

# NOGLE UDVIDELSER AF INPUT-OUTPUT MODELLEN

AF P. NØRREGAARD RASMUSSEN

I de to foregående artikler<sup>1)</sup> er den mest almindeligt anvendte input-output model blevet gennemgået forholdsvis detaillert. I det følgende skal tre forskellige varianter af modellen gennemgås: den lukkede model, den dynamiske og den inter-regionale model.

## *Den lukkede model.*

Den tidligere beskrevne model betegnes i reglen som *statisk* og *åben*. Modellens statiske karakter følger af, at investeringsproduktionen henføres til den autonome sektor. Dette betyder, at modellen forudsatte, at den samlede investering — såvel som fordelingen på de enkelte sektorer — var givet. Modellen forsøgte med andre ord *ikke* at forklare svingninger i kapitalapparatets størrelse. I det øjeblik sådanne bevægelser i tiden skal forklares ved en model bliver denne dynamisk i den forstand, at de variable refererer sig til forskellige tidspunkter eller tidsperioder<sup>2)</sup>. Den tidligere omtalte model var imidlertid netop statisk<sup>3)</sup>, fordi den ikke prætenderede at kunne forklare, hvorfor investeringerne i en given periode netop var så og så store.

Modellen er videre blevet betegnet som *åben*, fordi man opretholdt en autonom sektor — d. v. s. der optrådte exogene variable. Herved bliver modellen anvendelig til besvarelse af den type problemer, som før er omtalt. Nu er den åbne model faktisk en senere udgave, idet Leontief i begyndelsen udelukkende arbejdede med såkaldte »lukkede modeller«. I disse findes ingen autonom sektor. Betragtningen er da den, at vel flyder der fra de enkelte sektorer goder ud til konsum<sup>4)</sup>. Men denne strøm kan betragtes som en integrerende bestanddel af modellen, hvis man lader konsumet være et

1) »Om input-output analysen« og »Input-output modellens anvendelsesmuligheder«, *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, 92. bind, 1.—2. og 3.—4. hefte, 1954.

2) Jfr. Ragnar Frisch, »On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium«, *Review of Economic Studies*, Vol. III, No. 2, Febr. 1936.

3) Jfr. også, at Leontief's første bog, *The Structure of American Economy 1919—1939*, har undertitlen *An Empirical Application of Equilibrium Analysis*.

4) Investeringen blev slet ikke udskilt i disse første modeller.

# NOGLE UDVIDELSER AF INPUT-OUTPUT MODELLEN

AF P. NØRREGAARD RASMUSSEN

I de to foregående artikler<sup>1)</sup> er den mest almindeligt anvendte input-output model blevet gennemgået forholdsvis detaillert. I det følgende skal tre forskellige varianter af modellen gennemgås: den lukkede model, den dynamiske og den inter-regionale model.

## *Den lukkede model.*

Den tidligere beskrevne model betegnes i reglen som *statisk* og *åben*. Modellens statiske karakter følger af, at investeringsproduktionen henføres til den autonome sektor. Dette betyder, at modellen forudsatte, at den samlede investering — såvel som fordelingen på de enkelte sektorer — var givet. Modellen forsøgte med andre ord *ikke* at forklare svingninger i kapitalapparatets størrelse. I det øjeblik sådanne bevægelser i tiden skal forklares ved en model bliver denne dynamisk i den forstand, at de variable refererer sig til forskellige tidspunkter eller tidsperioder<sup>2)</sup>. Den tidligere omtalte model var imidlertid netop statisk<sup>3)</sup>, fordi den ikke prætenderede at kunne forklare, hvorfor investeringerne i en given periode netop var så og så store.

Modellen er videre blevet betegnet som *åben*, fordi man opretholdt en autonom sektor — d. v. s. der optrådte exogene variable. Herved bliver modellen anvendelig til besvarelse af den type problemer, som før er omtalt. Nu er den åbne model faktisk en senere udgave, idet Leontief i begyndelsen udelukkende arbejdede med såkaldte »lukkede modeller«. I disse findes ingen autonom sektor. Betragtningen er da den, at vel flyder der fra de enkelte sektorer goder ud til konsum<sup>4)</sup>. Men denne strøm kan betragtes som en integrerende bestanddel af modellen, hvis man lader konsumet være et

1) »Om input-output analysen« og »Input-output modellens anvendelsesmuligheder«, *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, 92. bind, 1.—2. og 3.—4. hefte, 1954.

2) Jfr. Ragnar Frisch, »On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium«, *Review of Economic Studies*, Vol. III, No. 2, Febr. 1936.

3) Jfr. også, at Leontief's første bog, *The Structure of American Economy 1919—1939*, har undertitlen *An Empirical Application of Equilibrium Analysis*.

4) Investeringen blev slet ikke udskilt i disse første modeller.

input i sektoren »husholdninger«, der på den anden side som output har udbuddet af arbejdskraft.

Om man anlægger denne betragtning, er det åbenbart, at modellen bliver »lukket« i den forstand, at der ikke findes »løse ender«. Al output er samtidig input og hele systemet bliver determineret, herunder også beskæftigelsen.

Nu kan der rejses vægtige indvendinger mod forudsætningen bag de for den åbne model givne produktionsfunktioner. Hver sektors input-struktur er fastfrosset. Man forudsætter at alene »tekniske« forhold bestemmer input-strukturen og regner tilmed med proportionalitet mellem niveauet for totalproduktion og niveauet for det fordelingsmæssigt fastfrosne input. Men så længe modellen holdes »åben«, har man dog altid den mulighed, at man alene betragter de sektorer som endogene, hvor man a priori kan forvente, at disse hasarderede forudsætninger holder tæt.

Når imidlertid alle sektorer skal betragtes som endogene, tvinges man til i modellen at forudsætte, at disse »tekniske sammenhænge« virker på alle områder. Særligt vigtigt er det vel, at man i den således lukkede model må behandle konsumet ganske på linie med de tekniske produktionsfunktioner. Man forudsætter med andre ord, dels at konsumets fordeling på de enkelte sektorer holdes konstant og dels at konsumet er i et fastlåst forhold til beskæftigelsen.

Det kan næppe undre, at denne forudsætning på et tidligt tidspunkt blev opgivet. Man klippede med andre ord systemet i stykker og åbnede derved mulighed for at besvare det allerede anførte spørgsmål: Hvor stor en totalproduktion skal der præsteres i de enkelte sektorer, hvis der skal stå en så og så stor godemængde fra de forskellige sektorer til disposition for konsum og investering.

Der er vist næppe tvivl om, at den åbne model bragte input-output analysen ned på jorden. Men samtidig opstår der en række nye problemer. Thi man må på en eller anden måde have de nu optrædende exogene variable bestemt. — Selv om man således har måttet forlade den oprindelige, lukkede model, så står der dog det faktum tilbage, at den autonome efterspørgsel er bestemt ikke alene af det offentliges politik, men også — trods alt i første række — af borgernes forbrugsfunktioner. Disse sidste var — omend i helt utilfredsstillende form — en integrerende bestanddel af den lukkede model, men er bortamputeret i den åbne model.

Det følger da, at undersøgelser over forbrugsfunktionen bliver af central interesse som et nødvendigt supplement til den åbne model. Forbrugsfunktionen udgør jo så at sige den anden halvdel. Ud fra dette synspunkt kan man således betragte den åbne input-output model og forbrugsfunktionen som to hinanden supplerende redskaber. Det virker derfor helstøbt, når

Leontiefs sidste bog<sup>1)</sup> i 5. del bringer en undersøgelse af James S. Duesenberry og Helen Kistin over forbrugsfunktionen. Tilmed kan man måske påstå, at hele input-output analysens problemstilling her viser sig som en frugtbar inspiration ved at rette opmærksomheden ikke alene mod det samlede konsums bestemmelse, men — nok så meget — mod bestemmelsesgrundene for konsumets fordeling på de enkelte poster, d. v. s. sektorer.

Man kan måske udtrykke det således, at den lukkede model er blevet åbnet for derved at give mulighed for anvendelsen af en mere realistisk undersøgelse af forbrugets bestemmelsesgrunde. At man således har »klippet systemet over« betyder derfor ikke, at man udelukker en økonomisk analyse, jfr. Duesenberry og Kistin<sup>2)</sup>:

»It is possible to stop with a system which includes only technical relations of the input-output, capital-output type, taking the bill of goods as a datum. But since the bill of goods plays such an important role in determining the activity of the economy it is desirable if possible to take account of the relationships governing consumer behavior in the systematic analysis of general interdependence rather than to take the outcome of those relations as data«.

[Med »the bill of goods« menes den samlede autonome efterspørgsel].

På den anden side kan man så tænke sig, at en tilstrækkelig omhyggelig undersøgelse vil muliggøre, at en del af den autonome efterspørgsel igen bliver overført til modellens endogene del. Eller som det også udtrykkes af Duesenberry og Kistin (samme sted):

»The ultimate aim of analysis in terms of general interdependence is to achieve a system which is as nearly closed as possible. It is doubtful whether, in the present stage of knowledge, a completely closed system can be achieved. Some elements in the system, e.g. some aspects of investment decisions, must remain arbitrary in the sense that they are not understood and cannot be predicted from knowledge of other economic variables. If the system is closed except for a few elements of the type just mentioned, those elements play the role of *deus ex machina* and control the system. When we analyze the structure of an automobile we take as data the actions of the driver. But given the way in which he manipulates the controls, the actions of all parts of the car at each point of time can be deduced from knowledge of the structure of the car. In the same way the actions of all parts of the economy can be deduced from movements of the arbitrary variables if we know the structure of the economy«.

Man kan således på lidt længere sigt forestille sig, at når input-output modellerne på den ene side og undersøgelser over forbrugsfunktionen på den anden side er blevet »tilstrækkelig« detaljerede og fuldstændige, vil man igen forsøge med lukkede eller i det mindste »mindre åbne« modeller, hvor

1) *Studies in the Structure of the American Economy*, Oxford University Press, New York, 1953.

2) *Op. cit.*, p. 451.

i det mindste den del af den autonome efterspørgsel, det kan være økonomisk teoris opgave at »forklare«, indgår blandt de endogene sektorer. Tilbage bliver dog stadig autonomt bestemte dele af konsum og investering, som — ex definitione — må betragtes som data for den økonomiske teori.

Det vil være en åbenbar fordel, hvis man kan få væsentlige dele af den autonome efterspørgsel (i den åbne model) indbygget i modellen. Herved vil denne nemlig umiddelbart indregne virkningen af forbrugs-multiplikatoren i samme omfang som modellen er blevet lukket. Den almindelige, åbne input-output model tager jo ikke hensyn hertil.

#### *Statik contra dynamik.*

Som allerede anført er det imidlertid endnu alene den åbne model, som anvendes. (De første lukkede modeller, Leontief konstruerede, blev aldrig udnyttet for praktiske formål). Det er endvidere alene de statiske modeller, som har fundet praktisk anvendelse. I Leontiefs sidste arbejde<sup>1)</sup> er der imidlertid gjort forsøg med en dynamisk analyse. Hele forskellen mellem den statiske og den dynamiske analyse udtrykkes på en usædvanlig klar og præcis måde af Leontief<sup>2)</sup>:

Within the framework of an explicitly formulated theoretical system, economic change can be explained either as structural change or as a dynamic process. In the first case, the variation of the dependent variables is simply related to the underlying changes in some of the basic data; in the second, the law of change itself is considered as given, i.e. built into the structure of the explanatory scheme. The law of change might, of course, be changing over time; this is the case of structural variation in a dynamic system.

In considering these distinctions, it is important to remember that they refer to differences in theories, that is, to different methods describing and explaining the observed facts rather than to some intrinsic properties of the observed reality itself. Alternative theories, instead of being mutually exclusive, might furthermore be hierarchically related to each other. A dynamic theory could, for example, treat the data of the less general, static theory as its variables and thus, taking up where the latter leaves off, reduce what in the first instance appeared to be a structural change to a dynamic law. Such generalization of a theoretical approach would necessarily have to be accompanied by a corresponding widening, or rather deepening, of its empirical basis.«

Og videre (som indledning til kap. 3 om »Dynamic analysis«):

»A static theory derives the changes in the variables of a given system from the observed changes in the underlying structural relationships: dynamic theory goes further and shows how certain changes, in the variables can be explained on the basis of fixed, i.e. invariant, structural characteristics of the system.«

<sup>1)</sup> *Studies* . . . ., 1953, kap. 3, 6 og 7 samt appendix 1.

<sup>2)</sup> *Op. cit.*, p. 17.

I den dynamiske formulering går modellen da videre og trækker investeringen ind som en endogen faktor. *Formelt* er det — som man nærmere kan se det gennemført hos Leontief i kap. 3 — sådan set en forholdsvis let ændring, der gennemføres. Det sker ved at drage ændringer i realkapitalen — enten fast realkapital eller lagre — ind i billedet.

Den statiske model er opbygget omkring »de tekniske koefficienter« ( $a$ 'erne), som angiver input per output enhed, men som allerede refererer sig til egentlige råmaterialer og hjælpestoffer — samt arbejdskraften. Derimod fortæller tabellen over disse koefficienter intet om sektorernes »behov« for investeringsgoder i forhold til produktionen. Forholdet er jo det, at investeringen i den statiske model er overført til den autonome sektor og således ikke *forklares* ved modellen. Herved bliver virkningen af *en given produktion af investeringsgoder* (som så iøvrigt må forklares på anden måde) på sektorernes aktivitet forklaret ved modellen, men *man mangler en med modellen sammenhængende forklaring på, hvorfor investeringen nu netop er så og så stor*. Kapitalapparatet bliver et »primært input«, som er givet.

#### Den åbne dynamiske model.

Dette problem tages nu op i en dynamisk analyse. Benytter man Leontiefs terminologi og lader  $S_{ij}(t)$  stå for lageret (i vid forstand) eller kapitalapparat produceret af sektor nr.  $i$  og indkøbt og anvendt af sektor nr.  $j$ , kan man lade  $\frac{d(S_{ij}(t))}{dt} = \dot{S}_{ij}$  stå for ændringer heri, d. v. s. investeringen. Man betragter nu investeringen som en del af den ikke-autonome sektor.

I de forudgående artikler blev følgende symboler benyttet:

$x_{ij}$  = salg fra sektor nr.  $i$  til sektor nr.  $j$  i given periode;

$x_{ia}$  = salg fra sektor nr.  $i$  til de autonome sektorer i given periode;

$X_i = x_{ia} + \sum_{j=1}^m x_{ij}$ ; d. v. s. totalproduktionen i sektor nr.  $i$ , idet

der antages at være  $m$  endogene sektorer;

$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$ ;  $a$ 'erne blev benyttet som parametre.

Man fik da umiddelbart, at

$$X_i = x_{ia} + \sum_{j=1}^m x_{ij} = x_{ia} + \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j \quad (i = 1, 2 \dots m) \quad (1)$$

hvoraf

$$X_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} x_{ja}. \quad (i = 1, 2 \dots m) \quad (2)$$

I analogi hermed får man nu for den dynamiske model, at

$$X_i = x_{ia} + \sum_{j=1}^m x_{ij} + \sum_{j=1}^m \dot{S}_{ij}, \quad (i = 1, 2 \dots m) \quad (3)$$

Disse relationer udtrykker blot, at en given sektors totalproduktion er lig summen af sektorens produktion for den autonome sektor (konsum), dens produktion af råmaterialer og hjælpestoffer for de  $m$  endogene sektorer og dens produktion af investeringsgoder (regnet brutto) for de  $m$  sektorer. Her er  $x_{ia}$  imidlertid »skrumpet ind« ved at investeringerne er pillet ud og gjort til endogene variable. (3) er en rent bogholderimæssig identitet.

Nu indføres imidlertid en »beskrivende« relation ganske analogt til den statiske model. Det forudsættes nemlig, for det første at kapitalapparatets størrelse i de enkelte sektorer kun afhænger af vedkommende sektors totalproduktion, at altså  $S_{ij} = F(X_j)$ . Men for det andet regner man med, at denne sammenhæng — ligesom ved den statiske model — kan udtrykkes »tilstrækkeligt præcist« ved en proportionalitetsfaktor ( $b$ ). Man får med andre ord for sektor nr. 1 de  $m$  relationer:

$$S_{11} = b_{11}X_1; S_{21} = b_{21}X_1; \dots S_{i1} = b_{i1}X_1; \dots S_{m1} = b_{m1}X_1$$

og analogt for de øvrige sektorer op til sektor nr.  $m$ :

$$S_{1m} = b_{1m}X_m; S_{2m} = b_{2m}X_m; \dots S_{im} = b_{im}X_m; \dots S_{mm} = b_{mm}X_m$$

hvilket sæt af ligninger kort kan skrives:

$$S_{ij} = b_{ij}X_j, \quad (i \text{ og } j = 1, 2 \dots m) \quad (4)$$

Hermed er åbenbart indført et nyt sæt af »tekniske koefficienter« — og et sæt af forudsætninger, som åbenbart er »analoge« til de for  $a$ 'erne anførte<sup>1)</sup>. Det ses også, at den kritik, som kan rettes mod forudsætningen om, at  $a$ 'erne kan betragtes som parametre, stort set kan gentages i relation til (4).

For at skelne mellem disse to sæt af »tekniske koefficienter« kan man med Leontief betegne  $a$ 'erne som »strukturelle strøm-koefficienter« og  $b$ 'erne som »strukturelle kapital-koefficienter«<sup>2)</sup>.

Man går nu videre og finder af (4), at

$$\dot{S}_{ij} = b_{ij}\dot{X}_j, \quad (i \text{ og } j = 1, 2 \dots m) \quad (5)$$

Denne relation udtrykker, at investeringskøb for en bestemt sektor (nr.  $j$ ) er ligefrem proportional (med  $b$ 'erne som proportionalitetsfaktor)

1) Det bemærkes, at man analogt til den statiske model kan vælge, om man ønsker at tage hensyn til transaktioner inden for sektorerne (intra-sektor bevægelserne) eller ej, d. v. s. sætte  $b_{ii} = 0$  eller lade  $b_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, 2 \dots m$ ).

2) På engelsk er betegnelserne henholdsvis »the structural flow coefficients« og »the structural capital (or stock) coefficients«.

med ændringen i sektor nr.  $j$ 's totale produktion, idet  $\dot{X}_j = \frac{dX_j}{dt}$ . Denne antagelse følger direkte af (4).

Indsættes nu (5) i (3) får man

$$X_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^m b_{ij} \dot{X}_j + x_{ia}$$

eller

$$X_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j - \sum_{j=1}^m b_{ij} \dot{X}_j = x_{ia} \quad (i = 1, 2 \dots m) \quad (6)$$

hvilket åbenbart er dynamiske varianter af (1) — og som man kunne skrive ud i detaljer for dermed eventuelt at få en bedre forståelse af systemet.

Man står nu igen med et sæt af ligninger, som indeholder endogene variable, parametre og exogene variable. Da endogene variable er totalproduktion i de forskellige sektorer ( $X$ 'erne), som imidlertid nu også optræder med deres første afledte (m. h. t. tiden). Det drejer sig således om et sæt af differentiallyigninger. Parametrene er  $a$ 'erne og  $b$ 'erne — de to sæt af »tekniske koefficienter«. De exogene variable er den autonome efterspørgsel ( $x_{ia}$ ,  $i = 1, 2 \dots m$ ), som nu alene er efterspørgslen efter konsumvarer.

Som det vil fremgå af det i afsnittet ovenfor om den lukkede model anførte, vil man dog kunne tænke sig, at man alene overfører en del af investeringerne til de ikke-autonome sektorer — nemlig den del, som økonomisk teori kan »forklare« (ved (5)). Det kan således meget vel tænkes, at man efterlader en del autonom investering (f. eks. den politisk bestemte) i  $x_{ia}$ . Eksporten vil iøvrigt også i reglen indgå i  $x_{ia}$ , men der er for oversigtens skyld her regnet med et lukket samfund. (Denne forudsætning er ikke særlig indskrænkende for modellen, men letter forståelsen af problemernes mere principielle karakter).

I og med at der således stadig optræder exogene variable, vedbliver det at være en åben model, som — ganske analogt til den åbne, statiske model — ikke determineres før man på en eller anden måde får opgjort værdierne af de exogene variable ( $x_{ia}$ ). På den anden side vil oplysninger om disse determinere modellen i den forstand, at de variable ( $X$ 'erne) nu kan bestemmes. Man kan således forestille sig, at man ved en fra modellen adskilt økonomisk analyse — f. eks. af forbrugsfunktionen — får udleveret de exogene variable — som dog også kan tænkes fastlagt ved ikke-økonomiske analyser (men f. eks. ved angivelse af bestemte politiske mål). Derefter kan man (efter korrektion for indkomstmultiplikatorens virkninger) indsætte de således autonomt (i det mindste i relation til modellen autonomt) fastlagte variable, hvorefter man kan bestemme de endogene variable: de enkelte sektorer's totale produktion.



Så vidt er det hele analogt til den åbne, statiske model beskrevet i en tidligere artikel. Der er imidlertid sket det væsentlige, at i ligningerne (6) optræder — i modsætning til ligningerne (1) — ikke alene totalproduktionen i de enkelte sektorer, men også ændringerne heri. Det drejer sig nu om differentialligninger. Konsekvensen heraf er den meget væsentlige, at de ubekendte nu ikke er tal, men kurver. Når man løser (6) finder man ikke *værdien* af totalproduktionen ( $X$ 'erne), men *forløbet* gennem tiden af totalproduktionen.

Det vil her føre for vidt at gå nærmere ind på løsningen af (6). For detaljer må der her henvises til Leontiefs nye bog, kap. 3. Man vil måske intuitivt kunne få en fornemmelse af, at når de ubekendte således er kurver, d. v. s. forløbet gennem tiden, vil det for denne åbne model ikke være tilstrækkeligt at opgive værdien af den autonome efterspørgsel. Disse exogene variable må opgives »i samme dimension« som de endogene variable, d. v. s. man må (udefra) oplyse *forløbet* gennem tiden af den autonome efterspørgsel.

Det vil måske også være bekendt, at man for løsningen af sådanne differentialligninger må have kendskab til *værdien* af de variable på et givet tidspunkt — initialværdierne. Men dette er naturligvis ikke noget særligt problem, idet disse initialværdier jo kan aflæses direkte af den givne input-output tabel. Det skal endelig bemærkes, at de strukturelle kapital-koefficienter ( $b$ 'erne) repræsenterer et helt nyt sæt af oplysninger, som ikke vil kunne aflæses af den almindelige input-output tabel. Beregningen af  $b$ 'erne forudsætter, at man forsøger at bestemme et investerings-kredsløb. Væsentlige dele af Leontief's nye arbejde drejer sig netop om disse kapital-koefficienter, d. v. s. realkapitalbehovet per output-enhed (evt. per kapacitets-enhed).

Som allerede før nævnt er dette en ny udvikling, som foreløbig slet ikke er nået ud over experimenternes stadi. Man føler dog alligevel her lyst til at vifte med flaget og henvise til, at der faktisk findes sådanne investeringsmatricer i de to offentliggjorte undersøgelser over den danske nationalindkomst<sup>1)</sup>.

#### *Den inter-regionale model.*

Der er i hvert fald tre helt nye problemstillinger i Leontief's sidste bog (1953). For det første er det noget nyt, at input-output analysen explicit begynder at interessere sig for den autonome efterspørgsels bestemmelsesgrunde, som behandlet ovenfor. For det andet er problemstillingen i og løsningen af den dynamiske model et nyt fremstød. På begge disse områder

<sup>1)</sup> »Nationalproduktet og Nationalindkomsten 1930—46«, *Statistiske Meddelelser*, 4-129-5, tabel II og »Nationalproduktet og nationalindkomsten 1946—49«, do., 4-140-2, tabel II.

kan man formentlig vente en lang række undersøgelser i den nærmeste fremtid. De formelle problemer er her allerede løst så langt, at det i første omgang må blive rent empiriske arbejder, der her vil kunne presse udviklingen fremover.

Den tredje og sidste problemstilling findes i 2. del<sup>1)</sup> af Leontiefs nye bog: Den inter-regionale analyse. Da dette er en både original og lovende anvendelse af input-output analysen, er det på sin plads at ofre problemstillingen en omtale.

Det skal dog straks bemærkes, at det ikke er fuldstændig korrekt når det anføres, at denne del af Leontiefs bog er noget helt nyt. Allerede i 1951 offentliggjorde Walter Isard — en af Leontiefs medarbejdere — en artikel om dette problem<sup>2)</sup>. Man kunne iøvrigt også her henvise til den almindelige lokaliseringsteori som er forbundet med navne som Hoover, Palander, Lösch m. fl. Videre er forbindelsen til den inter-regionale handels teori — som f. eks. udviklet af Ohlin — åbenbar. Der er iøvrigt en ikke helt uvæsentlig forskel mellem Isards metode og den beskrevet i Leontiefs bog.

I Isards model fra 1951 opdeles hver sektor i input-output tabellen i regionale komponenter. Man betragter således mursten produceret i Jylland som en vare forskellig fra mursten produceret på Sjælland. Dette betyder en fuldstændig regional opdeling af tabellen.

Leontiefs model er alt taget i betragtning lidt mindre pretentiøs. Her opdeles alene de sektorer, som har en åbenbar regional tilknytning. Der skelnes således imellem regionale og nationale produkter. Ved at foretage en regional opdeling af alle sektorer, vil Isards model åbenbart overvurdere regionernes betydning, idet modellen udelukker substitution mellem varer fra forskellige regioner. På den anden side kan man hævde, at Leontiefs model undervurderer regionernes rolle, idet hans model lader produktionen af rent regionale produkter afhænge af efterspørgslens geografiske placering.

#### *Modellens formelle indhold.*

Ikke mindst fordi man kan forvente, at disse geografiske analyser vil være af betydelig interesse for på een gang lokaliseringsteorien, den inter-regionale (og dermed den internationale) handels teori samt regional-geografien, er det måske værd kort at referere de to modeller. Isards model fås som følger: Lad der være givet en relevant geografisk opdeling på f. ex.  $g$  regioner; lad totalproduktion i sektor nr.  $i$  i region nr.  $k$  være  ${}_kX_i$  og lad tilsvarende  ${}_kY_i$  være den autonome efterspørgsel efter denne sektors produkt; lad videre  ${}_kx_{ij}$  være del af output i sektor nr.  $i$  i region nr.  $k$ , som går som input til sektor nr.  $j$  i region nr.  $l$ . Ganske analogt til den almindelige model beskrevet ved (1) og (2) vil man nu

<sup>1)</sup> »The Extension of Input-Output Techniques to Interregional Analysis«, med et kapitel (4) af Wassily Leontief, »Interregional Theory« og et kapitel (5) af Walter

<sup>2)</sup> »Interregional and Regional Input-Output Analysis: A Model of a Space-Economy«, *Review of Economics and Statistics*, Vol. XXXIII, No. 4, November 1951.



De regionale varer (sektorer) er sådanne, som med en given regional opdeling balancerer regionalt, d. v. s. der findes stort set ikke tilførsler eller fraførsler sted til eller fra regionen af disse goder. Derimod er nationale goder sådanne, som bevæger sig mellem regionerne<sup>1)</sup>. Lad os antage, at de første  $h$  af de  $m$  goder er regionale og produceres i hver region, idet produktionen dog godt kan være nul, medens de sidste  $m - h$  er nationale. Lad  $d$  og  $f$  stå som symbol for henholdsvis de regionale og de nationale goder (sektorer), d. v. s.

$$\begin{aligned} d &= 1, 2 \dots h \\ f &= h+1, h+2, \dots m. \end{aligned}$$

Lad os videre antage, at der — som før — findes  $g$  regioner. Symbolerne er iøvrigt som før, d. v. s. at f.ex.  ${}_k X_i$  angiver total produktion af vare nr.  $i$  i region nr.  $k$ ,  $X_i$  er lig summen af disse produktioner over antallet af regioner og analogt for den autonome efterspørgsel. Videre antages som før, at

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \quad (i \text{ og } j = 1, 2 \dots m) \quad (11)$$

kan benyttes som parameter i modellen. Men desuden forudsættes det, at også

$${}_k r_f = \frac{{}_k X_f}{X_f} \quad \begin{aligned} &(f = h+1, h+2, \dots m \\ &\text{og } k = 1, 2 \dots g) \end{aligned} \quad (12)$$

er en konstant. (11) og (12) er naturligvis analoge til den almindelige forudsætning om produktionsfunktionen for input-output modellen.

På »det totale niveau« får man et sæt af ligninger:

$$X_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j = y_i \quad (i = 1, 2 \dots h, h+1, \dots m) \quad (13)$$

der ved løsning giver

$$X_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} y_j \quad (i = 1, 2 \dots h, h+1, \dots m) \quad (14)$$

hvor igen  $A$ 'erne alene afhænger af  $a$ 'erne.

Ved at antage, at  ${}_k r_f$  defineret ved (12) er en konstant finder man, at

$${}_k X_f = {}_k r_f X_f \quad \begin{aligned} &(f = h+1, h+2 \dots m \\ &\text{og } k = 1, 2 \dots g) \end{aligned} \quad (15)$$

idet man her kan benytte de af (14) fundne værdier for  $X_j$  og på denne måde ikke alene finde nationens samlede produktion af alle varer — som bestemt ved (14) — men tillige finde produktionen i hver region af *nationale goder*.

Endnu mangler imidlertid bestemmelsen af den regionale produktion af *regionale goder*. I de første  $h$  ligninger af (13) er »boghølderiligningen« givet for de regionale goder, men uden hensyntagen til de enkelte regioner, d. v. s. disse  $h$  ligninger kan opfattes som summerede fra de tilsvarende ligninger for hver enkelt region. Hvis man betragter hver enkelt region for sig, får man således for de regionale goder, at

<sup>1)</sup> Det er selvfølgelig, at denne opdeling af goderne helt kommer til at afhænge af den valgte regionsopdeling, som er udgangspunktet.

$${}_k X_d - \sum_{j=1}^m a_{dj} {}_k X_j = {}_k y_d \quad \begin{array}{l} (d = 1, 2 \dots h \\ \text{og } k = 1, 2 \dots g) \end{array} \quad (16)$$

For hver værdi af  $k$  har man her  $h$  ligninger. Antal variable må man her holde skarp kontrol med.  $y$ 'erne er som før autonomt givet. Produktion af nationale goder i de enkelte regioner er allerede bestemt ved (15), d. v. s. vi i (16) også kender  ${}_k X_j$  for den del, hvor  $j$  går fra  $h+1$  og til  $m$ . (16) kan følgelig for at klarlægge dette omskrives til følgende (hvor de ubekendte kun optræder i de to første led, mens tredje led bliver konstant)

$${}_k X_d - \sum_{p=1}^h a_{dp} {}_k X_p - \sum_{q=h+1}^m a_{dq} {}_k X_q = {}_k y_d \quad \begin{array}{l} (d = 1, 2 \dots h \\ \text{og } k = 1, 2 \dots g) \end{array} \quad (17)$$

Tilbage bliver da  ${}_k X_d$ , ( $1 \leq d \leq h$ ), d. v. s. at antal ( $h$ ) af ubekendte stemmer med antal af ligninger og vi får således mulighed for at finde  ${}_k X_d$  ganske analogt til de tilsvarende systemer ovenfor. Det afgørende er, at vi kan finde hver enkelt regions output af de enkelte goder ved hjælp af givne værdier for den autonome efterspørgsel.

For detaljer må der igen henvises til den anførte kilde. Her skal det alene fremhæves, at Leontiefs model åbenbart ved indførelse af (12) forudsætter en fastlåst regional produktionsstruktur. Dette betyder med andre ord — som også fremhævet af Leontief — at der forudsættes proportional expansion eller kontraktion i alle regioner.

Ved at sammenholde de enkelte regioners produktion af de forskellige nationale goder med regionernes samlede input i autonome og ikke-autonome sektorer kan man åbenbart bestemme de enkelte regioners balance over for de andre regioner under eet. I modsætning hertil vil Isards model præcisere balancen over for hver enkelt af de andre regioner.

#### *Perspektiver ved den inter-regionale model.*

I Leontiefs bog er begyndelsen gjort til et empirisk arbejde med regionale modeller. Man bør videre nævne, at ideen er udnyttet af Hollis B. Chenery i et forsøg på at undersøge Syditaliens problemer<sup>1)</sup>. Men derudover er der vist ikke gjort forsøg med disse modeller. At der er meget store vanskeligheder ved at finde et tilfredsstillende statistisk grundlag vil være åbenbart og behøver ikke at uddybes.

Derimod skal der antydes en analyse, som måske kunne påstås at være analog til den geografiske. Forholdet er det, at man i opdelingen i sektorer ofte kommer til at dække over opdelinger, som fra andre synspunkter kan være af stor interesse. Når man summerer op for hele landet, vil man f. eks. hermed dække over de regionale forskelle, som fra visse synspunkter er af særlig interesse. Ovenfor er vist, hvorledes man kunne tænke sig at råde bod herpå. Men analogt kan man dække over forskelle, som f. ex. fra et

<sup>1)</sup> »Regional Analysis«, *The Structure and Growth of the Italian Economy*, M.S.A.-Special Mission to Italy, Rome, 1953, kap. V. (stencileret).

fordelingssynspunkt kan være af interesse. Vi vil eksempelvis i reglen behandle landbruget som een sektor. Men fra et fordelingssynspunkt og iøvrigt også fra et produktionssynspunkt kan det være af stor interesse at dele landbruget efter brugsstørrelserne.

Helt generelt kan man forestille sig, at en opdeling af de enkelte sektorer efter nye kriterier kan være af interesse<sup>1)</sup>. Man må da tænke sig input-output analysens rammer udnyttet i et forsøg på at analysere samspillet mellem de enheder eller grupper, som er givet med de nye opdelingskriterier. Den generelle teori herfor er så vidt vides ikke givet noget sted. Her skal alene synspunktet fremhæves. Gennemgangen af de regionale modeller ovenfor kan da tages som illustration.

---

<sup>1)</sup> Se P. Nørregaard Rasmussen, »Om indkomstfordelingen og handlen mellem sektorerne«, *Handelsvidenskabeligt Tidsskrift*, 15. årg., hefte 89—90, 1951.