LINEAR PROGRAMMING I PRODUKTIONSTEORIEN[1][2]

I

Af SVEN DANØ

I. Virksomhedens almindelige allokeringsproblem.

Den økonomiske produktionsteori, *the theory of the firm*, har til opgave at beskrive og forklare den enkelte virksomheds økonomiske tilpasning under givne teknologiske betingelser (produktionsfunktioner), givne markedsforhold (avsætningsfunktioner for produkterne, tilbudsfunktioner for produktionsfaktorerne) og eventuelle øvrige restriktioner på de indgående størrelser (f. eks. kapacitetsgrænser). Det generelle tilpasningsproblem går ud på at finde frem til den mest økonomiske allokering av ressourcerne, hvadenten opgaven går ud på optimal tilpasning av produktionen ved given tilgang av ressourcer, eller man har det omvendte problem: at opnå et givet produktionsresultat med mindst mulig faktorindsats. Man tænker sig normalt, at der er mere end én måde at udnytte ressourcerne på, og søger da den av dem, som er optimal, hvilket her normalt betyder: den av dem, som gir virksomheden størst profit.

Opgaven kan f. eks. være at finde den billigste av de forskellige faktorkombinationer, hvormed en bestemt ønsket produktmængde kan fremstilles. Den traditionelle neoklassiske produktionsteori[3]) forudsætter her, at virksomheden har *en kontinuert skala av substitutionsmuligheder* for sig; indenfor visse grænser (indenfor substitutionsområdet) kan man variere faktorkombinationen, således at man kan ta lidt mere av den ene variable produktionsfaktor og lidt mindre av den anden — f. eks. mere arbejdskraft og mindre mængde gødning anvendt på et stykke jord — og stadig få samme produktmængde, og denne variation tænkes at kunne foregå jævnt og kontinuerligt. Avbilder man alle de kombinationer, der gir samme produkt-

---

[1]) Denne og to følgende artikler er skrevet under et ophold i U. S. A. som Rockefellerstipendiat. Jeg bringer en hjertelig tak til The Rockefeller Foundation.

[2]) En kort bibliografi findes i slutningen av artiklen.

[3]) Se f. eks. Frisch (1946) og (1953), Hicks (1946) kap. VI med appendix, Samuelson (1948) kap. IV, og Schneider (1934). En udmærket, kort fremstilling findes hos Brems (1952 b).

LINEAR PROGRAMMING I PRODUKTIONSTEORIEN[1][2])

I

Af SVEN DANØ

I. Virksomhedens almindelige allokeringsproblem.

Den økonomiske produktionsteori, *the theory of the firm*, har til opgave at beskrive og forklare den enkelte virksomheds økonomiske tilpasning under givne teknologiske betingelser (produktionsfunktioner), givne markedsforhold (avsætningsfunktioner for produkterne, tilbudsfunktioner for produktionsfaktorerne) og eventuelle øvrige restriktioner på de indgående størrelser (f. eks. kapacitetsgrænser). Det generelle tilpasningsproblem går ud på at finde frem til den mest økonomiske allokering av ressourcerne, hvadenten opgaven går ud på optimal tilpasning av produktionen ved given tilgang av ressourcer, eller man har det omvendte problem: at opnå et givet produktionsresultat med mindst mulig faktorindsats. Man tænker sig normalt, at der er mere end én måde at udnytte ressourcerne på, og søger da den av dem, som er optimal, hvilket her normalt betyder: den av dem, som gir virksomheden størst profit.

Opgaven kan f. eks. være at finde den billigste av de forskellige faktorkombinationer, hvormed en bestemt ønsket produktmængde kan fremstilles. Den traditionelle neoklassiske produktionsteori[3]) forudsætter her, at virksomheden har *en kontinuert skala av substitutionsmuligheder* for sig; indenfor visse grænser (indenfor substitutionsområdet) kan man variere faktorkombinationen, således at man kan ta lidt mere av den ene variable produktionsfaktor og lidt mindre av den anden — f. eks. mere arbejdskraft og mindre mængde gødning anvendt på et stykke jord — og stadig få samme produktmængde, og denne variation tænkes at kunne foregå jævnt og kontinuerligt. Avbilder man alle de kombinationer, der gir samme produkt-

---

[1]) Denne og to følgende artikler er skrevet under et ophold i U. S. A. som Rockefellerstipendiat. Jeg bringer en hjertelig tak til The Rockefeller Foundation.

[2]) En kort bibliografi findes i slutningen av artiklen.

[3]) Se f. eks. Frisch (1946) og (1953), Hicks (1946) kap. VI med appendix, Samuelson (1948) kap. IV, og Schneider (1934). En udmærket, kort fremstilling findes hos Brems (1952 b).

mængde, i et diagram med faktormængderne som koordinater (vi tænke r os for anskuelighedens skyld, at der kun er 2 variable faktorer), får man en jævnt krummende isokvant, en kontinuert kurve uden knæk. En av de kombinationer, der ligger på denne kurve, er den billigste. Grafisk finder man denne optimale kombination ved at indtegne en skare parallelle isokostlinjer i diagrammet; til hver av disse linjer svarer et bestemt omkostningsbeløb, og de har alle en hældning svarende til forholdet mellem faktorpriserne (med modsat fortegn). Der, hvor en isokostlinje tangerer isokvanten, har man minimalomkostningskombinationen. I dette optimale punkt er forholdet mellem faktorpriserne lig med det marginale substitutionsforhold, der igen er lig med forholdet mellem de to faktorers grænseproduktiviteter. I et punkt, hvor denne marginale ligevægtsbetingelse ikke er opfyldt, vil det altid betale sig at foretage en substitution, indtil man når minimalomkostningspunktet.

Problemet kan f. eks. også være det at bestemme det optimale produktionsomfang og den tilsvarende optimale faktorkombination indenfor et givet fast anlæg, når faktorpriserne er givne, og man kender avsætningsfunktionen for produktet. Man tænker sig da, at virksomheden kender minimalomkostningskombinationen av de variable faktorer for hver enkelt produktmængde (bestemt på samme måde som ovenfor, for alle mulige isokvanter). Disse punkter gir en expansionsvej (også kaldet minimalomkostningskurve) ud igennem faktordiagrammet, den »vej«, som virksomheden står sig ved at gå, når den udvider eller indskrænker sin produktion. Hermed har vi samtidig bestemt virksomhedens omkostningskurve; til ethvert punkt på expansionsvejen svarer jo dels en bestemt produktmængde, dels en bestemt faktorkombination og dermed — ved givne faktorpriser — et bestemt omkostningsbeløb. Når vi desuden kender avsætningsfunktionen for produktet, kan vi bestemme det optimale produktionsomfang. Dette optimale punkt, hvor profitten er størst mulig, er karakteriseret ved, at grænseindtægt er lig med grænseomkostninger, foruden ved — som ovenfor — at grænseproduktiviteterne av de variable faktorer forholder sig som faktorpriserne.[1])

I begge disse eksempler bruger man som kriterium på optimal allokering av ressourcerne, at profitten — der er lig produktmængden vejet med salgsprisen, minus en sum av faktormængder ligeledes vejet med hver sin pris — er størst mulig[2]) under de givne produktionsbetingelser. At der er kontinuert

[1]) Dette kan også udtrykkes på den måde, at grænseindtægt = grænseomkostninger langs expansionsvejen = grænseomkostninger ved partiel variation av hver enkelt av de variable faktorer (faktorpris : grænseproduktivitet).

[2]) For given produktmængde, og dermed for given bruttoindtægt, kommer det åbenbart ud på ét, om man minimerer omkostningerne eller maximerer profitten (bruttoindtægt minus omkostninger). Dette er helt analogt med, at de faste omkostninger ikke spiller nogen rolle ved profitmaximering.

substitution, udtrykkes analytisk ved en kontinuert og differentiabel produktionsfunktion. Maximering av profitten med produktionsfunktionen som bibetingelse fører da til et sæt av (nødvendige) betingelser, der udtrykker en marginal ligevægt. Differentialregning er det analytiske hjælpemiddel, der modsvarer denne betragtningsmåde.

Man kan imidlertid komme ud for *tilfælde, hvor denne marginale analyse ikke går an, nemlig hvor substitutionsmulighederne er diskontinuerte* (specielt helt fraværende), således at man ikke længere har jævnt krummende isokvanter. Hvis der f. eks. er knæk på isokvanterne — vi skal senere se, hvad der kan gi anledning til noget sådant — kan man få minimalomkostningspunkter, som ikke er karakteriserede ved marginale ligheder; vi har ikke længere en differentiabel produktionsfunktion, og forudsætningerne for anvendelse av differentialregning — det analytiske udtryk for marginalbetragtningen — er ikke mere til stede.

I sådanne tilfælde kan der under visse specielle forudsætninger om produktionsstrukturen blive tale om i stedet at bruge den analytiske teknik, der er blevet udviklet i de senere år under navnet *linear programming*[1])[2]), til teoretisk og praktisk løsning av en virksomheds allokeringsproblemer. Den type problemer, som linear programming tar sigte på at løse, går formelt ud på at finde den optimale løsning til et lineært ligningssystem, når dette tilfredsstilles av mere end eet sæt værdier av de variable, og kriteriet på optimalitet er, at en eller anden lineær funktion av de variable skal anta så stor en værdi som muligt. Denne problemstilling kan finde anvendelse i produktionsteorien, når vi i stedet for den vanlige produktionsfunktion har en lineær produktionsmodel, hvor de forskellige muligheder for allokering av ressourcerne fremtræder som forskellige løsninger til et system av lineære relationer, og når profitten kan skrives som et lineært udtryk i de indgående variable. Et problem av denne type gir ikke anledning til nogen maximumspunkter av den vanlige type, der er karakteriseret ved marginal ligevægt.

Alt dette lyder foreløbig meget abstrakt, men det vil fremgå klarere av det følgende, hvad der kan gi anledning til sådanne modeller, og hvordan de skal behandles. Vi skal nu gøre rede for metoden og dens anvendelse i produktionsteorien, illustreret ved nogle simple eksempler, der kan belyse nogle væsentlige træk. Vi skal jævnføre linear programming med den tradi-

---

[1]) Æren av at ha udviklet denne teknik tilfalder navnlig *Dantzig* og *Koopmans* — jfr. Koopmans (ed.) (1951 a), specielt kap. II og III — selv om der naturligvis, som vi skal se, har været forløbere.

Den første til at anvende linear programming på den enkelte virksomheds problemer var *Robert Dorfman*; pionerarbejdet er Dorfman (1951), jfr. også den lettilgængelige fremstilling i Dorfman (1953). Jeg skylder disse to arbejder meget av stoffet i nærværende og den følgende artikel.

[2]) Efter norsk mønster kunne man måske oversætte navnet til »*lineær programmering*«.

tionelle marginale analyse — med særligt henblik på de teknologiske betingelser (produktionsfunktionen) — og drøfte forudsætningerne for lineær programmering og metodens praktiske relevans. Endelig vil en passende arbejdsdeling mellem de to analysemetoder blive antydet.

II. Den lineære limitationale produktionsmodel.

A. Det vil være praktisk at ta udgangspunkt i en simpel og velkendt lineær produktionsmodel, nemlig tilfældet med 1 produkt og 2 limitationale produktionsfaktorer med konstante tekniske produktionskoefficienter[1]). Idet produktmængden (output) betegnes x, og de forbrugte faktormængder (inputs) betegnes v_1 og v_2, kan virksomhedens produktionsbetingelser udtrykkes ved 2 relationer:

$$v_1 = a_1 \cdot x$$
$$v_2 = a_2 \cdot x$$

hvor a_1 og a_2 er de tekniske koefficienter (= de reciprokke produktiviteter av de to faktorer). Som eksempel på produktion, hvor inputs således indgår i fast forhold, plejer man at nævne fremstilling av kemiske forbindelser, hvor bestanddelene jo indgår i en bestemt proportion.[2]) Et andet (og formentlig bedre) eksempel er industriel produktion, hvor der anvendes højt specialiseret maskineri, der kræver en ganske bestemt bemanding og et bestemt forbrug av materialer og energi; her vil der være faste proportioner mellem antal maskintimer, arbejdstimer, råstofforbrug og (f. eks.) kilowatttimer.

De to ligninger kan avbildes ved en ret linje i et faktordiagram; x kan måles ud ad denne linje, idet avstanden fra (0,0) til (a_1, a_2) benyttes som enhed. Dette er vist på *fig. 1.*

Enhver given produktmængde kan fremstilles ved én og kun én faktorkombination; faktorerne kan ikke substitueres indbyrdes, men er *limitationale.* Isokvanterne blir punkter på den rette linje, og expansionsvejen blir linjen selv, uanset faktorpriserne. Valget av faktorkombination ved given produktmængde gir m. a. o. ikke anledning til nogen egentlige økonomiske overvejelser; allokeringsproblemet er et rent teknologisk problem. Omvendt, hvis forbruget av en av faktorerne er givet, følger produktmængden

[1]) Dette er den *Walras*'ske forudsætning, jfr. Walras (1954), lesson 20, pp. 237—242. Det er dog kun rent provisorisk, at Walras forudsætter faste koefficienter; i lesson 23, pp. 382—392 betragtes koefficienterne som variable, der avhænger av faktorpriserne. — *Leontief*'s input-output-model arbejder ligeledes med limitationale inputs i hver enkelt sektor; jfr. nærmere i den følgende artikel.

Det limitationale tilfælde er i øvrigt behandlet av *Frisch* (1953) og *Schneider* (1934).

[2]) Dette er næppe noget videre godt eksempel. Rent bortset fra, at det ser bort fra andre inputs end råstoffer, består kemisk produktion normalt i langt mere komplicerede processer end simpel syntese ud fra grundstoffer.

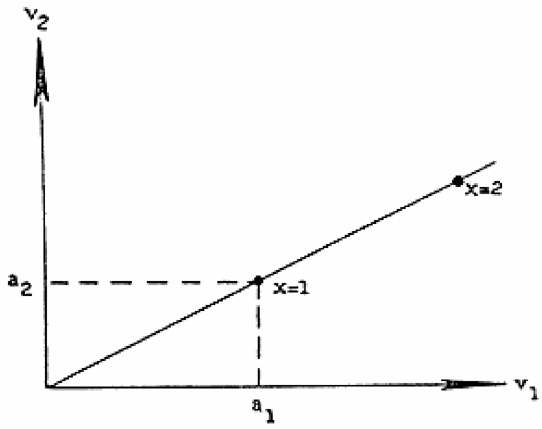

Fig. 1

og den mængde, der medgår av den anden faktor, entydigt av de tekniske koefficienter.

B. Men sæt nu, at mængderne av begge faktorer er givet, og i et forhold, som ikke svarer til den proportion, der er foreskrevet ved de tekniske koefficienter; dette vil netop hyppigt være en relevant problemstilling[1]). I sådanne tilfælde må der nødvendigvis komme til at optræde ubenyttede *rester* av en eller flere faktorer. Vi må da tolke v_1 og v_2 som de *disponible* (indkøbte) faktormængder, medens a_1x og a_2x blir de *forbrugte* mængder, og differencerne — når de optræder — blir udtryk for ubenyttede rester. De tekniske koeffiicienter alene gir da ikke nogen helt tilfredsstillende beskrivelse av virksomhedens produktionsbetingelser; det gælder om at udtrykke, at der til ethvert givet sæt av v_1 og v_2 svarer en produktmængde, som repræsenterer den bedste udnyttelse av disse disponible faktormængder. At der kan forekomme mindre end fuld udnyttelse av de to faktorer, udtrykkes ved ulighederne

$$\begin{aligned} v_1 &\geqq a_1 \cdot x \\ v_2 &\geqq a_2 \cdot x \,, \end{aligned}$$

og den bedste udnyttelse av de givne faktormængder — dvs. den største produktmængde, der kan fremstilles under disse restriktioner — udtrykkes ved en relation av formen

$$x = \min\left(\frac{v_1}{a_1}, \frac{v_2}{a_2}\right),$$

en »minimumsform«[2]), der skal forstås derhen, at det er den til enhver tid knappeste faktor — set i forhold til den proportion, der er givet med de tekniske koefficienter — der sætter grænsen for, hvor meget der kan produceres (derav iøvrigt navnet »limitationale« faktorer).

[1]) Jfr. her f. eks. *Jantzen*'s harmonilov.

[2]) Jfr. f. eks. Frisch (1953), p. 2.

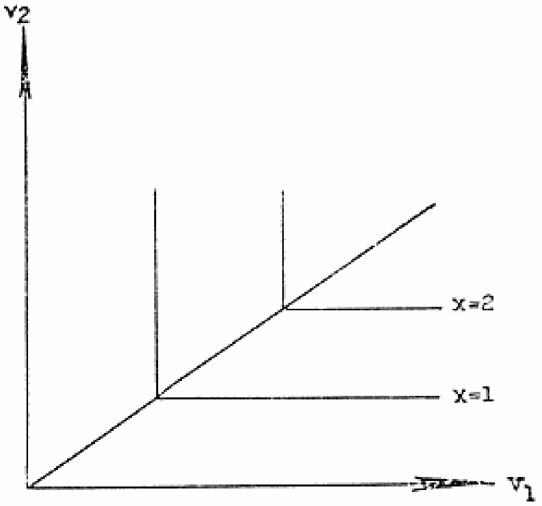

Fig. 2

Er der f. eks. 6 enheder til rådighed av den første faktor og 8 av den anden, og medgår der henholdsvis 2 og 4 enheder av de to faktorer til at fremstille 1 enhed av produktet, vil den størst mulige produktion være $x = 2$. Ved dette produktionsomfang er den anden faktor — som her er den mest knappe — fuldt udnyttet. Minimumsformen angir, at der for denne faktor gælder lighedstegn mellem forbrugt og disponibel mængde, men ulighedstegn for den første faktor.

Denne formulering lader produktionsmodellen fremtræde som et grænsetilfælde av den sædvanlige produktionsmodel, hvor der er substitution mellem faktorerne. Minimumsformen kan betragtes som en produktionsfunktion, der gir x som den største produktmængde, der kan fremstilles med ethvert givet sæt av v'er. Til en bestemt produktmængde svarer ikke længere et punkt i faktordiagrammet, men en hel isokvant ligesom i substitutionstilfældet; den har blot den specielle form av en ret vinkel med benene parallelle med akserne[1]), jfr. *fig.* 2. Vinkelspidsen — der ligger på den faktorstråle, der er bestemt ved de tekniske koefficienter — repræsenterer de forbrugte faktormængder, og går man fra dette hjørnepunkt ud ad isokvanten, betyder det, at der optræder en rest av den ene faktor. Hjørnepunktet er det eneste punkt, som er *efficient* i den forstand, at det både repræsenterer mindst muligt forbrug av begge faktorer ved fremstilling av den pågældende produktmængde og størst mulig produktion ved de pågældende faktormængder[2]); de øvrige punkter — vinkelens ben —

[1]) I lærebøger ser man altid det limitationale tilfælde avbildet på denne måde.

[2]) Efficiens defineres mere præcist ved, at det ikke er muligt at producere mere ved samme input-mængder og ejheller er muligt at fremstille samme output-mængde med mindre indsats av én faktor og uændret indsats av de øvrige. Se f. eks. Chipman (1953), p. 105. — Mærk den formelle lighed med Pareto's kriterium på velfærdsoptimum.

er kun efficiente i den svagere betydning, at det sidstnævnte krav er opfyldt, det krav, man normalt stiller, når man definerer en produktionsfunktion[1]). Også punkter udenfor (nordost for) isokvanten kan betragtes som inefficiente faktorkombinationer til fremstilling av samme produktmængde, nemlig sådanne, hvor der blir rester (spild) av begge inputs. Efficiensbegrebet — der her er trivielt, men, som vi skal se, spiller en væsentlig rolle i linear-programming-produktionsmodellen — gir os altså et rent teknologisk kriterium for på forhånd at udskille kombinationer, der er uokonomiske uanset priserne.

Når man definerer produktionsfunktionen i det limitationale tilfælde på denne måde, blir expansionsvejen — formelt set — ikke længere teknisk entydigt fastlagt; den blir først bestemt ved en omkostningsminimering langs enhver isokvant, blot at det optimale punkt på isokvanten blir det samme for et hvilketsomhelst sæt av positive faktorpriser og altså i dette specielle tilfælde — i modsætning til substitutionstilfældet — ikke forudsætter egentlige økonomiske overvejelser, men kan findes på rent teknologisk grundlag ud fra kendskab til de tekniske koefficienter[2]). Geometrisk fremgår dette av, at alle isokostlinjer, uanset hældning, må tangere isokvanten i hjørnepunktet[3]). — Denne betragtning er, som man ser, ækvivalent med efficienskriteriet; de kombinationer, som ikke vil være økonomiske ved noget sæt av faktorpriser, er netop de inefficiente kombinationer.

C. Limitationalitet er ikke blot, som vi har set, et grænsetilfælde av en produktionsmodel med kontinuert substitution, men kan også betragtes som et (trivielt) specialtilfælde av den type produktionsmodeller, som linear programming tar sigte på. Tilpasningsproblemet indenfor den limitationale model kan nemlig formuleres som det at maximere et lineært udtryk i modellens variable — profitten er jo et lineært udtryk i x, v_1 og v_2, med priserne som koefficienter — under et sæt lineære restriktioner i de samme variable, nemlig lineære uligheder av den ovennævnte type, der udtrykker, at et eller flere inputs forefindes i given mængde (faste faktorer, v'erne betragtes som givne), eller at en bestemt produktmængde ønskes fremstillet (x given, v'erne ubekendte)[4]). Det specielle ved dette eksempel ligger i, at man her er bundet til ét bestemt sæt av tekniske koefficienter. I den generelle linear-programming-model kan virksomheden vælge mellem og eventuelt kombinere flere produktionsprocesser, hver defineret ved sit sæt av faste produktionskoefficienter.

Ved den analytiske og numeriske løsning av tilpasningsproblemer inden-

[1]) Jfr. f. eks. Samuelson (1948), pp. 57 f. — I Gloerfelt-Tarp's terminologi: en økonomisk defineret produktionsfunktion, jfr. Gloerfelt-Tarp (1937), p. 227 f.

[2]) Jfr. Samuelson (1948), p. 72.

[3]) Man får da et s. k. »hjørneminimum«, der ikke er karakteriseret ved en marginal lighed.

[4]) I sidste tilfælde kan man naturligvis uden videre slette ulighedstegnene.

for en sådan model er det ikke heldigt at ha de produktionsrestriktioner, under hvilke profitten søges maximeret, udtrykt i form av *uligheder*. Imidlertid kan man let forvandle dem til (lineære) *ligninger*, når man explicit indfører ubenyttede faktorrester som variable. I den limitationale model ovenfor, hvor vi har 2 givne faktormængder, svarer dette til, at man erstatter restriktionerne

$$v_1 \geqq a_1 \cdot x$$
$$v_2 \geqq a_2 \cdot x$$

med ligningerne

$$v_1 = a_1 \cdot x + r_1$$
$$v_2 = a_2 \cdot x + r_2 ,$$

hvor r_1 og r_2 er de to rester, defineret som differencen mellem venstre og højre side i ulighederne. Skriver man dem på formen

$$v_1 = a_1 \cdot x + 1 \cdot r_1 + 0 \cdot r_2$$
$$v_2 = a_2 \cdot x + 0 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 ,$$

ser man, at resterne formelt kan opfattes som inputs i to fiktive produktionsprocesser med de tekniske koefficienter (1,0) og (0,1). En sådan »*restproces*« ses at »forbruge« noget av den ene faktor; den anden faktor indgår ikke, og der forekommer ikke noget av produktet. Den reelle økonomiske tolkning av en restproces er den, at man har for meget av en faktor og undlader at benytte den overskydende mængde eller ligefrem kaster den væk[1]); fænomener som uudnyttet kapacitet[2]), tomgang, ikke-benyttelse, bortkastning, destruktion, spild, liggen brak etc. kan udtrykkes på denne måde.

En restproces vil åbenbart aldrig blive taget i brug, når den koster noget; det er klart inefficient at anskaffe mere av en variabel faktor, end man skal bruge, hvis den har en positiv pris. Det er ved *faste* faktorer, at restprocesser kommer ind i billedet; her er der ingen omkostninger ved ikke-udnyttelse, da de faste omkostninger skal betales under alle omstændigheder.

Restprocessens formelle funktion er det matematiske trick at absorbere faktorrester, således at man i stedet for uligheder får et antal ligninger (2 i

---

[1]) Derav den gængse engelske betegnelse »*disposal process*« (*dispose of* = kaste bort, skaffe av vejen). »Restproces« synes en nærliggende dansk betegnelse.

Dette trick: at opfatte produktion med rester som en kombination av en aktiv produktionsproces og restprocesser, spiller en stor rolle i den matematiske teknik til løsning av linear-programming-problemer og er opfundet med dette formål for øje. Det er imidlertid værd at bemærke, at *Gloerfelt-Tarp* uavhængigt herav opfandt restprocessen i 1937, længe før der var noget, der hed linear programming, omend han bruger den på et tilfælde med substituerbare faktorer (nemlig til at vise, at negativ grænseproduktivitet av en faktor ikke kan forekomme i en økonomisk defineret produktionsfunktion). Jfr. Gloerfelt-Tarp (1937), p. 254.

[2]) Målt f. eks. i maskintimer.

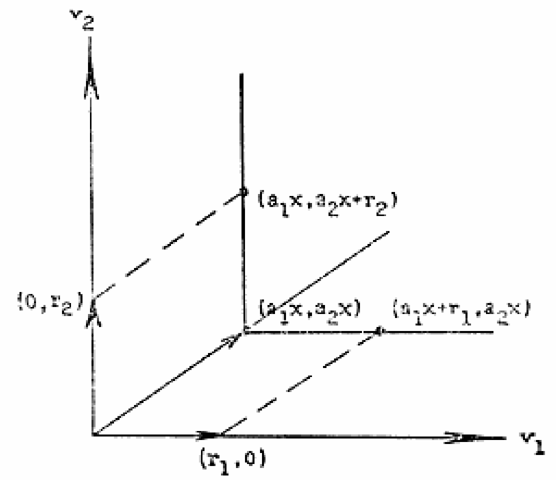

Fig. 3

eksemplet ovenfor), der udtrykker, at den givne disponible mængde av hver enkelt faktor er summen av det, som forbruges i den egentlige (»aktive«) produktionsproces, og det, som »forbruges« i restprocesserne. Man tænker sig formelt, at disse tre produktionsprocesser — hver defineret ved sit sæt av tekniske koefficienter — foregår simultant og er additive faktor for faktor.

Dette er blot en anden måde at beskrive det samme på, så den grafiske avbildning av det limitationale tilfælde er fremdeles den, som er vist på fig. 2. Formelt tænker man sig nu en isokvant dannet ved kombination av den aktive proces og de to restprocesser; geometrisk svarer dette til, at man adderer vektorerne (a_1x, a_2x) og $(r_1, 0)$ resp. $(0, r_2)$ i et kræfternes parallelogram[1]), således som vist på *fig. 3*. Ved at variere r_1 og r_2 kan man tænke sig ethvert punkt på isokvanten konstrueret på denne måde.

Set i relation til den limitationale model er alt dette formelle trivialiteter, men vi skal se, hvorledes det får betydning i den mere generelle lineære programmeringsmodel.

D. Det er åbenbart, at den marginale analyse (dvs. differentialregning) ikke finder anvendelse på de økonomiske tilpasningsproblemer indenfor en model av denne type.

Den optimale faktorkombination for given produktmængde er således ikke karakteriseret ved, at det marginale substitutionsforhold er lig med forholdet mellem faktorpriserne; i det hjørnepunkt på isokvanten, hvor isokostlinjen tangerer, er det marginale substitutionsforhold overhovedet ikke entydigt defineret[2]). Produktionsfunktionen er nok kontinuert, men ikke

[1]) Om vektoraddition — dvs. addition av tilsvarende koordinater til to punkter — se f. eks. Gale & Danø (1954), pp. 9 ff.

[2]) Man kan sige, at det er nul til den ene side og uendelig til den anden, og ligevægten kan derfor formelt karakteriseres ved, at faktorprisforholdet ligger mellem disse to grænser, således at situationen blir beskrevet ved to uligheder i stedet for ved en lighed. Jfr. Samuelson (1948), pp. 70 ff.

differentiabel — der er diskontinuiteter i differentialkvotienterne (grænseproduktiviteterne) — og i så fald er betingelserne for anvendelse av marginal analyse ikke til stede. Man må da gribe til andre metoder; i det specielle tilfælde av limitationalitet er løsningen umiddelbart givet med kendskabet til de tekniske koefficienter, men i den generelle linear-programming-model, hvor man netop får den samme slags »hjørneminima«, men har flere sæt av tekniske koefficienter, gir løsningen ikke sig selv.

Hvordan ser det nu ud, når problemet er at finde den optimale produktmængde? Her vil optimum i traditionel analyse være karakteriseret ved lighed mellem grænseindtægt og grænseomkostninger, et resultat, man kommer til ved at differentiere profitten m. h. t. produktmængden og sætte den avledede lig med nul, hvorved der fremkommer en nødvendig betingelse for profitmaximum. Er også denne marginale betragtning udelukket i det limitationale tilfælde?

I et konkurrencemarked, hvor virksomheden er mængdetilpasser både qua sælger av produktet og qua køber av faktorerne, dvs. hvor produktprisen (p) og faktorpriserne (q_1 og q_2) kan betragtes som konstante, vil profitten — om der er nogen — vokse proportionalt med produktionsskalaen, eftersom alle inputs jo er forudsat proportionale med output (constant returns to scale). Omkostningsfunktionen ud langs expansionsvejen blir

$$c = q_1 v_1 + q_2 v_2 = (q_1 a_1 + q_2 a_2) \cdot x;$$

bruttoindtægten blir ligeledes proportional med x,

$$r = p \cdot x,$$

og profitten blir da

$$z = r - c = (p - q_1 a_1 - q_2 a_2) \cdot x.$$

Grænseindtægt, grænseomkostninger og grænseprofit er altså konstante. Under disse forudsætninger, hvor virksomheden kan købe ubegrænsede mængder av faktorerne og sælge så meget, det skal være, av produktet til konstante priser, vil virksomheden stå sig ved at expandere i det uendelige; der er intet maximum for profitten[1]). Det eneste, der kan standse expansionen, er en faldende avsætningsfunktion for produktet, stigende tilbudsfunktioner for faktorerne, eller absolutte begrænsninger på tilgangen av faktorerne.

Lad os opretholde forudsætningen om faste priser — dvs. fremdeles antage, at profitten avhænger lineært av x — men antage, at en av faktorerne

[1]) Det samme gælder ved total tilpasning ved kontinuert substitution, når produktionsfunktionen er homogen av 1. grad (proportionalitetsloven, constant returns to scale). Jfr. Samuelson (1948), p. 85 n.

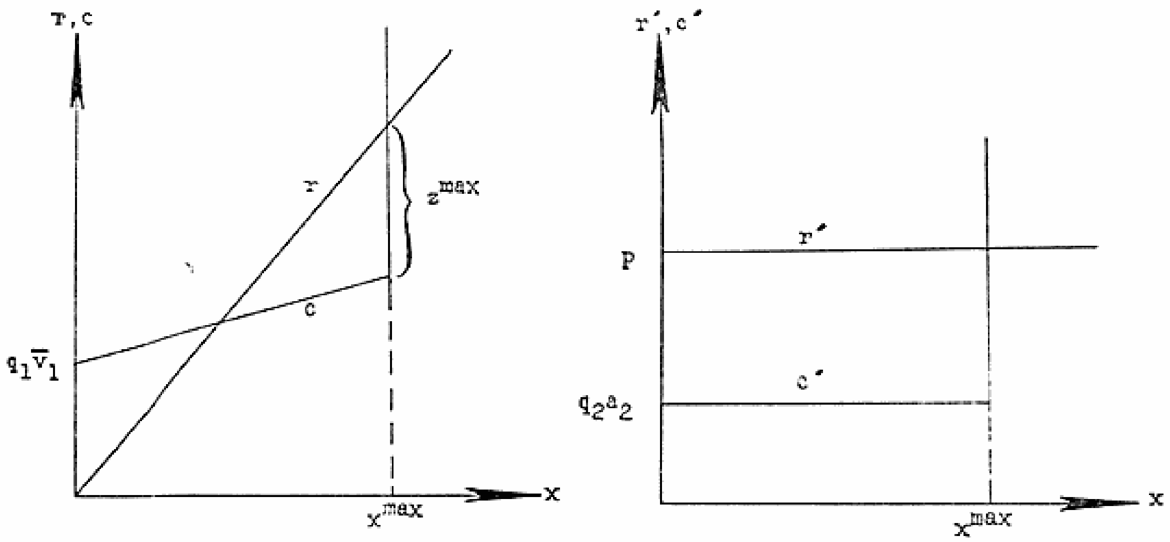

Fig. 4

kun er tilgængelig i en begrænset mængde, f. eks. $\bar{v}_1$. Dette er særdeles relevant i det korte løb, når man har et fast anlæg, hvis ydelser (f. eks. antal maskintimer) er absolut knappe indenfor en given periode. Profitten vil da stadig vokse lineært med x, men expansionen vil standse, når man støder på det loft, som den knappe faktor — eller den mest knappe, hvis der er flere faste faktorer — har lagt over produktionsomfanget, her $x = \bar{v}_1/a_1$. Dette punkt, der repræsenterer den størst mulige profit, er *ikke* karakteriseret ved, at grænseindtægten (her prisen) er lig med grænseomkostningerne, jfr. *fig. 4*. Man ser igen, at den marginale analyse ikke kan anvendes. Det samme, skal vi se, gælder i den generelle linear-programming-model.

III. Diskontinuert substitution.

A. Når virksomheden er teknisk bundet til ét bestemt sæt av tekniske koefficienter, er expansionsvejen teknologisk entydigt fastlagt; der er ingen mulighed for at vælge mellem alternative faktorkombinationer. Men antag nu, at virksomheden kan fremstille den samme vare i 2 forskellige produktionsprocesser, der benytter de samme faktorer, men har hver sit sæt av konstante produktionskoefficienter, og antag videre, at det er muligt at benytte begge processer samtidigt (indenfor de grænser, som måtte være givet ved knaphed på en eller flere faktorer). Dette gir en vis begrænset mulighed for substitution, idet man kan variere faktorkombinationen ved givet produktionsomfang ved at gå over fra den ene proces til den anden, og der blir da et tilpasningsproblem allerede på dette første stadium. Det er denne type produktionsmodeller, hvor der er flere — men kun et endeligt antal —

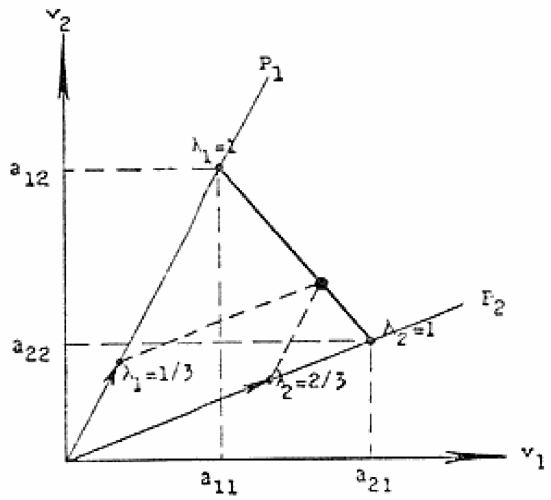

Fig. 5

sæt av tekniske koefficienter til rådighed, der er karakteristiske for linear programming[1]).

De to processer[2])

$$(P_1)\quad \begin{aligned} v_{11} &= a_{11}\cdot\lambda_1 \\ v_{12} &= a_{12}\cdot\lambda_1 \end{aligned} \qquad \text{og} \quad (P_2)\quad \begin{aligned} v_{21} &= a_{21}\cdot\lambda_2 \\ v_{22} &= a_{22}\cdot\lambda_2\,, \end{aligned}$$

hvor λ_1 og λ_2 er de fremstillede produktmængder i de to processer, og v_{ij} er forbruget av faktor nr. j i proces nr. i, kan avbildes ved hver sin rette halvlinje (faktorstråle) gennem nulpunktet i et faktordiagram, jfr. *fig. 5.* I punktet (a_{11}, a_{12}) produceres der 1 enhed av produktet i processen P_1, dvs. $\lambda_1 = 1$, og tilsvarende har man $\lambda_2 = 1$ i punktet (a_{21}, a_{22}), når man anvender processen P_2.

Nu kan den samme produktmængde imidlertid også fremstilles ved, at man kombinerer de to processer, f. eks. ved, at man fremstiller $^1/_2$ enhed i P_1 og $^1/_2$ enhed i P_2 (dvs. $\lambda_1 = {}^1/_2$, $\lambda_2 = {}^1/_2$), eller $^1/_3$ enhed i P_1 og $^2/_3$ enhed i P_2 (dvs. $\lambda_1 = {}^1/_3$, $\lambda_2 = {}^2/_3$). At man således kombinerer to processer, svarer geometrisk til, at man sammensætter (adderer) vektorerne $(a_{11}\lambda_1, a_{12}\lambda_1)$ og $(a_{21}\lambda_2, a_{22}\lambda_2)$ i et kræfternes parallelogram[3]), således som det er vist på fig. 5 for $\lambda_1 = {}^1/_3$, $\lambda_2 = {}^2/_3$; man ser umiddelbart, at resultantens koordinater (det samlede forbrug av hver av faktorerne) blir $(a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2$, $a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2)$, og at det samlede produktionsresultat blir $x = \lambda_1 + \lambda_2$. Det geometriske sted for de kombinationer, der gir det samlede produktions-

---

[1]) Diskontinuert substitution av denne type er behandlet av *Zeuthen*, før man fandt på linear programming. Jfr. Zeuthen (1928), p. 38, og (1932), p. 18, samt (1942), p. 66.

[2]) En *proces* i denne forstand — et sæt av faste tekniske koefficienter — kaldes hyppigt også en »aktivitet«, og størrelsen λ_i, som vi her vil kalde *intensiteten* av processen, hedder ofte »aktivitetens niveau« (activity level).

[3]) Se f. eks. Gale & Danø (1954), pp. 9 ff.

resultat $x = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, ses at være den linje, der forbinder punkterne (a_{11}, a_{12}) og (a_{21}, a_{22}); de to endepunkter av dette linjesegment svarer til henholdsvis $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ og $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, og midtpunktet svarer til $\lambda_1 = \lambda_2 = {}^1/_2$. Forlængelserne av linjen udover endepunkterne kommer ikke i betragtning, eftersom man ikke kan producere negative mængder i modellen[1]).

Linjesegmentet mellem de punkter på de to stråler, der svarer til produktionen 1 i de respektive processer, er således *isokvanten* svarende til $x = 1$ i modellen[2]). For enhver værdi av x kan man tegne en sådan isokvant; de er alle parallelle, og isokvanten for $x = n$ ligger n gange så langt ude som $x = 1$ målt langs en vilkårlig stråle, eftersom vi har konstante tekniske koefficienter, således at der gælder en proportionalitetslov (constant returns to scale). På denne måde får vi, at ethvert punkt i vinkelrummet mellem de to proces-stråler kan realiseres ved at ta en passende lineær kombination av de to processer; sådanne »avledede processer« har de samme egenskaber som de »elementære processer«, hvorav de er dannet.

På samme måde som man i det limitationale tilfælde kunne definere isokvanten ikke som et punkt, men som en vinkel med ben parallelle

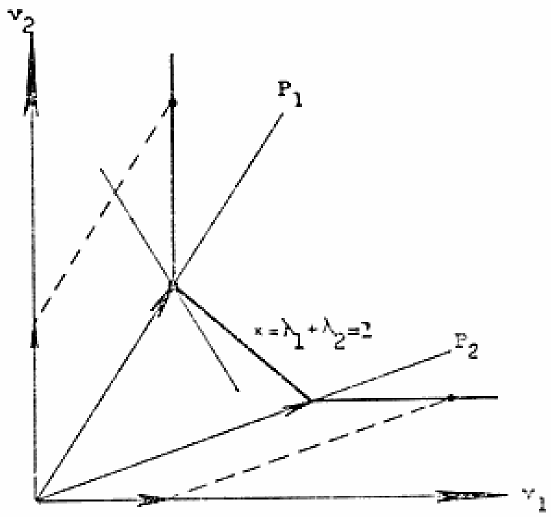

Fig. 6

[1]) Beviset er følgende: Vi har iflg. forudsætningerne

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \quad \lambda_2 &= 1 \\ a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 &= v_1 \\ a_{12}\lambda_2 + a_{22}\lambda_2 &= v_2\,, \end{aligned}$$

der ved elimination av λ_1 og λ_2 gir

$$v_2 - a_{22} = \frac{a_{12} - a_{22}}{a_{11} - a_{21}} \cdot (v_1 - a_{21})\,,$$

hvilket netop er ligningen for den rette linje gennem de to punkter.

[2]) En formelt lignende betragtning, blot anvendt på et problem med »kvalitetsfaktorer«, findes hos Barfod (1936), pp. 47 ff.

med akserne, kan man også her få en isokvant frem, som tillader rester, hvis man trækker linjer parallelle med akserne ud fra segmentets endepunkter, jfr. *fig. 6.* Ethvert punkt på disse forlængelser av isokvanten kan konstrueres i et kræfternes parallelogram som en lineær kombination av processen P_1 eller P_2 og en restproces, som foregår ud langs den pågældende akse, og som er udtryk for, at man har for meget av en faktor[1]) og så at sige kaster resten bort. Dette vil fremtræde klarere, når man udtrykker samlet forbrug av hver enkelt faktor som summen av det, der forbruges i de enkelte processer:

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot\lambda_1 + a_{21}\cdot\lambda_2 + \lambda_3 \qquad\quad &= v_1 \\ a_{12}\cdot\lambda_1 + a_{22}\lambda\lambda_2 \qquad\quad + \lambda_4 &= v_2, \end{aligned}$$

hvor λ_3 og λ_4 er resterne av de to faktorer; det vil igen ses, at de kan opfattes som inputs i to fiktive processer med de tekniske input-koefficienter (1,0) og (0,1) og med produktionen 0 enheder av x.

Men kun det stykke av isokvanten, der ligger mellem de to »aktive« processer P_1 og P_2, repræsenterer efficiente faktorkombinationer, som defineret ovenfor. Og hvis dette stykke havde haft positiv hældning, ville kun det »inderste« endepunkt ha været efficient; det repræsenterer jo samme produktmængde med et mindre forbrug av begge faktorer. Dette gælder også det specielle tilfælde, at de to processer ligger på samme stråle, dvs. hvis de forbruger faktorerne i samme forhold, men med forskellig produktivitet; man vil da altid foretrække den av de to processer, der har de absolut laveste produktionskoefficienter.

B. Antag nu, at virksomheden har 3 processer P_1, P_2 og P_3 til rådighed, hver defineret ved et sæt tekniske koefficienter:

$$\begin{aligned} v_{11} &= a_{11}\lambda_1 \qquad v_{21} = a_{21}\lambda_2 \qquad v_{31} = a_{31}\lambda_3 \\ v_{12} &= a_{12}\lambda_1 \qquad v_{22} = a_{22}\lambda_2 \qquad v_{32} = a_{32}\lambda_3 . \end{aligned}$$

I dette tilfælde kan man trække isokvantsegmenter mellem processerne to og to; hvis punkterne A, B og C på *fig. 7* repræsenterer produktion av 1 enhed i hver enkelt av de tre processer, vil man ved at kombinere P_1 og P_2 med passende intensiteter kunne fremstille 1 enhed i ethvert punkt på linjestykket AB. Tilsvarende repræsenterer BC kombinationer av P_2 og P_3, og AC kombinerer processerne P_1 og P_3. Ydermere kan man producere 1 enhed i ethvert punkt i det indre av trekanten ABC; ethvert sådant punkt kan jo betragtes som liggende på en isokvant, der forbinder en av vinkelspidserne med et punkt på den modstående side, dvs. som en kombination

[1]) De to processer P_1 og P_2 repræsenterer ydergrænserne for den proportion, hvori v_1 og v_2 kan kombineres uden rester. Smlgn. det limitationale tilfælde, hvor grænserne falder sammen.

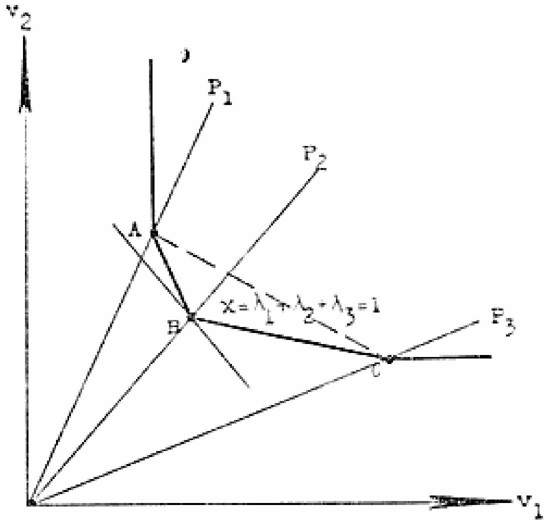

Fig. 7

av f. eks. P_2 med en kombination av P_1 og P_3. Et indre punkt i trekanten repræsenterer således en kombination av alle tre processer, og man indser let[1]), at summen av intensiteterne i denne kombination må være 1.

Men det fremgår umiddelbart, at kun trekantens sydvestlige begrænsning — her den brudte linje ABC — repræsenterer efficiente punkter. Det vil aldrig lønne sig at bruge en faktorkombination, der ligger nordøst for ABC, eftersom man da altid ville kunne finde en kombination på ABC, som gav samme produktmængde med et mindre forbrug av begge faktorer, dvs. med lavere omkostninger uanset faktorpriserne. Når vi taler om isokvanten for $x=1$, behøver vi derfor kun at interessere os for den brudte linje ABC (evt. forlænget parallelt med akserne, så vi får rester med). M. a. o., man vil i dette tilfælde aldrig bruge en kombination av P_1 og P_3 eller en kombination av alle tre processer, men kun kombinationer av P_1 og P_2 eller av P_2 og P_3 .

Hvis derimod punktet B havde ligget nordøst for linjestykket AC, ville processen P_2 overhovedet aldrig blive brugt; den ville være klart inefficient, alle kombinationer, hvori den indgik, ligeså, og isokvanten ville kun komme til at bestå av linjestykket AC.

Da faktorforbrug er proportionalt med produktmængde i hver enkelt proces, får man den isokvant, der svarer til $x=2$, ved at forbinde de punkter på de enkelte processer, der ligger dobbelt så langt fra nulpunktet som A, B og C; tilsvarende for ethvert positivt x. Tilføjer vi yderligere restprocesser, får vi hele den positive kvadrant i faktordiagrammet fyldt op med isokvanter, og gennem ethvert punkt i dette område går der en isokvant, som repræsenterer den største produktmængde, der kan fremstilles med den pågældende faktorkombination.

[1]) Nemlig ved først at kombinere f. eks. P_1 og P_3 og derpå kombinere resultanten med P_2 .

Generelt har man ved n aktive processer, at de punkter på processerne P_1, P_2, ..., P_n, som repræsenterer samme produktmængde, danner en konveks polygon; den brudte linje, der begrænser polygonen mod sydvest, og som er konveks set fra begyndelsespunktet, repræsenterer de efficiente faktorkombinationer på isokvanten. — Man kan generalisere videre til m produktionsfaktorer; for $m = 3$ blir isokvanten sammensat av plane facetter (som på en slebet diamant).

C. I stedet for at avbilde produktionsfunktionen grafisk ved en skare isokvanter kunne man naturligvis gøre det ved en skare produktivitetskurver, der viser, hvorledes x varierer partielt med en av faktorerne, når den anden faktor holdes fast. Dette svarer til, at man bevæger sig ud igennem faktordiagrammet parallelt med en av akserne og noterer sig produktmængden og den tilhørende mængde av den variable faktor, hver gang man krydser en isokvant. I det limitationale tilfælde vil en produktivitetskurve åbenbart være stigende med konstant hældning (konstant grænseproduktivitet), indtil man når det punkt, hvor den variable faktor ikke længere er minimumsfaktor (dvs. når man i faktordiagrammet krydser processtrålen); i dette punkt har kurven et knæk, og herefter er grænseproduktiviteten nul, dvs. produktivitetskurven vandret. I det generelle tilfælde, at man har mere end 1 sæt tekniske koefficienter til rådighed, ser man ved at betragte et faktordiagram med indtegnede isokvanter[1]), at produktivitetskurven må ha flere knæk, et for hver gang man krydser en (efficient) proces i faktordiagrammet; mellem knækkene er den lineær. Først når man passerer den »yderste« av de aktive processer, blir grænseproduktiviteten nul og kurven vandret.

IV. Kontinuert substitution.

Jo flere processer der står til rådighed, des mere nærmer man sig åbenbart til det grænsetilfælde, at der er en kontinuert række av substitutionsmuligheder. Produktionsbetingelserne udtrykkes i dette tilfælde ved en kontinuert og differentiabel produktionsfunktion

$$x = f(v_1, v_2, \ldots, v_m),$$

der er defineret som givende den største produktmængde, der under den givne teknologiske viden kan fremstilles ved enhver given kombination av faktorerne[2]). Under forudsætning av, at funktionen er homogen av 1. grad, kan enhver relativ faktorkombination, der tilfredsstiller den, betragtes som en proces i linear-programming-forstand; de tekniske koefficienter,

[1]) Jfr. fig. 9 nedenfor.

[2]) Dette krav svarer som tidligere nævnt til det »svage« efficienskriterium i linear-programming modellen, og til Gloerfelt-Tarp's »økonomiske definition« av produktionsfunktionen.

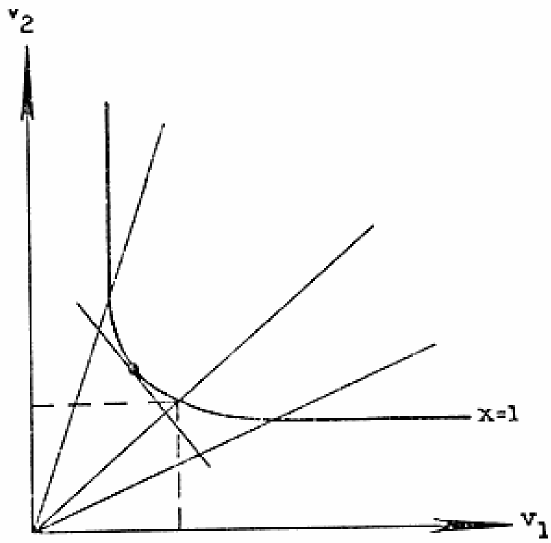

Fig. 8

der definerer processen, blir koordinaterne til skæringspunktet mellem den tilsvarende faktorstråle og isokvanten $x = 1$, som vist på *fig. 8*. Det, som i traditionel terminologi kaldes substitution av faktorer, blir nu substitution mellem processer; men realiteten er naturligvis den samme, nemlig at de tekniske koefficienter kan varieres. At der er kontinuert substitution, dvs. en kontinuert række av uendelig mange elementære processer, der tilfredsstiller produktionsfunktionen, viser sig i, at isokvanterne krummer jævnt uden knæk[1]). Også ved diskontinuert substitution kunne man variere den relative faktorkombination kontinuerligt — isokvanterne var jo sammenhængende kurver — men der var kun et endeligt antal elementære processer, som de mellemliggende processer var kombinationer av[2]). Ved kontinuert substitution må en sådan kombination av to eller flere processer være klart inefficient, når isokvanten — som man normalt antar — er konveks[3]). Men

[1]) Kontinuert ctr. diskontinuert substitution er ikke et spørgsmål om, hvorvidt selve *produktionsfunktionen* er kontinuert eller ej — linear-programming-produktionsfunktionen, som vi har beskrevet den ovenfor, er også en kontinuert funktion — men et spørgsmål om kontinuitet i *grænseproduktiviteterne*, dvs. om, hvorvidt produktionsfunktionen er differentiabel eller ej. Er der diskontinuiteter i grænseproduktiviteterne, får man knæk i produktivitetskurver og isokvanter (og, som vi skal se, i omkostningskurven).

[2]) Denne betragtning findes allerede hos Zeuthen (1932), pp. 18 f.

[3]) Skulle man alligevel komme ud for, at en isokvant hørende til en kontinuert produktionsfunktion er konkav på et eller flere stykker, må man netop gribe til kombination av flere processer (en »heterogen fremstillingsproces«) for at få en konveks, efficient isokvant frem. Dette er vist av *Gloerfelt-Tarp* (og generaliseret av *Erik Schmidt*), der således har foregrebet linear programming på et vigtigt punkt, selv om der opereres med en produktionsfunktion med kontinuert substitution, og terminologien naturligvis er en anden. Også den grafiske fremstilling er den samme (kræfternes parallelogram). Se Gloerfelt-Tarp (1937), og Schmidt (1939).

man kan opnå så god en tilnærmelse, som man ønsker, ved at øge antallet av elementære processer, der udspænder isokvanten[1]).

På tilsvarende måde kan man vise, at den jævnt krummende produktivitetskurve — den kurve for totalproduktet, man får ved at variere partielt på en av faktorerne og holde de andre fast — som fås under kontinuitetsforudsætninger, kan betragtes som et grænsetilfælde til den knækkede produktivitetskurve, der fremkommer i linear-programming-produktionsmodellen.

Man bemærker på fig. 8, at isokvanterne ikke begynder at krumme den gale vej, når de kommer udenfor substitutionsområdet, men fortsætter ud parallelt med akserne, ganske som linear-programming-isokvanterne udenfor det »substitutionsområde«, der avgrænses av de yderste aktive processer (P_1 og P_3 i fig. 7). Noget sådant ville nemlig stride mod definitionen av produktionsfunktionen som givende det maximale x ved given faktorindsats; det ville indebære, at en av faktorerne havde negativ grænseproduktivitet, og det ville da åbenbart lønne sig at lade en del av faktormængden ubenyttet[2]). Av samme grund er det udelukket, at produktivitetskurver kan ha en faldende gren; når grænseproduktiviteten er nået ned på nul, fortsætter kurven vandret ud.

V. Den økonomiske tilpasning under diskontinuert substitution.

A. Vi skal nu betragte virksomhedens økonomiske tilpasning i det tilfælde, hvor der kun er et endeligt antal processer til rådighed.

Som vi har set, kan en del av tilpasningsproblemet løses på rent »*teknisk*« grundlag, uden hensyn til prisforholdene, idet man ved hjælp av efficienskriteriet på forhånd udskiller processer og kombinationer av processer, der er åbenbart uøkonomiske i den forstand, at samme x kunne ha været fremstillet ved mindre forbrug av den ene faktor og mindre eller samme forbrug av den anden. I det specielle tilfælde, at vi kun har 1 proces til rådighed (limitationalitet), var dette kriterium tilstrækkelig stærkt til at gi en entydig løsning av minimalomkostningsproblemet ved given produktion, og dermed til at fastlægge en entydig expansionsvej, der er uavhængig av faktorpriserne; men i alle andre tilfælde gir efficienskriteriet kun en indsnævring av det område, indenfor hvilket løsningen skal søges, således at man for given x får en isokvant og for varierende x får et substitutionsområde. Når man således kan fremstille samme produktmængde ved flere faktorkombinationer, hvor den ene tar mere av den ene faktor og mindre av den anden, blir det nødvendigt at veje faktorerne med deres priser for at kunne sammenligne kombinationerne og finde den av dem, som er

---

[1]) Se f. eks. Koopmans: Introduction, p. 6, i Koopmans (ed.) (1951 a).

[2]) Jfr. Gloerfelt-Tarp (1937), pp. 258 f. Det er til dette formål, at G.-T. som tidligere nævnt indfører restprocesser og kombinerer dem med aktive processer, jfr. op. cit. p. 254.

optimal, dvs. at anstille egentlige *økonomiske* overvejelser i snævrere forstand[1]).

B. Minimalomkostningskombinationen for givet x, når vi har 2 variable faktorer, findes geometrisk som koordinaterne til det punkt, hvor den pågældende isokvant tangeres av en isokost-linje. Dette er antydet ovenfor på fig. 6—8 for et givet sæt av faktorpriser, hvis forhold bestemmer hældningen av isokostlinjen. Ved at dreje denne ser man umiddelbart, at når der er kontinuert substitution (fig. 8), vil selv en nok så lille forandring i faktorprisforholdet medføre, at en anden faktorkombination blir den optimale; i minimalomkostningspunktet er forholdet mellem faktorpriserne lig med det marginale substitutionsforhold (= forholdet mellem grænseproduktiviteterne). I *linear-programming*-tilfældet derimod (fig. 6 og 7) vil den optimale faktorkombination variere *diskontinuert* med faktorpriserne. Man vil i almindelighed få tangering i et av hjørnepunkterne på isokvanten, dvs. i et punkt, hvor der er diskontinuitet i det marginale substitutionsforhold; et sådant *hjørneminimum* er karakteriseret ved, at faktorprisforholdet (hældningen av isokostlinjen) ligger imellem de marginale substitutionsforhold til højre og til venstre for punktet (hældningerne av de to tilstødende segmenter av isokvanten), og så længe forholdet mellem faktorpriserne ikke kommer udenfor dette interval, vil man blive i den samme faktorkombination[2]). (I det specielle tilfælde, at man kun har 1 proces, dvs. limitationalitet, vil man overhovedet aldrig forandre faktorkombinationen, eftersom alle positive faktorpriser ligger indenfor det »tilladte« interval). Hvis man kommer ud for, at prisforholdet netop svarer til hældningen av et av isokvantsegmenterne, betyder det, at ethvert punkt på segmentet er en minimalomkostningskombination; m.a.o., der er mere end 1 løsning, som er optimal, men man kan altid finde en optimal løsning, som ikke tar mere end 1 proces i brug.

C. Expansionsvejen ved total tilpasning i de to variable faktorer fremkommer nu ved, at man finder minimalomkostningskombinationen for alle mulige værdier av x, ved et givet sæt av faktorpriser. Den er en ret linje — det fremgår av, at alle isokvanter er indbyrdes ligedannede og alle isokostlinjer ligeså — og grænseomkostningerne, der jo er defineret ud langs expansionsvejen, vil være konstante. Da grænseindtægten også er konstant (= produktprisen), så længe vi forudsætter, at virksomheden er mængde-

[1]) Om disse to stadier i tilpasningen, og således om den principielle arbejdsdeling mellem ingeniører og praktiserende økonomer, se Samuelson (1948), p. 230 ff.

[2]) Et minimum av en beslægtet type kan man komme ud for ved kontinuert substitution, når isokvanten når ud til aksen, således at det marginale substitutionsforhold ikke kan komme ned på nul. Ved et tilstrækkeligt lavt faktorprisforhold kan man da få en ligevægt i det punkt, hvor isokvanten når aksen, og hvor der ikke er lighed mellem prisforhold og substitutionsforhold. Jfr. Samuelson (1948), pp. 69 f.

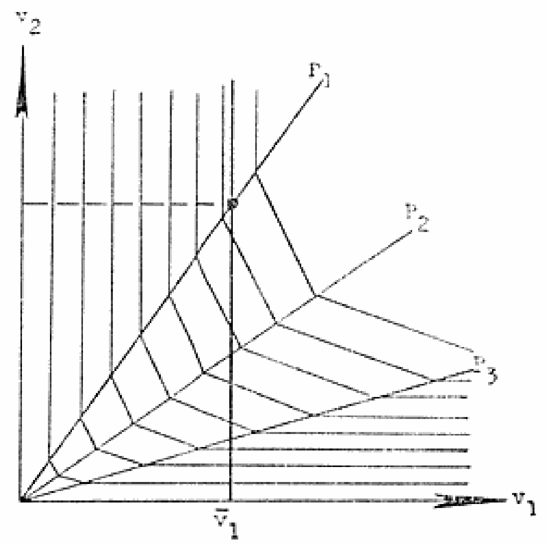

Fig. 9

tilpasser, er der intet maximum for profitten og dermed ingen grænse for virksomhedens expansion, når faktorerne er tilgængelige i ubegrænsede mængder, dvs. ved total tilpasning. Hvadenten vi har diskontinuert substitution mellem et endeligt antal lineære processer, eller vi har en kontinuert produktionsfunktion, der er homogen av 1. grad, vil vi få en ubegrænset expansion ud langs en enkelt proces; hvilken proces det blir, avhænger av faktorpriserne.

D. Antag nu, at en av faktorerne, f. eks. v_1, kun forefindes i den begrænsede mængde $\bar{v}_1$ og altså er en knap eller fast faktor. Det kan f. eks. være udtryk for en kapacitetsgrænse. Vi får da en partiel tilpasning ud langs linjen $v_1 = \bar{v}_1$ i faktordiagrammet, jfr. *fig. 9,* hvor der er indtegnet en skare ækvidistante isokvanter. Den største produktmængde, x^{max}, opnås dér, hvor man træder ud av substitutionsområdet, men hvor langt man vil gå, avhænger i øvrigt av prisforholdene. Man indser let ud fra fig. 9, at totalomkostningerne blir en kontinuert, men ikke-differentiabel funktion av x, sammensat av linjesegmenter, langs hvilke grænseomkostningerne er konstante. Knækpunkterne — dvs. diskontinuiteterne i grænseomkostningerne — svarer til de punkter, hvor linjen $v_1 = \bar{v}_1$ i fig. 9 krydser en processtråle; alle andre punkter repræsenterer kombination av 2 processer. Profitten blir maximal, hvor avstanden mellem totalindtægtskurven $r = px$ og omkostningsfunktionen er størst mulig, hvilket i almindelighed vil blive i et knækpunkt. — Dette vil i øvrigt sige, at man aldrig behøver at ta mere end 1 proces i brug, når der kun er 1 fast faktor. *Fig. 10* viser denne type omkostningsfunktion. Totalomkostningskurven — der, når man ser bort fra de

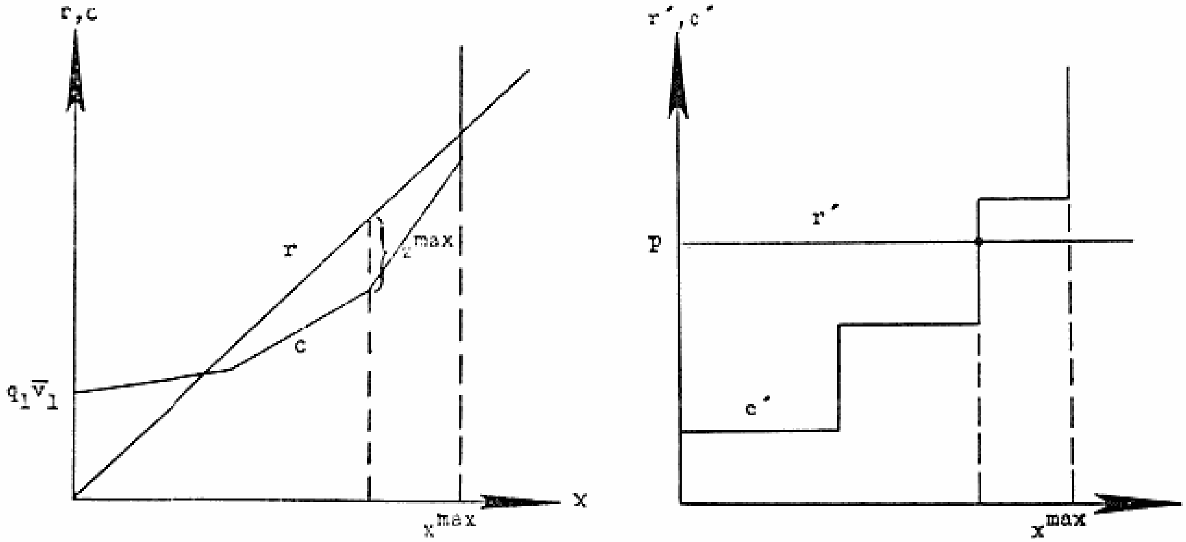

Fig. 10

faste omkostninger, kan opfattes som den omvendte funktion av en produktivitetskurve — og den tilsvarende trappeformede grænseomkostningskurve kan betragtes som approximationer til de sædvanlige kontinuerte og differentiable omkostningskurver; disse repræsenterer det grænsetilfælde, hvor antallet av trappetrin (knæk) er uendelig stort[1]). Det modsatte grænsetilfælde er limitationalitet, hvor der kun er ét sæt av tekniske koefficienter til rådighed, og trappen kun har ét trin (se fig. 4). Som det fremgår av fig. 10, er det optimale tilpasningspunkt ikke karakteriseret ved, at grænseindtægt = grænseomkostninger; dette illustrerer igen, at den marginale betragtningsmåde ikke er til megen nytte ved diskontinuert substitution, eftersom der er diskontinuitet i grænseproduktiviteter og grænseomkostninger.

Den reelle økonomiske tolkning av den diskontinuert stigende grænseomkostningskurve er, at når produktionen skal udvides indenfor et givet fast anlæg, vil man først gå så langt, som det er muligt med den proces, som bruger relativt mindst av den variable faktor og altså har de laveste grænseomkostninger (P_3 i fig. 9); vil man producere mere (overskride P_3 i figuren), må man ta den »næstbedste« proces i brug, men for at det skal kunne lade sig gøre, må man avgi noget av den faste faktor fra den bedste til den næstbedste, dvs. kombinere de to processer[2]); og så fremdeles.

[1]) Den faldende gren av grænseomkostningskurven får man ikke med. Men under forudsætning av constant returns to scale m. v. kan man vise, at stigende grænseproduktivitet, og dermed faldende grænseomkostninger, heller ikke kan forekomme i det kontinuerte tilfælde, når produktionsfunktionen defineres som givende den største produktmængde, der kan fremstilles ved enhver faktorkombination. Stigende grænseproduktivitet vil nemlig være inefficient, idet man kan opnå en større produktmængde ved at lade en del av den faste faktor ubenyttet. Se Gloerfelt-Tarp (1937).

[2]) Man indser dette, hvis man tænker sig ethvert punkt på linjen $v_1 = \bar{v}_1$ konstrueret ved et kræfternes parallelogram som en lineær kombination av de to processer, som punktet ligger imellem.

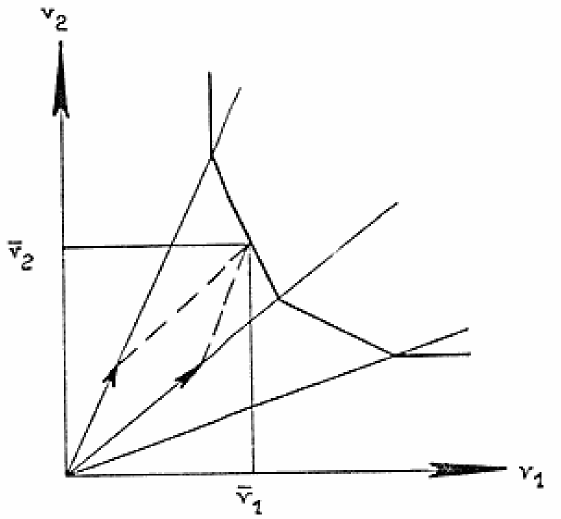

Fig. 11

E. Er *begge* faktormængder givne, $v_1 = \bar{v}_1$ og $v_2 = \bar{v}_2$, vil produktmængden være given, idet der kun går én efficient isokvant gennem punktet ($\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$); i dette tilfælde er der intet økonomisk optimeringsproblem i egentlig forstand, idet efficienskriteriet her gir en entydig bestemmelse av det optimale punkt. — Hvis ikke punktet tilfældigvis ligger på en av processtrålerne, dvs. hvis ikke faktorerne forefindes i en proportion, som netop svarer til de tekniske koefficienter i en enkelt av processerne, vil kravet om efficient udnyttelse av begge faktorer kun kunne opfyldes ved, at man tar 2 processer i brug og kombinerer dem[1]), jfr. *fig. 11*. Til gengæld er 2 processer altid tilstrækkeligt. Hvis punktet ligger udenfor »substitutionsområdet«, blir den ene av de to processer en restproces; ingen kombination av 2 aktive processer vil kunne udnytte begge faktorer, uden at der fremkommer en rest av den ene av dem.

Er der 3 faktorer, hvorav de 2 er faste, blir der igen et tilpasningsproblem. Dette og endnu mere generelle tilfælde kan ikke længere illustreres geometrisk i et faktordiagram; men man indser intuitivt, at det vil gi anledning til omkostningsfunktioner av lignende type som den, der er vist på fig. 10[2]).

[1]) Dette resultat er foregrebet av *Zeuthen* længe før linear programming; jfr. Zeuthen (1932), pp. 18 ff., og (1942), p. 66. Se også (1928), p. 34.

[2]) *Dorfman* nævner som eksempel en virksomhed, der råder over et eller flere ringere reserveanlæg, som først tages i brug, når hovedanlæggets kapacitet er fuldt udnyttet. De forskellige processer, der står til rådighed, består i udnyttelse av disse forskellige anlæg, og hvis der i hver av processerne er konstante variable omkostninger (til arbejdsløn etc.), får man netop en omkostningsfunktion av denne type; jfr. Dorfman (1951), pp. 16 f.

Dette eksempel er specielt derved, at hver av de faste faktorer kun optræder i en enkelt av processerne (dvs. alle faste faktorer undtagen én har koefficienten nul i hver enkelt proces), således at resultatet er umiddelbart indlysende. Men det er i høj grad økonomisk relevant.

Læser man »jordkvaliteter« i stedet for »anlæg«, ser man, hvordan eksemplet minder om *Ricardo*'s jordrentemodel. Den ekstensive dyrkningsgrænse er det ringeste av de anlæg, som det lønner sig at udnytte ved de herskende priser.

Så længe der kun er et endeligt antal processer til rådighed, må der nødvendigvis komme diskontinuiteter frem.

Generelt vil den optimale løsning ikke behøve at kombinere flere processer, end der er faste faktorer; vi skal senere komme tilbage til denne vigtige sætning, som er fundamental ved den analytiske og numeriske løsning av linear-programming-problemer.

BIBLIOGRAFI

A. Litteratur om linear programming.

A. Charnes, W. W. Cooper, D. Farr & Staff (1953): Linear Programming and Profit Preference Scheduling for a Manufacturing Firm. Journal of the Operations Research Society of America, 1953.

A. Charnes, W. W. Cooper & A. Henderson (1953): An Introduction to Linear Programming. New York, 1953.

A. Charnes, W. W. Cooper & B. Mellon (1952): Blending Aviation Gasolines — A Study in Programming Interdependent Activities in an Integrated Oil Company. Econometrica, 1952.

A. Charnes, W. W. Cooper & B. Mellon (1954): A Model for Programming and Sensitivity Analysis in an Integrated Oil Company. Econometrica, 1954.

J. Chipman (1951 a): Computational Problems in Linear Programming. Review of Economics and Statistics, 1953.

J. Chipman (1951 b): Linear Programming. Review of Economics and Statistics, 1953.

S. Danø (1955): Linear Programming in Ice Cream Making. Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi, 1955.

R. Dorfman (1951): Application of Linear Programming to the Theory of the Firm. Berkeley & Los Angeles, 1951. (Jfr. anmeldelse av Sven Danø i Nationaløkonomisk Tidsskrift, 1954).

R. Dorfman (1953): Mathematical, or »Linear«, Programming: A Nonmathematical Exposition. American Economic Review, 1953.

R. Frisch (1954): Kryssløpsanalyse. Referat av professor Ragnar Frisch's forelesninger holdt i høstsemesteret 1953. Ved Nils Bakke og Ole Bredal. Oslo, 1954. (Stencileret).

D. Gale & S. Danø (1954): Linear Programming: An Introduction to the Problems and Methods. Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi, 1954.

T. C. Koopmans (ed.) (1951 a): Activity Analysis of Production and Allocation. (Cowles Commission Monograph 13). New York, 1951.

T. C. Koopmans (1951 b): Efficient Allocation of Resources. Econometrica, 1951.

T. C. Koopmans (1951 c): Recent Developments in the Theory of Production. Econometrica, 1951.

W. W. Leontief (1951): The Structure of American Economy, 1919—1939. 2nd ed. New York, 1951.

W. W. Leontief and others (1953): Studies in the Structure of the American Economy. New York, 1953.

P. Nørregaard Rasmussen (1954 a): Om input-output analysen. Nationaløkonomisk Tidsskrift, 1954.

P. Nørregaard Rasmussen (1954 b): Input-output modellens anvendelsesmuligheder. Nationaløkonomisk Tidsskrift, 1954.

P. Nørregaard Rasmussen (1954 c): Nogle udvidelser af input-output modellen. Nationaløkonomisk Tidsskrift, 1954.

B. Produktionsteori iøvrigt.

B. Barfod (1936): Forenet Produktion og Kvalitetsændring. Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi, 1936.

H. Brems (1952 a): A Discontinuous Cost Function. American Economic Review, 1952.

H. Brems (1952 b): En sammenligning mellem den gængse og den Jantzen'ske omkostningsteori. Nationaløkonomisk Tidsskrift, 1952.

E. H. Chamberlin (1948): Proportionality, Divisibility and Economies of Scale. Quarterly Journal of Economics, 1948. (Diskussion i Q.J.E. 1949).

R. Frisch (1946): Innledning til produksjonsteorien. 7. utg. Første hefte. Oslo, 1946. (Stencileret).

R. Frisch (1953): Innledning til produksjonsteorien. Annet hefte. Oslo, 1953. (Stencileret).

R. Frisch (1935): The Principle of Substitution. An Example of Its Application in the Chocolate Industry. Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi, 1935.

B. Gloerfelt-Tarp (1937): Den økonomisk definerede Produktionsfunktion og den heterogene Fremstillingsproces. Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi, 1937.

J. R. Hicks (1946): Value and Capital. 2nd ed. Oxford, 1946.

P. A. Samuelson (1948): Foundations of Economic Analysis. Cambridge, Mass., 1948.

E. Schmidt (1939): Økonomisk definerede produktionsfunktioner. Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi, 1939.

E. Schneider (1934): Theorie der Produktion. Wien, 1934.

L. Walras (1954): Elements of Pure Economics. Translated by William Jaffé. London, 1954.

F. Zeuthen (1928): Den økonomiske Fordeling. København, 1928.

F. Zeuthen (1932): Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und ökonomische Qualität. Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd. IV (1932/33).

F. Zeuthen (1942): Økonomisk Teori og Metode. København, 1942.