f. eks. fremstilling af forskellige benzintyper ved blanding af forskellige råoljedestillater)²⁾. Her har man naturligvis størst chance for at få opfyldt forudsætningerne for linear programming — en simpel fysisk blandingsproces vil vel ofte være så at sige naturligt homogen og additiv, jfr. diætproblemet — men man ville gerne se metoden anvendt også på »egentlige«, mere komplicerede produktionsprocesser. Men det må unægtelig indrømmes, at det også skorter på eksempler, hvor den traditionelle produktionsteori er blevet anvendt direkte til at løse konkrete numeriske problemer. Vort empiriske kendskab til enkelte firmaers produktionsfunktioner er endnu såre

¹⁾ Især bør nævnes de undersøgelser, der er foretaget af Charnes m. fl. (se bibliografien).

²⁾ Jfr. især Charnes m. fl. (1952). Se også Danø (1955).

Koopmans' transportproblem — jfr. Koopmans (ed.) (1951 a), kap. XIV; se også Gale & Danø (1954), pp. 25 f. — er ligeledes et meget specielt »produktions«-problem. Det samme gælder Hildreth & Reiter's anvendelse af linear programming på avgrøderotation i landbruget, se Koopmans (ed.) (1951 a), kap. XI.

begrænset¹⁾), skønt det måtte synes en vigtig opgave at få lidt mere hold på disse ting, lige så vigtigt som at undersøge f. eks. efterspørgselsfunktioner. Det er nødvendigt både for den økonomiske teoris egen skyld — den rene produktionsteori svæver stadig lovlig frit i luften — og med henblik på praktiske anvendelser.

¹⁾ Det er betegnende for den almindelige forvirring, at mange forfattere fremhæver kemiske forbindelser som skoleeksempler på produktion med limitationalitet, medens andre hævder, at den kemiske industri netop er et område, hvor man i mange tilfælde vil kunne vente kontinuert substitution, — samtidig med, at de vigtigste eksempler på anvendelse af linear programming på en konkret virksomheds produktionsproblemer drejer sig om benzinproduktion, altså fremstilling af et kemisk produkt.

Hermed være ingeniørerne sagt, at kun en af de tre modeltyper kan være relevant i denne industri-gruppe. Det er tværtom meget sandsynligt, at der kan findes talrige eksempler på alle tre. Man skal blot være forsigtig med at generalisere, så længe det empiriske grundlag er så svagt.