LINEAR PROGRAMMING I PRODUKTIONSTEORIEN II

Af SVEN DANØ

VI. Analytisk og numerisk løsning av tilpasningsproblemet ved linear programming.

A. I en foregående artikel[1]) er der gjort rede for den særlige form, en virksomheds produktionsfunktion og dermed dens tilpasningsproblem antar, når der i stedet for en kontinuert skala av substitutionsmuligheder kun står et endeligt antal processer (sæt av tekniske koefficienter) til rådighed. Vi skal nu vise, hvorledes allokeringsproblemet kan løses analytisk og numerisk i disse tilfælde, hvor den marginale analyse ikke kan anvendes, fordi funktionerne ikke er differentiable.

Virksomheden antages kun at ha et endeligt antal processer til rådighed, og ud fra denne teknologiske viden (de tekniske proceskoefficienter) og kendskabet til markedsforholdene (her priserne) søger den at maximere sin profit, idet der iøvrigt som bibetingelser er givet visse restriktioner på de disponible faktormængder eller en specifikation av, hvor meget der ønskes produceret.

De teknologiske data — de tekniske koefficienter — kan skrives op i en tabel (matrix), hvor hver kolonne (søjlevektor) repræsenterer de tekniske koefficienter i en proces:

	P_1	P_2	...	P_n
x	1	1		1
v_1	a_{11}	a_{21}		a_{n1}
v_2	a_{12}	a_{22}		a_{n2}
.				
.				
.				
.				
v_m	a_{1m}	a_{2m}		a_{nm}

Tabellen læses på den måde, at til fremstilling av 1 enhed av produkte i proces nr. i (P_i) medgår der a_{i1} enheder av faktor nr. 1, a_{i2} enheder av

[1]) Nationaløkonomisk Tidsskrift 1955, hæfte 3-4. Litteraturhenvisningerne refererer til bibliografien efter denne første artikel.

LINEAR PROGRAMMING I PRODUKTIONSTEORIEN II

Af SVEN DANØ

VI. Analytisk og numerisk løsning av tilpasningsproblemet ved linear programming.

A. I en foregående artikel[1]) er der gjort rede for den særlige form, en virksomheds produktionsfunktion og dermed dens tilpasningsproblem antar, når der i stedet for en kontinuert skala av substitutionsmuligheder kun står et endeligt antal processer (sæt av tekniske koefficienter) til rådighed. Vi skal nu vise, hvorledes allokeringsproblemet kan løses analytisk og numerisk i disse tilfælde, hvor den marginale analyse ikke kan anvendes, fordi funktionerne ikke er differentiable.

Virksomheden antages kun at ha et endeligt antal processer til rådighed, og ud fra denne teknologiske viden (de tekniske proceskoefficienter) og kendskabet til markedsforholdene (her priserne) søger den at maximere sin profit, idet der iøvrigt som bibetingelser er givet visse restriktioner på de disponible faktormængder eller en specifikation av, hvor meget der ønskes produceret.

De teknologiske data — de tekniske koefficienter — kan skrives op i en tabel (matrix), hvor hver kolonne (søjlevektor) repræsenterer de tekniske koefficienter i en proces:

	P_1	P_2	...	P_n
x	1	1		1
v_1	a_{11}	a_{21}		a_{n1}
v_2	a_{12}	a_{22}		a_{n2}
.				
.				
.				
.				
v_m	a_{1m}	a_{2m}		a_{nm}

Tabellen læses på den måde, at til fremstilling av 1 enhed av produkte i proces nr. i (P_i) medgår der a_{i1} enheder av faktor nr. 1, a_{i2} enheder av

[1]) Nationaløkonomisk Tidsskrift 1955, hæfte 3-4. Litteraturhenvisningerne refererer til bibliografien efter denne første artikel.

faktor nr. 2, etc. En del av a'erne kan godt være nul. Når de tekniske input-koefficienter således er beregnet pr. enhed av produktet, er det praktisk at supplere dem med output-koefficienten 1 i hver enkelt proces. Produceres der nu λ_i enheder av produktet i P_i, vil forbruget av de enkelte faktorer være $a_{i1}\lambda_i$, $a_{i2}\lambda_i$ osv. Den totale mængde av produktet, der fremstilles i alle processerne, blir da

$$x = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

og de totale mængder, der medgår av de enkelte faktorer, blir

$$v_j = a_{1j}\lambda_1 + a_{2j}\lambda_2 + \ldots + a_{nj}\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_i \quad (j = 1, 2, \ldots m).$$

Idet virksomheden nu antages også at kende produktprisen p og faktor-priserne $q_1, q_2, \ldots, q_m$, blir profitten pr. enhed produceret i P_i

$$z_i = p - q_1 a_{i1} - q_2 a_{i2} - \ldots - q_m a_{im} = p - \sum_{j=1}^{m} q_j a_{ij},$$

der er konstant, således at den samlede profit

$$z = z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 + \ldots + z_n\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} z_i\lambda_i$$

blir et lineært udtryk i procesintensiteterne[1]). Det er dette udtryk, det gælder om at maximere.

Problemet at finde den optimale faktorkombination for given produkt-mængde ($x = \bar{x}$), når alle faktorer antages variable (total tilpasning), kan da formuleres således:

$$\text{Find maximum av } z = \sum_{i=1}^{n} z_i\lambda_i$$

$$\text{under bibetingelsen } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \bar{x};$$

m.a.o., det gælder om at finde et av de (her uendelig mange) sæt av λ'er, som tilfredsstiller bibetingelsen, der samtidig gør et lineært udtryk i de samme variable så stort som muligt.

---

[1]) Det vil ofte være praktisk — navnlig når der er flere produkter — at normere en proces efter en anden størrelse end produktmængden; f. eks. kan man definere enheds-niveauet for en proces ved, at *profitten* blir $= 1$; input- og outputkoefficienterne blir da målt pr. enhed av profit (i kr.) i processen (hvorved outputkoefficienten blir $\neq 1$), og intensiteten skal nu tolkes som profitten; den samlede profit blir da simpelthen summen av intensiteterne. — Dette er tilladeligt, fordi der er proportionalitet mellem alle in- og outputs og profitten i hver enkelt proces, når de tekniske koefficienter og priserne er konstante; det er i og for sig ganske ligegyldigt, i hvilken absolut enhed man måler procesintensiteten.

Et problem av denne type vil man dog normalt foretrække at formulere direkte som et *omkostningsminimerings-* i stedet for et *profitmaximerings-*problem. Det er umiddelbart indlysende, at det må gi samme resultat for λ'erne; den løsning, som gør profitten $z=r-c$ størst mulig, vil samtidig gøre omkostningerne c mindst mulig, når salgsindtægten r $(=p\cdot x)$ som her er konstant ifølge forudsætningen. Idet c_i $(=\sum_{j=1}^{m} q_j a_{ij})$ er stykomkostningerne i processen P_i, blir problemet m.a.o.:

$$\text{Find minimum av } c = \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i$$

$$\text{under bibetingelsen } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \bar{x}\,.$$

Når vi således har fundet omkostningerne i det optimale punkt, kan vi altid finde den tilsvarende profit ved at trække dem fra indtægten r; det samme resultat ville vi ha fået, hvis vi med det samme havde formuleret problemet som en maximering av profitten, men det er lettere ikke at gøre det, og der er i hvert fald ingen grund til at blande produktpris og indtægt ind i problemet, når man kun er interesseret i omkostningerne (p er måske ikke engang opgivet, og vi behøver den heller ikke for at finde minimal-omkostningskombinationen).

Er problemstillingen i stedet den, at man søger det optimale produktionsomfang, når en eller flere av faktorerne — f. eks. de k første — er faste, får vi:

$$\text{Find maximum av } z = \sum_{i=1}^{n} z_i\lambda_i$$

$$\text{under bibetingelserne } \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_i = \bar{v}_j \qquad (j=1,2,\ldots,k),$$

hvor $\bar{v}_j$ er den givne mængde av faktor nr. j.

Dette vil sige, at vi maximerer *netto*profitten, idet z er indtægten minus de samlede (faste såvel som variable) omkostninger. Det letter imidlertid beregningerne, om man i stedet maximerer *brutto*profitten, dvs. indtægt minus variable omkostninger. Dette gør åbenbart ingen forskel for resultatet m. h. t., hvilket sæt av λ'er der er optimalt, for hvis $z=r-(a+b)$ er størst mulig — a og b er faste og variable omkostninger — så er bruttoprofitten $z+a=r-b$ det også, når a er konstant; ganske det samme kendes fra traditionel marginal omkostningsteori. Denne ændrede formulering har også den fordel, at man ikke behøver bekymre sig om priserne på de faste fakorers ydelser (her $q_1, q_2, \ldots, q_k$), noget, som ellers kunne gi anledning til besvær. Hvad er f. eks. prisen på en maskintime? Man kan jo ikke forudsige en maskines levetid og kan derfor heller ikke uden vilkårlighed sige, hvad en enhed av maskin-input koster. I linear-programming-problemer av den foreliggende type vælger man derfor altid at maximere bruttoprofitten i stedet for z[1]). Vi må da først beregne indtægt minus variable omkostninger pr. produceret enhed for hver proces, $r_i - b_i \; (= p - \sum_{k+1}^{m} q_j a_{ij})$, og problemet blir da:

$$\text{Find maximum av} \quad r - b = \sum_{i=1}^{n} (r_i - b_i)\lambda_i$$

$$\text{under bibetingelserne} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_i = \bar{v}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Hvad enten man søger minimalomkostningskombinationen eller det optimale produktionsomfang, ser man, at problemet formelt går ud på at maximere et lineært udtryk under lineære bibetingelser; er der ingen sådanne restriktioner på de variable (intensiteterne), har det lineære udtryk intet maximum, og det er bibetingelserne, der knytter processerne sammen (gør dem »interdependente«), f. eks. ved at foreskrive, at de tilsammen kun råder over en bestemt mængde av en bestemt faktor. Der gælder iøvrigt den begrænsning, at de variable ikke må blive negative, altså

$$\lambda_i \geqq 0;$$

en negativ intensitet ville indebære, at processen blev vendt på hovedet, således at man fremstillede faktorer med produktet som inputs, noget, som i almindelighed ikke har økonomisk mening[2]).

Dette er den formelle problemstilling i linear programming. Betegnelsen »linear« refererer til formen på bibetingelserne og optimalitetskriteriet; »programming« angir, at det er et planlægnings- eller tilpasningsproblem, idet et »program« betegner et specificeret sæt av intensiteter, og problemet går ud på at finde et optimalt program, dvs. et, som gør optimalitetskriteriet — her profitten — størst mulig.

---

[1]) Man behøver da heller ikke interessere sig for restprocesintensiteterne i profitudtrykket. Bruttoprofitten i en restproces er nul, idet der ikke indgår andre end faste faktorer i processen. Og det er kun de faste faktorer, der har restprocesser.

De faste omkostninger har intet at gøre med de tilregnede »priser« på de faste faktorer, som man finder ved at løse det s. k. »dual«-problem (se Dorfman (1951) p. 45—52 og (1953) p. 814—819).

[2]) Et sæt av λ'er, der tilfredsstiller bibetingelserne, og som er ikke-negative, kaldes en »*feasible solution*«. Et lineært programmeringsproblem går ud på at finde den blandt alle feasible solutions, der gør det lineære udtryk størst muligt (eller mindst muligt).

Hvis man ikke kræver fuld udnyttelse av samtlige faste faktorer, men kun betragter $\bar{v}_j$ som overgrænse for forbruget av faktor nr. j, får bibetingelserne karakter av uligheder i stedet for ligninger:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_i \leqq \bar{v}_j \qquad (j=1,2,\ldots,k),$$

som udtryk for, at der kan være uudnyttede rester av en eller flere faktorer. Men lægger man resterne til på venstre side, får vi lighedstegn igen; teknisk set gør man dette ved at indføre en restproces for hver av de knappe faktorer. I denne fiktive proces for faktor nr. i er alle in- og outputkoefficienter 0 undtagen for faktor nr. i, hvor den tekniske koefficient er 1, og intensiteten i processen kan da tolkes som den ubenyttede rest av faktor nr. i. Har vi f. eks. 2 faste faktorer, erstatter vi m. a. o. betingelserne

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 &\leqq \bar{v}_1 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 &\leqq \bar{v}_2 \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \lambda_3 \qquad &= \bar{v}_1 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 \qquad + \lambda_4 &= \bar{v}_2; \end{aligned}$$

på denne måde kan man altid forvandle bibetingelserne til ligninger, således at et linear-programming-problem altid kan formuleres som maximering af et lineært udtryk i et sæt variable, der skal tilfredsstille et antal lineære ligninger, og som ikke må blive negative.

Det vil ses — som allerede illustreret ovenfor ved formen på isokvanter og omkostningskurver — at et problem av denne type ikke kan løses analytisk og numerisk ved brug av infinitesimalregning (marginal analyse)[1]). Man har i stedet måttet udvikle en særlig teknik til løsning av de matematiske maximeringsproblemer, som linear programming gir anledning til; kun i helt simple tilfælde som den limitationale model (hvor der kun er 1 aktiv proces) er løsningen så åbenbar, at den kan findes uden videre ved simpel inspektion.

[1]) Hvis man har en kontinuert og differentiabel produktionsfunktion $x=f(v_1, v_2)$ og vil finde minimalomkostningskombinationen for givet $x=\bar{x}$, gøres det lettest ved differentiering av udtrykket

$$p\bar{x} - q_1v_1 - q_2v_2 + k\cdot(f(v_1, v_2) - \bar{x})$$

m. h. t. v_1 og v_2, idet k er en Lagrange-multiplikator; dette gir efter elimination av k

$$q_1/f'_1 = q_2/f'_2 \,(= k),$$

dvs. grænseproduktiviteterne forholder sig som faktorpriserne, og denne relation bestemmer sammen med produktionsfunktionen de to faktormængder v_1 og v_2.

Forsøger man denne procedure på det tilsvarende linear-programming-problem — hvor det nu er λ'erne, der er de ubekendte — ser man, at det udtryk, man får, ikke har en differentialkvotient, der kan blive = 0.

På forhånd kunne problemet synes uoverskueligt, eftersom der i almindelighed, når der er flere ubekendte intensiteter, end der er ligninger — hvad der normalt vil være tilfældet — vil være uendelig mange løsninger at vælge imellem. Nu gælder der imidlertid det fundamentale teorem, at der altid findes en optimal løsning, som er en lineær kombination av højst lige så mange processer, som der er bibetingelser[1]). Er der f. eks. k faste faktorer, dvs. k bånd på de variable, så vil det m. a. o. altid være muligt at opnå den størst mulige profit ved at anvende en kombination av højst k av processerne med positive intensiteter og lade de øvrige være (dvs. drive dem med intensiteten nul); det er muligt, at den maximale profit også kan opnås ved kombinationer av mere end k processer, men sådanne kombinationer behøver vi ikke bekymre os om. — Vi har allerede set et par geometriske illustrationer av denne sætning.

Dette gir åbenbart en fremgangsmåde til at søge en optimal løsning, idet vi systematisk løser alle de systemer av k ligninger i k ubekendte, som man får ved på alle tænkelige måder at sætte så mange av intensiteterne $= 0$, at der kun blir k ubekendte tilbage. Herved får man et antal løsninger for λ'erne, og den eller de av dem, som indsat i profitfunktionen gir den største profit, er en optimal løsning. — Det gør intet, om der skulle være inefficiente processer — altså processer, der er uøkonomiske uanset priserne — med i matricen; de blir automatisk skilt fra under regningerne, idet løsninger, hvori de indgår, viser sig at være inoptimale. Men det letter naturligvis det praktiske regnearbejde, om man på forhånd skiller fårene fra bukkene ved inspektion, hvad man ofte kan til en vis grad[2]).

B. Et taleksempel vil illustrere, hvorledes man går frem. Vi tænker os en virksomhed, der fremstiller én vare og kan gøre det ved hjælp av 2 forskellige processer, hvori der indgår 3 faktorer:

	P_1	P_2
x	1	1
v_1	2	1
v_2	1	3
v_3	4	2

Priserne antages at være $p=12$, $q_1=2$, $q_2=1$ og $q_3=1$.

[1]) Et simpelt bevis findes f. eks. i Gale & Danø (1954), pp. 29 ff. — *Gloerfelt-Tarp* har foregrebet også denne sætning, omend i en speciel anvendelse og uden egentligt bevis. Jfr. Gloerfelt-Tarp (1947), p. 268.

[2]) I det limitationale tilfælde er en minimumsform tilstrækkelig til at udskille inefficiente punkter, jfr. den første artikel p. 98 ff.

Vi tænker os nu først, at virksomheden skal producere 100 enheder og søger den billigste måde at producere denne mængde på. Idet stykomkostningerne i de to processer ses at være henholdsvis 9 og 7, er problemet:

$$\text{Find minimum av } c = 9\lambda_1 + 7\lambda_2$$

$$\text{når vi har} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 100.$$

Da vi kun har 1 bånd på de variable, ved vi på forhånd, at vi kan finde en optimal løsning, hvor kun et av λ'erne er $\neq 0$; her er kun 2 muligheder:

$$\lambda_1 = 100, \text{ der gir } c = 9 \cdot 100 = 900,$$

og

$$\lambda_2 = 100, \text{ der gir } c = 7 \cdot 100 = 700;$$

nettoprofitten blir henholdsvis $z = 1200—900 = 300$ og $z = 1200—700 = 500$. Det bedste er altså at fremstille hele den ønskede mængde i processen P_2. Dette resultat var på forhånd umiddelbart indlysende; vi vidste jo, at omkostningerne pr. styk var lavere, og stykprofitten højere, i P_2 end i P_1, og det er klart, at ingen kombination av de to processer kunne være mere økonomisk, sålænge faktorerne er tilgængelige i det ønskede omfang til uændret pris.

Antag nu i stedet, at produktmængden ikke er givet på forhånd, men at det er en begrænsning på faktortilgangen, der limiterer produktionens omfang. Er der f. eks. kun 20 enheder til rådighed av den første faktor, betyder det — idet bruttoprofitten pr. enhed i de to processer er henholdsvis 7 og 7 — at vi skal maximere udtrykket

$$r—b = 7\lambda_1 + 7\lambda_2$$

under bibetingelsen

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 20;$$

atter blir der 2 muligheder, nemlig

$$\lambda_1 = 10, \text{ der gir } r—b = 70$$

og

$$\lambda_2 = 20, \text{ der gir } r—b = 140$$

(svarende til $z = 30$ resp. 100, idet de faste omkostninger er $a = 40$). Den optimale løsning blir altså, at man fremstiller 20 enheder og gør det i processen P_2 alene; det er muligt at kombinere de to processer, men det vil kun gøre profitten mindre, f. eks. vil kombinationen $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$ kun gi $r - b = 105$, dvs. $z = 65$.

Antag nu, at tilgangen også av faktor nr. 2 er begrænset, f. eks. til 30 enheder; vi skal da maximere under 2 bibetingelser:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 20 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 30, \end{aligned}$$

og bruttoprofitten er nu lig med $8\lambda_1 + 10\lambda_2$ og de faste omkostninger 70. Dette ligningssystem har en entydig løsning, nemlig $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$ (der gir $r - b = 128$ og $z = 58$); når der er 2 betingelser, der skal opfyldes, vil det — bortset fra specielle tilfælde — være bedst at anvende en kombination av 2 processer, og når der som her ikke er mere end 2 processer til rådighed overhovedet, blir der intet valg for virksomheden, intet optimeringsproblem. — Havde vi haft flere end 2 processer, ville de ha givet et spillerum for valg av en optimal løsning.

Løsner vi på kravet om fuld udnyttelse av de faste faktorer (»exakt« opfyldelse av betingelserne), således at ubenyttede rester blir tilladt (»maximal« opfyldelse), må vi indføre en restproces for hver av de faste faktorer; bibetingelserne blir da

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 20 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 &= 30. \end{aligned}$$

De to restprocesser, hvis tekniske koefficienter er (1,0) og (0,1), behandles nu på ganske samme måde som de »aktive« processer; i bruttoprofitudtrykket indgår de begge med koefficienten nul. Om man skal operere med exakte eller maximale bibetingelser, avhænger naturligvis av den konkrete økonomiske problemstilling, men hvis faktorrestriktionerne f. eks. er udtryk for kapacitetsbegrænsninger, må man ha restprocesser med, hvis modellen skal ta hensyn til, at kapaciteter ikke behøver være fuldt udnyttet. Det er åbenbart, at dette gir større spillerum for valg mellem kombinationer av processer, end vi havde, da vi ikke tillod rester; ved at indføre flere processer får man de hidtidige muligheder suppleret med flere, og i visse tilfælde kan det være umuligt at få nogen løsning overhovedet uden brug av restprocesser (f. eks. hvis man har 2 faste faktorer og kun 1 proces; her eksisterer der normalt ingen »exakt« restløs løsning).

En undersøgelse av samtlige muligheder i taleksemplet — idet vi på alle mulige måder sætter 2 av de 4 λ'er lig med 0 og løser de kvadratformede ligningssystemer, som derved fremkommer, indsætter i bruttoprofitten (der stadig er $8\lambda_1 + 10\lambda_2$) og trækker de faste omkostninger (=70) fra — gir følgende resultater for nettoprofitten:

$\lambda_1=6,\ \lambda_2=8$	gir $r-b=128$, $z=58$ (som ovenfor)
$\lambda_1=30,\ \lambda_3=-40$	forkastes, da en rest (her λ_3) ikke kan være negativ
$\lambda_1=10,\ \lambda_4=20$	gir $r-b=80$, $z=10$
$\lambda_2=10,\ \lambda_3=10$	gir $r-b=100$, $z=30$
$\lambda_2=20,\ \lambda_4=-30$	forkastes, da λ_4 ikke må være negativ
$\lambda_3=20,\ \lambda_4=30$	forkastes som meningsløs.

Man ser, at det i dette tilfælde ikke gør nogen forskel, at vi tillader rester; det bedste vil stadig være at kombinere de to aktive processer, således at begge faktorer blir udnyttet fuldt ud. Dette skyldes, at forholdet mellem de givne mængder av de to faktorer (20:30) ligger imellem de proportioner, hvori faktorerne indgår i de to aktive processer (2:1 og 1:3); geometrisk svarer dette til, at det givne faktorpunkt ligger i området mellem de to proces-stråler. Havde faktorerne foreligget i netop en av disse proportioner, havde vi fået en optimal løsning, som kun tog 1 proces i brug[1]). Ligger punktet udenfor de aktive processer, vil løsningen implicere en positiv rest av en av faktorerne, og dette vil gælde uanset antallet av processer, når blot punktet $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ ligger udenfor »substitutionsområdet«. — Man indser uden videre, hvordan den limitationale produktionsmodel fremkommer som et trivielt specialfald; det kan behandles på samme måde, men det vil ikke være videre praktisk, idet løsningen vil være åbenbar allerede ved inspektion.

Indfører vi endnu en (aktiv) proces, blir antallet av løsninger, der skal undersøges, forøget med 4, idet den nye proces kan kombineres med hver enkelt av de hidtidige processer. (Der kommer da et led mere i omkostningsudtrykket). Har man generelt n processer, incl. restprocesser, og k faktorrestriktioner, vil der være ialt $\binom{n}{k}$ kombinationer, der hver indeholder netop k processer; altså $\binom{n}{k}$ ligningssystemer at løse.

C. Når der er mange processer og mange betingelser, blir det dog praktisk uoverkommeligt at undersøge alle sådanne kombinationer; man må da benytte en eller anden metode til at skyde genvej. Der findes flere sådanne metoder til at eftersøge den optimale numeriske løsning til et linear-programming-problem; den mest kendte er den s.k. *simplex*-metode[2]). Princippet i denne iterationsmetode er det, at man begynder med et eller andet sæt av k ikke-negative λ'er, som tilfredsstiller betingelsesligningerne; man prøver da at »forbedre« denne løsning (opnå en større værdi av det udtryk, der skal maximeres) ved at ta en ny proces (et av de øvrige λ'er)

[1]) Hvis man f. eks. havde $\bar{v}_2=10$ i stedet for 30, ville vi få løsningen $\lambda_1=10$, $\lambda_2=0$ som den optimale. — Sådanne tilfælde gir vanskeligheder ved anvendelse av simplex-metoden (»degeneracy«).

[2]) Jfr. f. eks. Charnes, Cooper & Henderson (1953); Chipman (1953 a); Koopmans (ed.) (1951 a), kap. XXI (av G. B. Dantzig, der har opfundet metoden); samt Dorfman (1951), pp. 31 ff.

med ind og til gengæld udskyde en av dem, man startede med. Ud fra en således forbedret løsning gentar man denne procedure, og så fremdeles; man vil da i løbet av et endeligt antal sådanne trin nå en løsning, som det ikke er muligt at forbedre yderligere, og som altså er en optimal løsning.

Dette skal kort illustreres ved eksemplet ovenfor, idet vi tilføjer en femte proces, der forbruger henholdsvis 1.5, 2.5 og 3 enheder av de tre faktorer pr. enhed av produktet. Bruttoprofitten i denne proces blir da, som man ser, 9 pr. produceret enhed, idet de to første faktorer er faste, således at omkostningerne til dem ikke indgår; den samlede bruttoprofit, der skal maximeres, blir da

$$r - b = 9\lambda_5 + 8\lambda_1 + 10\lambda_2.$$

Vi begynder da med kombinationen av processerne 1 og 5 som »*basis*«. De bibetingelser, under hvilke $r - b$ skal maximeres, blir da

$$(1) \qquad \begin{aligned} 1.5\,\lambda_5 + 2\,\lambda_1 &= 20 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ 2.5\,\lambda_5 + \lambda_1 &= 30 - 3\,\lambda_2 - \lambda_4, \end{aligned}$$

idet vi blot har flyttet de processer, der ikke er med i basen, over på højre side; vi betragter nu dette som et system av 2 ligninger i de to basisvariable med de andre variable som parametre. Vi løser for λ_5 og λ_1:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \lambda_5 &= \frac{80}{7} - \frac{10}{7}\lambda_2 + \frac{2}{7}\lambda_3 - \frac{4}{7}\lambda_4 \\ \lambda_1 &= \frac{10}{7} + \frac{4}{7}\lambda_2 - \frac{5}{7}\lambda_3 + \frac{3}{7}\lambda_4. \end{aligned}$$

Indsætter vi denne løsning i det udtryk, der skal maximeres, får vi bruttoprofitten $r - b$ som funktion alene av de procesintensiteter, der *ikke* var med i vor basis; det blir:

$$\mathrm{r} - \mathrm{b} = \frac{800}{7} + \frac{12}{7}\lambda_2 - \frac{22}{7}\lambda_3 - \frac{12}{7}\lambda_4.$$

Hvis vi nu sætter $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ i disse udtryk, får vi den løsning, der svarer til, at kun processerne 1 og 5 blir brugt; løsningen er

$$\lambda_5 = \frac{80}{7},\ \lambda_1 = \frac{10}{7},\ \mathrm{r} - \mathrm{b} = \frac{800}{7}.$$

Men denne løsning er ikke optimal; udtrykket for $r-b$ er nemlig en voksende funktion av λ_2, dvs. en positiv værdi for λ_2 vil gi en større bruttoprofit, end hvis λ_2 var $= 0$. Derimod har λ_3 og λ_4 negative koefficienter i profitudtrykket, således at man gør bedst i at holde dem på nul.

Det vil m.a.o. lønne sig at ta processen P_2 ind i basen. Men λ_2 kan ikke få lov at vokse ubegrænset. Vi ser av udtrykkene (2), at voksende λ_2 vil gøre λ_5 negativ, hvilket ikke er tilladeligt. Grænsen for λ_2 blir m.a.o. dér, hvor λ_5 blir $= 0$, hvilket ses at indtræffe for $\lambda_2 = 8$. (Derimod sætter λ_1 ingen grænse for væksten i λ_2). Det har altså vist sig fordelagtigt at erstatte P_5 med P_2.

Den nye basis, vi således har fået, skal nu i princippet undersøges på ganske tilsvarende måde. Det er dog ikke nødvendigt at begynde helt forfra; den første ligning i (2) ovenfor gir os nemlig let λ_2 udtryk ved λ_5 og de andre variable, og indsættes dette i den anden ligning i (2), får vi λ_1 udtrykt ved de samme variable. Tilsvarende gør vi i profitudtrykket. Vi får da:

$$\lambda_2 = 8 + \frac{1}{5}\lambda_3 - \frac{2}{5}\lambda_4 - \frac{7}{10}\lambda_5$$

(3)

$$\lambda_1 = 6 - \frac{3}{5}\lambda_3 + \frac{1}{5}\lambda_4 - \frac{2}{5}\lambda_5$$

og

$$\mathrm{r}-\mathrm{b} = 128 - \frac{14}{5}\lambda_3 - \frac{12}{5}\lambda_4 - \frac{6}{5}\lambda_5.$$

Denne gang ser vi, at det ikke er muligt at forbedre løsningen yderligere, idet alle koefficienter i profitudtrykket er negative (»*simplex-kriteriet*«), således at positive værdier av λ_3, λ_4 og λ_5 kun vil gøre profitten mindre. Den optimale løsning er altså

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0,\ \lambda_2 = 8,\ \lambda_1 = 6,\ r-b = 128,\ z = 58.$$

(Dvs. samme løsning som ovenfor; det lønner sig ikke at bruge P_5).

Hvis man er omhyggelig i sit valg av basis, kan denne metode ofte føre meget hurtigt frem til den optimale løsning av et lineært programmeringsproblem uden alt for omfattende regninger.

D. I det tilfælde, at man har en kontinuert og differentiabel produktionsfunktion, kan disse metoder ikke anvendes uden videre; man vil ha uendelig mange processer at vælge imellem, således at restriktionerne (f. eks. de givne faktormængder) ville gi anledning til et ligningssystem med uendelig mange ubekendte. Man må i stedet bruge infinitesimalregning — marginal analyse — til at finde den eksakte løsning av tilpasningsproblemet.

Antag f. eks., at vi har en produktionsfunktion av formen

$$x = \sqrt{v_1 v_2}\,,$$

der er homogen av 1. grad, og at faktorpriserne er $q_1 = 1$ og $q_2 = 4$. Antag videre, at opgaven er at finde den faktorkombination, som ved disse faktorpriser er den billigste, når der skal fremstilles 12 enheder av produktet. Vi skal da maximere profitten — eller minimere omkostningerne, hvilket her kommer ud på ét — under bibetingelsen $\sqrt{v_1 v_2} = 12$; vi får da $v_2 = 144/v_1$, og det udtryk, vi skal maximere, blir da, idet vi udtrykker v_2 ved v_1 ved hjælp av bibetingelsen,

$$p \cdot 12 - 1 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 = p \cdot 12 - v_1 - \frac{4 \cdot 144}{v_1}.$$

(Produktprisen p er en parameter, hvis værdi her er uden betydning). Differentierer vi og sætter $= 0$, får vi $v_1 = 24$, og produktionsfunktionen gir da $v_2 = 6$[1]. Dette er den optimale faktorkombination; geometrisk svarer løsningen, der er udtryk for en marginal ligevægt (faktorprisforhold = marginalt substitutionsforhold), til tangeringspunktet mellem isokvanten $\sqrt{v_1 v_2} = 12$ og en isokostlinje av formen $1 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2 = c$.

På tilsvarende måde kan man finde den optimale tilpasning i produktmængden og den ene faktor, når den anden er fast. Dette kan i princippet gøres for produktionsfunktioner med et hvilketsomhelst antal faktorer; man kan enten gøre det direkte i ét trin, eller først bestemme expansionsvejen i de variable faktorer og dernæst finde det punkt på expansionsvejen, hvor grænseomkostninger = grænseindtægt.

Imidlertid *kan* man også bruge linear-programming-metoder til at løse sådanne kontinuerte tilpasningsproblemer, idet man ved at udtage tilstrækkeligt mange processer blandt de uendelig mange, der tilfredsstiller produktionsfunktionen, kan få så god en tilnærmelse, man ønsker; det er dog naturligvis en forudsætning, at produktionsfunktionen er homogen av 1. grad. Et grafisk eksempel er vist på *fig. 12* nedenfor; problemet er her at finde minimalomkostningskombinationen ved givne faktorpriser. Den exakte løsning er punktet A, den tilnærmede B (der kommer til at ligge på en anden isokostlinje).

[1]) Er der flere faktorer, vil det i almindelighed være mere bekvemt at finde de nødvendige maximumsbetingelser, og dermed løse tilpasningsproblemet, ved at bruge en Lagrange-multiplikator i stedet for at eliminere en av de variable ved hjælp av bibetingelsen. Dette vil her sige, at man sætter de partielle differentialkvotienter m. h. t. v_1 og v_2 av udtrykket

$$p \cdot 12 - v_1 - 4 \cdot v_2 - k \cdot (\sqrt{v_1 v_2} - 12)$$

lig med nul; efter elimination av multiplikatoren k (der kan tolkes som grænseomkostningerne) får man da en relation mellem v_1 og v_2 (her $v_1 = 4 v_2$), der indsat i produktionsfunktionen gir løsningen $v_1 = 24$, $v_2 = 6$.

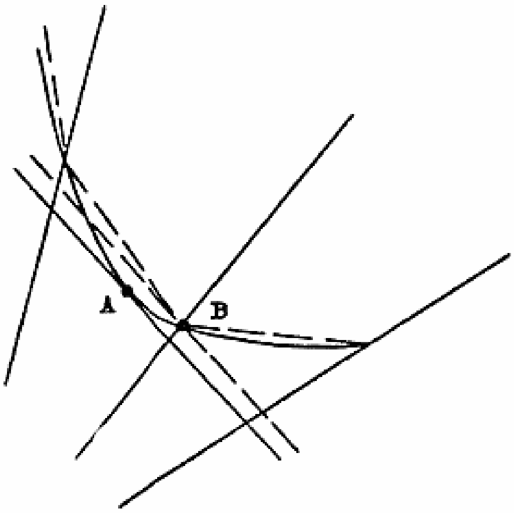

Fig. 12

Et tilsvarende taleksempel får vi ved at approximere produktionsfunktionen ovenfor, $x = \sqrt{v_1 v_2}$, ved følgende 5 processer, der alle tilfredsstiller funktionen:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x	1	1	1	1	1
v_1	5	3	1	$^1/_3$	$^1/_5$
v_2	$^1/_5$	$^1/_3$	1	3	5

Antag, at problemet fremdeles er at finde minimalomkostningskombinationen ved total tilpasning for produktmængden $x=12$, og at faktorpriserne som før er $q_1=1$ og $q_2=4$. Problemet er da at finde minimum av udtrykket for de samlede variable omkostninger

$$\frac{29}{5}\lambda_1 + \frac{13}{3}\lambda_2 + 5\lambda_3 + \frac{37}{3}\lambda_4 + \frac{101}{5}\lambda_5$$

— hvor koefficienterne, som man let forvisser sig om, er stykomkostningerne i de enkelte processer — under bibetingelsen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 12.$$

Som det på forhånd var indlysende, blir den optimale løsning $\lambda_2=12$, der gir de samlede omkostninger 52 svarende til faktorkombinationen $v_1=36$, $v_2=4$. Dette ses at være en temmelig grov tilnærmelse — vi fandt ovenfor, hvor vi regnede med kontinuert substitution, at den optimale kombination var $v_1=24$ og $v_2=6$ — men vi kan forbedre den ved at ta flere av de processer med, som tilfredsstiller produktionsfunktionen[1]); og hvis vi tilfældigvis får den proces med, som er optimal ved kontinuert substitution, vil vi naturligvis få exakt samme resultat ved de to metoder. Dette ville i taleksemplet svare til, at vi havde en 6. proces med blandt mulighederne, nemlig $P_6=(x, v_1, v_2)=(1,2,{}^1/_2)$; i udtrykket for de samlede omkostninger skal vi da tilføje λ_6 med koefficienten 4, og optimum fås da ved $\lambda_6=12$, således at vi får $v_1=24$ og $v_2=6$, det samme resultat, som vi fik i det kontinuerte tilfælde. Dette skulle vi også gerne få, for hvis processen P_6 er den bedste av de uendelig mange processer, der rummes under produktionsfunktionen $x = \sqrt{v_1 v_2}$, så er den også den bedste av et endeligt antal av dem, hvori den selv er indeholdt.

Tilsvarende eksempler kunne opstilles, når problemet er at finde det optimale produktionsomfang, og en eller flere faktorer er faste. Er der flere sådanne faktorrestriktioner, vil man i almindelighed få en løsning, som er en kombination av flere processer. Under diskontinuert substitution må en sådan avledet proces tolkes som *simultan anvendelse av flere adskilte fysiske produktionsprocesser*. Når der derimod eksisterer en kontinuert produktionsfunktion, vil den optimale løsning repræsentere én fysisk proces[2]), og det samme må da gælde den avledede proces, hvormed vi approximerer denne løsning; i dette tilfælde bruger vi kun linear programming som en slags matematisk interpolationsmetode[3]), og der er kun i matematisk henseende tale om flere adskilte processer.

VII. Flervareproduktion.

A. I de foregående avsnit er der gjort rede for, hvorledes man kan anvende lineær programmering til at løse allokeringsproblemer i en virksomhed, der kun fremstiller en *enkelt* vare. Vi skal nu se, hvorledes den samme analytiske teknik kan anvendes ved *flervareproduktion*. Antag først, at der fremstilles 2 produkter, i mængderne x_1 og x_2, ved hjælp av 1 faktor, v. Under forudsætning av, at der er kontinuert produktsubstitution, dvs. at mængdeforholdet mellem x_1 og x_2 ved given faktorindsats kan varieres

[1]) Man ser, hvorledes linear-programming-matricen her kan opfattes som en tabulering av en kontinuert produktionsfunktion; man repræsenterer funktionen ved et endeligt antal blandt de uendelig mange punkter, der indeholdes i den. Den fuldstændige funktion kan ses som en matrix med uendelig mange søjlevektorer (dvs. punkter).

[2]) Bortset fra de tilfælde, som *Gloerfelt-Tarp* omtaler, se ovenfor. Disse tilfælde indebærer, at det undertiden kan være mere efficient at bruge flere processer samtidigt.

[3]) I mange tilfælde en meget brugbar metode til dette formål, p. gr. a. den højtudviklede teknik, man nu råder over til numerisk løsning av lineære problemer.

kontinuert i hvert fald indenfor visse grænser, har man i traditionel produktionsteori en produktionsfunktion av formen[1])

$$\varphi(x_1, x_2, v) = 0,$$

der er defineret som givende den største mængde, der kan fremstilles av det ene produkt, når faktorindsatsen er given, og der samtidig skal fremstilles en given mængde av det andet produkt.

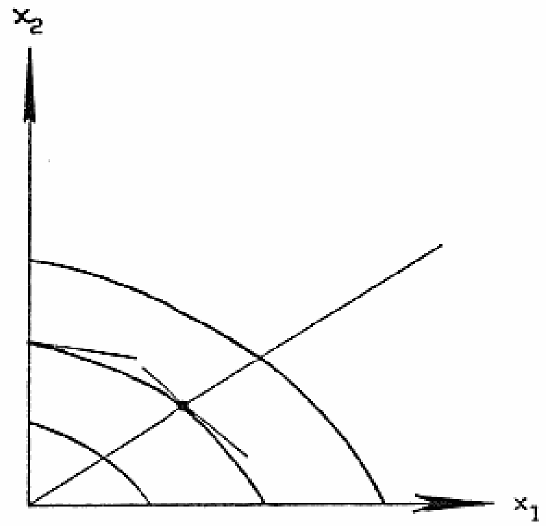

Fig. 13

Grafisk kan denne produktionsfunktion avbildes ved en skare s. k. *transformationskurver* (der ikke skærer hinanden), hver svarende til en given mængde av faktoren v; jfr. *fig. 13.* En transformationskurve viser de kombinationer av de to produkter, som kan fremstilles ved samme faktorindsats; den er helt analog med en isokvant i 1-produkt-2-faktorer-tilfældet, men kan blot aldrig være konveks[2]). Hvis kurven når ud til akserne, er det udtryk for, at det er teknisk muligt at fremstille den ene vare uden samtidig at lave noget av den anden; producerer man alligevel dem begge — fordi det er økonomisk fordelagtigt — foreligger der altså »fællesproduktion« (i modsætning til »forenet produktion« i snævrere forstand, hvor samproduktionen er teknisk nødvendig).

[1]) Flerprodukttilfældet er behandlet f. eks. av Frisch (1953); Hicks (1946), kap. VI med tilhørende appendix; og Schmidt (1939). Se også Dorfman (1951), kap. I.

[2]) Konveksitet er udelukket ved definitionen av funktionen φ som givende den maximale mængde av det ene produkt, dvs. ved efficienskravet; dette udelukker ligeledes, at det marginale transformationsforhold kan være positivt, så kurven krummer tilbage mod nulpunktet udenfor substitutionsområdet.

Den økonomiske tilpasning ved flervareproduktion med 1 faktor er også helt symmetrisk med tilpasningen langs en isokvant i 1-produkt-tilfældet; svarende til omkostningsminimering langs isokvanten har man her problemet at maximere totalindtægten $p_1x_1 + p_2x_2$ for given faktorindsats, dvs. langs en given transformationskurve. Løsningen fås grafisk ved tangering mellem en iso-indtægts-linje $p_1x_1 + p_2x_2 = r$ og transformationskurven, jfr. fig. 13; i dette punkt er det marginale transformationsforhold (det marginale substitutionsforhold i produktionen) lig med forholdet mellem produktpriserne p_1 og p_2. Hvis transformationskurven når ud til akserne (og stadig har negativ hældning), kan det ved visse prisforhold betale sig kun at fremstille den ene av varerne i stedet for at ha fællesproduktion; jo fladere kurven er, des større er chancen for, at man får et hjørnemaximum av denne type. Også dette tilfælde er vist på fig. 13. For varierende faktorindsats (v) får vi da en expansionsvej ud gennem produktplanen; den kan specielt falde sammen med en av akserne. Er der constant returns to scale[1]), blir den en ret linje.

Antag nu, at vi har 2 produktionsfaktorer og en produktionsfunktion av typen

$$\varphi(x_1, x_2, v_1, v_2) = 0;$$

her får vi ligeledes en skare transformationskurver svarende til alle mulige kombinationer av givne mængder av faktorerne, og vi får omvendt en skare isokvanter, der hver svarer til en given kombination av x_1 og x_2. Det gælder ikke længere, at to transformationskurver ikke kan skære hinanden, for samme produktkombination kan netop fremstilles ved forskellige faktorkombinationer, når der er substitution mellem faktorerne. Tilpasningen langs en isokvant eller en transformationskurve er iøvrigt som ovenfor; er f. eks. en av faktormængderne given, får vi en skare transformationskurver svarende til forskellige mængder av den anden, og ved givne priser får vi da en expansionsvej i x_1 og x_2. Langs denne får vi en omkostningsfunktion, der avhænger av både x_1 og x_2, og i det optimale punkt vil prisen (grænseindtægten) for hvert enkelt produkt være lig med de partielle grænseomkostninger ved fremstilling av dette produkt og lig med *opportunity cost* for det andet[2]).

---

[1]) Når vi som her har en implicit funktion, vil constant returns to scale (proportionalitetsloven) svare til, at funktionen er homogen av 0'te grad, ikke av 1. grad.

[2]) Dette får man ved at maximere udtrykket for profitten

$$p_1x_1 + p_2x_2 - q_1\bar{v}_1 - q_2v_2$$

(hvor v_1 er den faste faktor) under bibetingelsen

$$\varphi\ x_1, x_2, \bar{v}_1, v_2) = 0;$$

det gir

$$p_1 = p_2 \cdot \left(-\frac{\delta x_2}{\delta x_1}\right) = q_2 \cdot \frac{\delta v_2}{\delta x_1},$$

der tolkes som angivet.

B. Ligesom dette er en generalisering av 1-produkt-tilfældet ved kontinuert substitution, kan linear-programming-modellen udstrækkes til at omfatte flervareproduktion, når der er diskontinuert substitution, og der iøvrigt er constant returns to scale. Dette gør man simpelthen ved at indføre flere output-koefficienter i den lineære produktionsproces. Hver enkelt proces er således karakteriseret ved fast mængdeforhold mellem de produkter, der fremstilles i processen, og mellem de indgående faktorer. Er der kun 1 proces til rådighed, betyder det, at vi har forenet produktion i fast mængdeforhold med limitationsfaktorer; det modsatte extremtilfælde er den kontinuerte og differentiable (og homogene) produktionsfunktion $\varphi(x_1, x_2, v_1, v_2) = 0$, der tilfredsstilles av uendelig mange processer, således at der er kontinuert substitution indenfor et vist område.

Antag nu først, at vi kun har 1 proces, der fremstiller 2 produkter ved hjælp av 1 faktor. Når der indgår flere produkter, og problemstillingen er at finde, hvor meget man skal lave av hvert av produkterne, når en eller flere faktorer er knappe (faste), vil det være praktisk at normere processen efter bruttoprofitten, dvs. definere enhedsniveauet (intensiteten 1) ved den produktionsskala, hvor salgsindtægt minus variable omkostninger netop er 1 kr. De tekniske in- og outputkoefficienter, som definerer processen, blir da defineret som de mængder av de enkelte produkter, der fremstilles, resp. de faktormængder, der medgår, når der produceres i den skala, som gir bruttoprofitten 1 kr. Vi har da processen

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \cdot z \\ x_2 &= b_2 \cdot z \qquad \text{eller } P = (b_1, b_2, a), \\ v &= a \cdot z \end{aligned}$$

hvor z nu betegner bruttoprofitten; processen fremstiller en ret linje gennem nulpunktet i produkt- og faktorrummet med z som parameter. I et produktdiagram blir projektionen av denne linje en produktstråle (hvor z og v måles ud langs strålen med hver sin målestok), jfr. *fig. 14*. Ethvert punkt

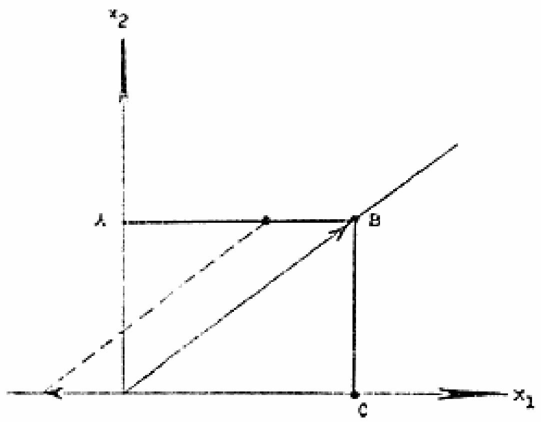

Fig. 14

på denne stråle kan betragtes som en transformationskurve svarende til en bestemt mængde av faktoren v; for $v=\bar{v}$ får vi $x_1=b_1\bar{v}/a$ og $x_2=b_2\bar{v}/a$. Den eneste mulighed for at variere mængdeforholdet ved given v blir da at indføre restprocesser for de to produkter. Man kan da realisere ethvert punkt i rektanglet $OABC$, incl. dets grænser, på fig. 14 som en lineær kombination av processen P og de to restprocesser (der avbildes ud ad de negative halvakser med koefficienterne $(-1,0)$ resp. $(0,-1)$); det betyder, at man kaster noget væk av et av produkterne eller dem begge[1]), og transformationskurven blir da ABC på figuren. Langs AB blir der en rest av x_1, langs BC kaster man noget væk av x_2; kun punktet B er efficient, hvilket også ses av, at iso-indtægtskurven altid vil tangere i B for ethvert sæt av positive priser; m. a. o. kun hvis et av produkterne er værdiløst, vil man betragte det som et avfaldsprodukt, som kan kastes bort (eller destrueres), og expansionsvejen for varierende v vil altid blive strålen gennem B.

Har vi nu i stedet 2 processer til rådighed:

	P_1	P_2
x_1	b_{11}	b_{21}
x_2	b_{12}	b_{22}
v	a_1	a_2

blir der selv uden restprocesser mulighed for at variere mængdeforholdet mellem produkterne ved at kombinere P_1 og P_2; ethvert punkt mellem de to stråler i et produktdiagram kan realiseres som en lineær kombination med positive intensiteter av de to processer, og forbinder man de to punkter på de to stråler, som svarer til faktorforbruget $v=1$, vil ethvert punkt på forbindelseslinjen også forbruge 1 enhed av fektoren. Dette linjesegment er m. a. o. en transformationskurve[2]); hvis man også indfører restprocesser, kan kurven bringes ud til akserne.

For et vilkårligt antal processer og given faktorindsats får man da transformationskurven som en brudt linje, der forbinder efficiente punkter med samme faktorforbrug; den repræsenterer ydergrænsen for de produktmængdekombinationer, der kan fremstilles med den pågældende faktorindsats. På *fig. 15*, hvor der er 4 aktive processer og en restproces for hvert produkt, ser man, hvorledes processen P_3 er inefficient, dvs. den vil være uøkonomisk uanset de relative produktpriser; det teknologiske efficienskriterium udelukker således, at transformationskurven kan være konveks — helt eller stykkevis — i forhold til begyndelsespunktet, men gir i øvrigt

[1]) Jfr. Barfod (1936), pp. 41 f.

[2]) Beviset og den grafiske fremstilling er helt analogt med den tilsvarende udledning av isokvanten ved diskontinuert faktorsubstitution, jfr. artikel I fig. 5 og p. 105 f.

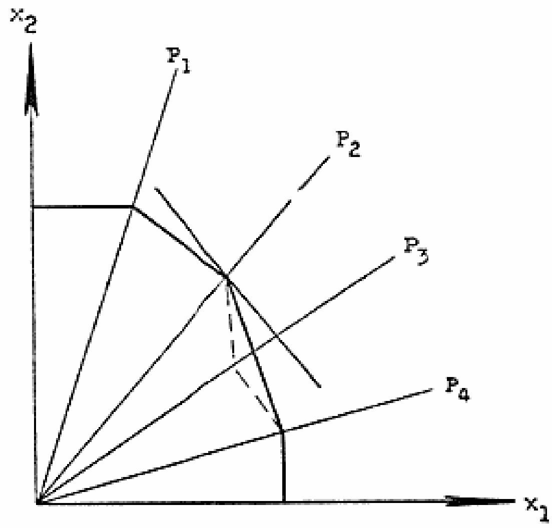

Fig. 15

ikke en entydig bestemmelse av, hvor på kurven man vil havne. Det bestemmes først ved rent økonomiske overvejelser under hensyn til prisforholdene, og det optimale punkt blir dér, hvor en iso-indtægtslinje tangerer transformationskurven, hvilket i almindelighed blir i et hjørnepunkt. Kun hvis 2 av de aktive processer ligger ude langs akserne, er fælles produktion mulig (omend ikke altid økonomisk fordelagtig); i alle andre tilfælde får man forenet produktion i variabelt mængdeforhold.

Det vil ses, at jo flere processer man har til at udspænde transformationskurven, des mere nærmer man sig til den kontinuerte og differentiable produktionsfunktion $\varphi(x_1, x_2, v) = 0$ (se fig. 13); ethvert sæt av (x_1, x_2, v), som tilfredsstiller denne, kan betragtes som tilhørende en av de uendelig mange processer, der udspænder den.

Antag nu, at vi har en proces, hvori der indgår 2 faktorer og fremstilles 2 produkter:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \cdot z \\ x_2 &= b_2 \cdot z \\ v_1 &= a_1 \cdot z \\ v_2 &= a_2 \cdot z \end{aligned} \qquad \text{eller } P = (b_1, b_2, a_1, a_2).$$

Den kan avbildes enten i et faktor- eller i et produktdiagram, med henholdsvis produktmængderne og faktormængderne (og profitten) målt ud langs processtrålen. Er der kun 1 proces, er der ingen substitutionsmuligheder, og expansionsvejen er teknologisk fastlagt, uavhængigt av priserne. Er en av faktormængderne givet, følger de andre størrelser entydigt av de faste tekniske koefficienter; den eneste variationsmulighed består i, at man kan

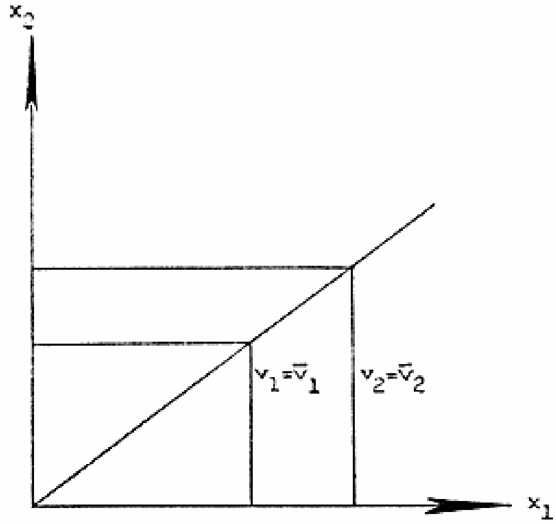

Fig. 16

indføre rester i modellen. Hvis begge faktormængder er givne, $v_1 = \bar{v}_1$ og $v_2 = \bar{v}_2$, får man 2 transformationskurver av samme form som vist på fig. 14 ovenfor, en for hver faktorrestriktion; det må da, som man umiddelbart indser, være den inderste av dem, som blir den aktuelle transformationskurve — i den forstand, at den angir ydergrænsen for de kombinationer av x_1 og x_2, der kan fremstilles, når tilgangen av begge faktorer er begrænset — jfr. *fig. 16*. Der blir en rest av den faktor, som er til stede i rigeligst mængde; exakt opfyldelse av begge betingelser om faktorforbrug er ikke mulig. Er omvendt begge produktmængder på forhånd fastlagte, vil det være den yderste av de to tilsvarende isokvanter i et faktordiagram, der blir aktuel.

Har man valget mellem flere processer, som om fornødent kan kombineres, opstår der derimod et økonomisk optimeringsproblem, idet man ved at gå fra én proces over til en anden kan variere såvel faktorproportionen som forholdet mellem produktmængderne, således at en vis substitution blir mulig. Under visse betingelser kan det da lønne sig at anvende flere processer simultant. Geometrisk avbildes en sådan kombination av 2 processer på samme måde som før ved et kræfternes parallelogram; dette kan gøres både i faktor- og i produktdiagrammet[1]), og resultantens koordinater blir summen av tilsvarende koordinater for komposanterne. Og på samme måde som en isokvant er sammensat av linjesegmenter, der forbinder (efficiente) punkter, som svarer til samme mængde av et produkt — helt som i 1-produkt-tilfældet — vil man ved 2 eller flere processer få en

[1]) Denne konstruktion i 2 samhørende diagrammer er tidligere vist av *Erik Schmidt*; formålet er dog et noget andet, nemlig at generalisere Gloerfelt-Tarp's resultater (se ovenfor) til at omfatte flerprodukttilfældet. Jfr. Schmidt (1939), pp. 290 ff.

transformationskurve for given mængde av en av faktorerne, når man forbinder de dertil svarende punkter på produktstrålerne to og to. Antag f. eks., at vi har 3 aktive processer (foruden restprocesser):

	P_1	P_2	P_3
x_1	b_{11}	b_{21}	b_{31}
x_2	b_{12}	b_{22}	b_{32}
v_1	a_{11}	a_{21}	a_{31}
v_2	a_{12}	a_{22}	a_{32}

Er nu mængden av en av faktorerne givet, f. eks. $v_1 = \bar{v}_1$, sætter dette en grænse for, hvor meget der kan produceres i hver enkelt aktivitet. Processen P_1 kan højst drives med intensiteten $\bar{v}_1/a_{11}$ (når de andre processer intet producerer, så P_1 råder over hele den tilgængelige mængde av faktoren), P_2 højst med intensiteten $\bar{v}_1/a_{21}$, etc. Man kan altså ikke komme længere ud ad de enkelte processtråler end til punkterne $(\bar{v}_1 b_{11}/a_{11}, \bar{v}_1 b_{12}/a_{11})$, $(\bar{v}_1 b_{21}/a_{21}, \bar{v}_1 b_{22}/a_{21})$ osv., når man kun bruger én proces ad gangen; og trækker man forbindelseslinjerne mellem disse punkter to og to, får man en transformationskurve, der angir ydergrænsen for de kombinationer av x_1 og x_2, man kan fremstille ved at kombinere processerne, når der ikke må bruges mere end $\bar{v}_1$ enheder av den første faktor. Dette er vist med den fuldt optrukne brudte linje på *fig. 17*.

Er desuden mængden av den anden faktor begrænset, f. eks. til $v_2 = \bar{v}_2$, gir også denne restriktion en ydergrænse for, hvad der kan produceres; det

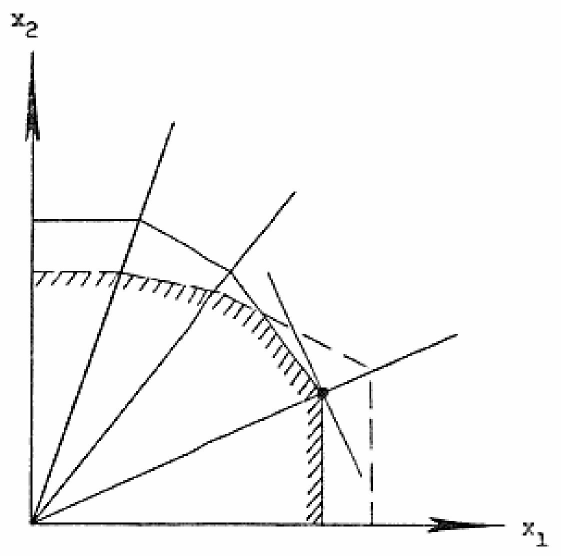

Fig. 17

er vist med den stiplede brudte linje på fig. 17. Når begge restriktioner gælder samtidig, må det være den til enhver tid — dvs. på enhver proces — »inderste« av de to grænser, der blir aktuel. Når de skærer hinanden, vil mulighedsområdet således blive begrænset av en brudt linje, der er sammensat av stykker av de to grænser, og denne brudte linje — vist med skravering på fig. 17 — repræsenterer den transformationskurve, vi får brug for, når vi skal finde det optimale tilpasningspunkt, og som »svarer til« transformationskurven ved kontinuert substitution. — Man kan også komme ud for, at de to grænser ikke skærer hinanden; det blir da den ene faktor — den, som gir den inderste grænse — der hele vejen sætter grænsen for, hvad der kan produceres[1]). Derimod vil det normalt ikke ske, at de to grænser falder helt sammen; herav følger, at man højst i nogle enkelte punkter (skæringspunkterne mellem de to grænser) får exakt opfyldelse av begge faktorrestriktioner.

Det optimale punkt vil da være dér, hvor en iso-indtægtslinje tangerer denne transformationskurve; det vil normalt blive i et hjørnepunkt. I det optimumspunkt, som er vist på fig. 17, er kun den ene faktorrestriktion tilfredsstillet, dvs. der blir en rest av den anden faktor. Man bemærker i øvrigt, ligesom i 1-produkt-tilfældet, at den optimale kombination ikke tar flere processer i brug samtidigt, end der er restriktioner på problemet; i eksemplet er der 2 knappe faktorer, og et av hjørnepunkterne på den skraverede transformationskurve på fig. 17 tar netop 2 processer i brug, medens de andre klarer sig med 1 aktiv proces (+ en restproces for den ene faktor).

C. Et simpelt taleksempel vil illustrere den analytiske fremgangsmåde ved problemer av denne art[2]). Antag, at vi har 3 aktive processer og 2 restprocesser i v'erne med koefficienter som angivet i tabellen nedenfor, og at der højst må bruges 1 enhed av den første faktor og 4 av den anden. Produktpriserne er vist i tabellens sidste kolonne; faktorpriserne interesserer vi os ikke for, da begge faktorer er faste[3]).

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Faktor-tilgang	Priser
x_1	4/20	3/75	0	0	0		5
x_2	0	3/75	5/100	0	0		20
v_1	1/20	1/75	1/100	1	0	1	
v_2	2/20	3/75	5/100	0	1	4	

[1]) Ligesom på fig. 16.

[2]) Eksemplet er så enkelt, at det kan løses uden brug av de specielle beregningsmetoder, der er udviklet. I ikke-trivielle tilfælde må man bruge f. eks. simplex-metoden.

[3]) Indgår der også variable faktorer, må vi naturligvis ta hensyn til deres priser ved beregningen av bruttoprofitten.

Idet de aktive processer er normerede således, at intensiteten 1 svarer til bruttoprofitten (her = salgsindtægten) 1 kr., blir problemet:

Find maximum av $z = r = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

under bibetingelserne

$$\frac{1}{20}\lambda_1 + \frac{1}{75}\lambda_2 + \frac{1}{100}\lambda_3 + \lambda_4 \qquad = 1$$

$$\frac{2}{20}\lambda_1 + \frac{3}{75}\lambda_2 + \frac{5}{100}\lambda_3 \qquad + \lambda_5 = 4$$

(foruden at vi må kræve $\lambda_i \geqq 0$); da vi ved, at der eksisterer en optimal løsning, hvor højst 2 av de indgående intensiteter er forskellige fra nul, løser vi alle de ligningssystemer, vi kan få ved på alle mulige måder at sætte 3 av de 5 λ'er lig med nul i de to betingelsesligninger (bortset fra, at en løsning i λ_4 og λ_5 på forhånd kasseres som meningsløs). Resultatet fremgår av følgende tabel, hvor 4 av de 9 løsninger kan udskydes som økonomisk meningsløse, fordi de gir negative værdier.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	r	Bemærkninger til løsningen
—20	150					ubrugelig
20/3		200/3			$73\frac{1}{3}$	
	75/2	50			$87\frac{1}{2}$	optimal
40			—1			ubrugelig
20				2	20	
	100		—1/3			ubrugelig
	75			1	75	
		80	1/5		80	
		100		—1		ubrugelig

Den optimale løsning ses at være $\lambda_2 = 75/2$, $\lambda_3 = 50$; dette svarer til, at der ialt fremstilles av de to produkter

$$x_1 = \frac{3}{75} \cdot \frac{75}{2} + 0 \cdot 50 \qquad = 1^1/_2$$

$$x_2 = \frac{3}{75} \cdot \frac{75}{2} + \frac{5}{100} \cdot 50 = 4,$$

og de disponible faktormængder blir begge brugt helt op uden rester.

D. Løsningen kan findes grafisk[1]), hvis man konstruerer transformationskurven og tangerer den med en iso-indtægtslinje på tilsvarende måde som vist på fig. 17 ovenfor. Når der højst må bruges 1 enhed av den første faktor, sætter dette en overgrænse for intensiteterne i hver av de tre aktive processer, og dermed en overgrænse for de mængder, der kan produceres av x_1 og x_2 i hver proces taget isoleret:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 \leqq 20, & \text{dvs.} & x_1 \leqq 4 & \text{og } x_2 (\leqq) 0 \\ \lambda_2 \leqq 75, & \text{dvs.} & x_1 \leqq 3 & \text{og } x_2 \leqq 3 \\ \lambda_3 \leqq 100, & \text{dvs.} & x_1 (\leqq) 0 & \text{og } x_2 \leqq 5; \end{array}$$

forbinder man punktet (4,0) med (3,3), og (3,3) med (0,5), i et produktdiagram, får man den ydergrænse for mulighedsområdet, der sættes av knapheden på den første faktor. Den anden faktorrestriktion gir tilsvarende:

$$\lambda_1 \leqq 40, \qquad \lambda_2 \leqq 100, \qquad \lambda_3 \leqq 80,$$

hvilket gir de tre stoppunkter (8,0), (4,4) og (0,4) og dermed en anden ydergrænse for mulighedsområdet. (Mod syd og vest begrænses det av akserne). Man får da transformationskurven ved at ta den til enhver tid inderste av de to ydergrænser, og indtegner man iso-indtægtslinjer med hældningen —5/20 (forholdet mellem produktpriserne, med modsat fortegn), får man tangering og dermed den optimale løsning i punktet $(\frac{3}{2}, 4)$, svarende til den numeriske løsning ovenfor. Dette punkt er tilfældigvis det eneste skæringspunkt mellem de to ydergrænser for mulighedsområdet, altså det eneste punkt, hvor begge faktorrestriktioner er exakt opfyldt; ved et andet prisforhold kunne man ha fået tangering i et punkt, hvor der var blevet en rest av den ene faktor, dvs. en løsning, som kombinerede en aktiv proces med en restproces.

Problemet kan også løses grafisk ved et faktordiagram. Mulighedsområdet blir her det rektangel, der begrænses av de to akser og linjerne $v_1 = 1$ og $v_2 = 4$; forbinder man de punkter på processtrålerne, som svarer til samme profit, får man en skare iso-profit-kurver (der blir brudte linjer), og det gælder da om at finde det punkt i mulighedsområdet, som ligger på den højeste profitkurve.

Endelig kan man naturligvis finde løsningen grafisk i et diagram, hvor intensiteterne er abscisse og ordinat, forudsat at der kun indgår 2 processer i problemet. Bibetingelserne gir os umiddelbart grænserne for mulighedsområdet, og indtegner man en skare profitlinjer — deres ligning er umiddelbart givet med profitfunktionen — findes løsningen ved tangering med den højest mulige av disse linjer.

---

[1]) En række eksempler på grafisk illustration av lineære programmeringsproblemer er givet av Frisch (1954), pp. 66 ff.

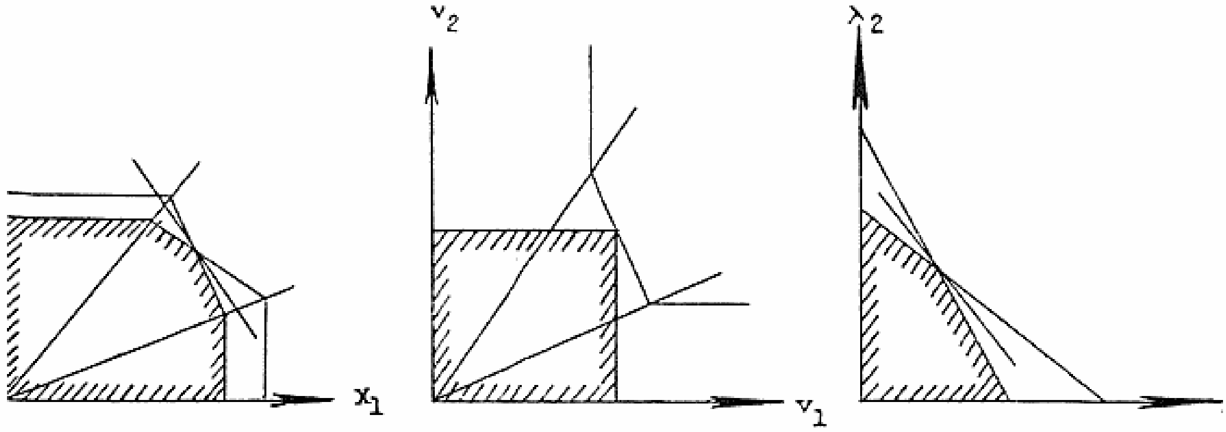

Fig. 18

De tre metoder til grafisk løsning av denne type problemer er vist på *fig. 18*; mulighedsområdet er vist med skravering, og det geometriske optimumskriterium er angivet. Hvilken metode man skal vælge, hvis man vil løse et linear-programming-problem grafisk, og om man overhovedet kan bruge nogen av dem, avhænger bl. a. av antal variable i det konkrete tilfælde; er der f. eks. 2 faste faktorer, men mere end 2 produkter og mere end 2 processer, er faktordiagrammet den eneste mulighed, fordi grafisk løsning forudsætter, at problemet kan formuleres i kun 2 variable.

Den generelle fremgangsmåde ved grafisk løsning av linear-programming-problemer er den, at man først finder mulighedsområdet — som defineret ved bibetingelserne — og dernæst finder det punkt i området, som repræsenterer optimum (her profitmaximum)[1]. Mulighedsområdet er altid en *konveks* figur[2].

E. Det er allerede nævnt som et specielt tilfælde av flervareproduktion under linear-programming-forudsætninger, at der kan forekomme processer, som hver kun fremstiller ét produkt. Taleksemplet ovenfor er netop av denne karakter; processerne P_1 og P_3 repræsenterer enkeltproduktion av henholdsvis x_1 og x_2, hvilket formelt viser sig i, at outputkoefficienterne b_{12} og b_{31} er lig med nul, og P_1 og P_3 ligger altså på akserne i produktdiagrammet. Hvadenten man kun råder over disse to processer, således at det kun er muligt at fremstille begge varer ved at kombinere to fysisk adskilte enkeltproduktioner[3], eller man som i eksemplet tillige har en eller flere

[1]) Jfr. Frisch (1954), p. 70. [2]) Jfr. Frisch (1954), p. 76.

[3]) Adskilte er de dog kun i den forstand, at der er tale om to forskellige fysiske produktionsprocesser; der er ikke tale om, at disse er uavhængige av hinanden, tværtimod er processerne interdependente derved, at de begge forbruger av samme begrænsede mængde av en eller flere faktorer. Jo mere den ene proces forbruger, des mindre blir der tilbage til den anden. Uden dette bånd mellem de to processer var der ikke noget linear-programming-problem; de kunne da betragtes hver for sig.

processer, der simultant fremstiller begge varer, svarer tilfældet til det, som man i traditionel (kontinuert) produktionsteori kalder *fællesproduktion*: det er muligt, omend ikke ved alle priser fordelagtigt, kun at fremstille en av de to varer.

Der kan naturligvis også være nuller blandt inputkoefficienterne. Et karakteristisk specialtilfælde er det s. k. *diætproblem*, et av de første problemer, som man løste ved linear-programming-metoder[1]). Det er forsåvidt formelt symmetrisk med tilfældet ovenfor, som alle inputkoefficienter undtagen én er lig med nul i hver proces, dvs. processerne ligger på akserne i faktordiagrammet. Problemstillingen går ud på at sammensætte en diæt eller dagsration på billigst mulig måde av forskellige næringsmidler, når den skal tilfredsstille givne minimumskrav m. h. t. samlet kalorie- og vitaminindhold og eventuelle andre ernæringsmæssige egenskaber. Næringsmidlerne betragtes formelt som produktionsfaktorer, ved hjælp av hvilke man »fremstiller« kalorier og de forskellige vitaminer etc.; hvert enkelt næringsmiddel definerer en proces, hvor de tekniske koefficienter er indhold av kalorier og vitaminer pr. enhed av »faktoren«, og hvor mængden av næringsmidlet er intensiteten. I kraft av problemstillingen indgår hver faktor i en og kun en proces; de øvrige inputkoefficienter er nul. Det gælder da om for »virksomheden« — der kan være en husmor, en økonoma, en militær planlægger el. lign. — om at finde den billigste kombination av »faktorerne«, som tilfredsstiller de foreskrevne minimumskrav m. h. t., hvor meget der skal »produceres« av de enkelte vitaminer og av kalorier[2])[3]). — Denne type problemer: på billigst mulig måde at sammensætte en blanding, hvis egenskaber (f. eks. indhold av forskellige bestanddele) kan antages at være lineære funktioner av ingrediensernes egenskaber, og hvor ingredienserne formelt betragtes som inputs og egenskaberne som outputs, der fremstilles i forenet produktion, er særlig egnet for linear programming, og der findes adskillige praktiske eksempler på anvendelse av denne metode på sådanne problemer.

Et tredje, vigtigt specialtilfælde — der er mange andre — får man, når et gode optræder som output i én aktivitet (eller i flere) og samtidig er input i en eller flere andre aktiviteter. Dette er tilfældet, når man specificerer

---

[1]) Et gennemregnet numerisk eksempel findes i Gale & Danø (1954), pp. 29 ff.; se også pp. 24 f.

[2]) Interdependensen ligger altså her på produktsiden; der er tale om forskrevne produktmængder, ikke om knappe faktorer.

[3]) Diætproblemet illustrerer betydningen av at ha restprocesser med i modellen. Hvis bibetingelserne ikke var formuleret som de svagere minimumskrav, men som exakte betingelser, kunne man ikke altid være sikker på at få en løsning, dvs. der eksisterede ikke en diæt, som lige netop tilfredsstillede samtlige ernæringsmæssige behov; ydermere, selv om en exakt løsning eksisterede, kunne man udmærket komme ud for, at der eksisterede en *billigere* diæt, som opfyldte nogle av betingelserne og *overopfyldte* de øvrige, — hvor paradoksalt det end lyder. Jfr. Koopmans (ed.) (1951 a), p. 32.

virksomhedens *mellemprodukter* i modellen[1]). I sådanne tilfælde er det praktisk at regne forbrug som negativ produktion, således at et mellemprodukt får negativ teknisk koefficient i de processer, hvor det er input, og positiv outputkoefficient dér, hvor det er output. (For symmetriens skyld kan man også, om man ønsker det, betragte forbrug av »primære inputs« — sådanne goder, som ikke produceres i virksomheden, men udelukkende optræder som inputs; f. eks. arbejdskraft — som negativ produktion, men det ser vi bort fra her).

Som eksempel kan vi tænke os 2 processer, hvori der indgår 1 primær produktionsfaktor (v) og 2 produkter (x_1 og x_2); den ene proces producerer x_1 ved hjælp av v og x_2, den anden fremstiller x_2 med v og x_1 som inputs:

	P_1	P_2
x_1	3	—1
x_2	—1	2
v	1	1

Nettoproduktionen av de to goder, der altså er hinandens mellemprodukter, blir da

$$\begin{aligned} 3\cdot\lambda_1 - 1\cdot\lambda_2 &= x_1 \\ -1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 &= x_2\,, \end{aligned}$$

og forbruget av primærfaktoren v blir

$$1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 = v.$$

Problemstillingen kan nu være den, at faktormængden er begrænset, dvs. $v=\bar{v}$; man kan da på vanlig måde finde en transformationskurve i x_1 og x_2 ved at forbinde de to punkter, som repræsenterer fuld udnyttelse av primærfaktoren i de to processer, således som vist på *fig. 19*. De to processtråler kommer nu til at ligge i 2. og 4. kvadrant, men når man kræver, at nettoproduktionen av begge produkter skal være positiv, vil kun den del av transformationskurven ha interesse, som ligger i 1. kvadrant[2]). Man kan så, når man kender produktpriserne, bestemme det punkt på transformationskurven, som repræsenterer størst profit. (Er der flere knappe primærfaktorer, får man en knækket transformationskurve). Omvendt kan problemet være det at bestemme forbruget av primærfaktoren, når man ønsker at producere bestemte mængder av de to goder, $x_1=\bar{x}_1$ og $x_2=\bar{x}_2$. Hvis det ene av de to produkter, f. eks. x_1, ikke har nogen salgsværdi som »final

[1]) Om, hvornår dette er nødvendigt eller hensigtsmæssigt, se Dorfman (1951), pp. 21 ff.

[2]) Jfr. Chipman (1953 b), p. 103.

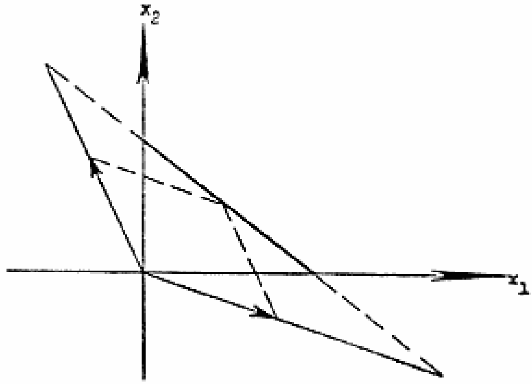

Fig. 19

commodity«, men kun tjener som mellemprodukt ved fremstillingen av det andet (x_2), vil det gi anledning til bibetingelsen $x_1 = 0$.

Modeller av denne type kan være relevante for en enkelt konkret virksomhed[1]), men har dog navnlig interesse i *input-output-analysen*[2]). Den s. k. åbne limitationale Leontief-model er formelt av samme type som vort eksempel ovenfor. »Limitationalitet« betyder her, at hver aktivitet — det vil her sige: hver industri eller sektor — kun producerer én vare og anvender de andre som inputs, og at omvendt hver vare kun fremstilles i én aktivitet[3]). At modellen er »åben«, vil sige, at ikke alle inputs er produceret indenfor modellen; arbejdskraft er en primær faktor[4]). (I den »lukkede« Leontief-model derimod betragtes også arbejdskraften som produceret i en aktivitet, hvor konsumet repræsenterer inputs). — Et typisk problem i Leontief-modellen er at bestemme produktionsniveauet i de enkelte aktiviteter, når den ønskede nettoproduktion av de enkelte varer (»the bill of goods«) er fastlagt på forhånd, og undersøge, hvorvidt dette er foreneligt med den givne tilgang av arbejdskraft. I taleksemplet ovenfor svarer dette til, at man fastlægger x_1 og x_2 og løser de to ligninger

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 - \lambda_2 &= \bar{x}_1 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= \bar{x}_2 \end{aligned}$$

[1]) En linear-programming-model for den enkelte virksomheds tilpasning må nødvendigvis ta hensyn til, at nogle av de tekniske koefficienter kan være negative, hvis den skal være tilstrækkeligt generel; Dorfman's model — jfr. Dorfman (1951) — er da også formuleret på denne måde.

[2]) Der henvises til speciallitteraturen, specielt Leontief (1951). Se også Chipman (1953 b), Nørregaard Rasmussen (1954 a-c), samt Gale & Danø (1954).

[3]) Dette kan åbenbart betragtes som en generalisering av det limitationalitetsbegreb, vi hidtil har anvendt. Der er jo fremdeles ingen substitutionsmuligheder ved produktion av den enkelte vare, men kun ét sæt av tekniske koefficienter til rådighed.

[4]) De modeller for den enkelte virksomhed, som vi har opereret med ovenfor — med undtagelse av den sidste model, hvor vi har indført mellemprodukter — kan i denne terminologi beskrives som værende åbne m. h. t. samtlige inputs; alle faktorer er primære inputs.

for λ_1 og λ_2, og dernæst undersøger, om løsningen er konsistent med betingelsen

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leqq \bar{v}$$

(smlgn. fig. 19). Hvis der er en positiv løsning, vil den være entydig; p. gr. a. limitationalitetsforudsætningen har vi jo lige mange ligninger og ubekendte λ'er — hvilket naturligvis gælder uanset antallet av sektorer — og der blir altså ikke noget spillerum for at søge den optimale blandt flere løsninger til betingelsesligningerne[1]). Og når også mængden av primærfaktoren er givet, er det ikke på forhånd sikkert, at løsningen er forenelig med denne yderligere restriktion; bruger den for meget arbejdskraft, må man modificere sin »bill of goods«.

[1]) Nogle forfattere regner derfor ikke input-output-analysen med under betegnelsen »linear programming«; se f. eks. Dorfman (1953) pp. 824 ff. Andre betragter den som et specielt tilfælde. Dette sidste forekommer rimeligst, eftersom man jo ikke nødvendigvis behøver at holde sig til limitationalitetsforudsætningen, men tværtimod ofte er interesseret i substitutionsmodeller, som tillader optimering — udfra et eller andet kriterium — under de givne betingelser (kapacitetsgrænser etc.).