# LANDSTINGSVALGET SOM ET STRATEGISK SPIL

Af GUSTAV LEUNBACH

EFTER krigen har to østrigere der lever i Amerika, matematikeren Johann v. Neumann og nationaløkonomen Oskar Morgenstern, udgivet en bog som åbner vejen til en fuldstændig revision av flere grene av nationaløkonomien og de øvrige samfundsvidenskaber, herunder specielt teorien om ufuldkommen konkurrence.*) Bogen behandler kun i ringe omfang direkte økonomiske problemer, men giver i første række en matematisk teori om spil som først er blevet udformet med henblik på kortspil o. lign., men som også finder anvendelse på f. ex. det »spil« der foregår mellem flere økonomiske enheder der producerer varer til et marked hvor hver fastsætter sit udbudskvantum, varekvalitet og andre aktionsparametre under hensyntagen til de andres forventede reaktioner på han handlinger.

Formålet med den foreliggende artikkel er at belyse anvendelsen av teorien ved et exempel, — hentet ikke fra nationaløkonomien men fra de øvrige samfundsvidenskabers stof —, som i matematisk henseende er forholdsvis simpelt og derfor egnet til at indføre læserne i spilteorien. Desuden præsenterer den et nyt synspunkt på landstingsvalget — i det hele taget på indirekte valg hvor mere end to partier deltager — som for et av de undersøgte valg (oktober 1920) giver til resultat at den mandatfordeling som faktisk blev opnået ikke er forenlig med en forudsætning om rationel handlemåde hos partiledelserne. Det er vel et spørgsmål i hvor stort omfang partierne bør handle rationelt i denne sammenhæng, men dette er ikke stedet til at drøfte det. Det er tilstrækkeligt at anvendelsen av spileorien har ført til at problemet er blevet rejst.

---

*) Neumann & Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, 2. udg., Princeton, 1947. I det følgende henvises med signaturen N. & M. til denne udgave. Se endvidere bl. a. artikler av Hurwicz i American Economic Review bd. 35, 1945, side 909—925, Marschak i Journal of Political Economy bd. 54, 1946, side 97—115, Kaysen i Review of Economic Studies bd. XIV (1), 1946—47, side 1—15 og Stone i Economic Journal, juni 1948, side 185—201. Et yderst kort resume i ikke-matematisk form av bogens hovedindhold er givet av Gustav Leunbach i Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi, 1948, (festskrift for F. Zeuthen) side 175—178. I en del større værker er der allerede gjort brug av N. & M.s teorier, således fra dansk side i Hans Brems: Some Problems of Monopolistic Competition, 1950 (doktordisputats).

# LANDSTINGSVALGET SOM ET STRATEGISK SPIL

Af GUSTAV LEUNBACH

EFTER krigen har to østrigere der lever i Amerika, matematikeren Johann v. Neumann og nationaløkonomen Oskar Morgenstern, udgivet en bog som åbner vejen til en fuldstændig revision av flere grene av nationaløkonomien og de øvrige samfundsvidenskaber, herunder specielt teorien om ufuldkommen konkurrence.*) Bogen behandler kun i ringe omfang direkte økonomiske problemer, men giver i første række en matematisk teori om spil som først er blevet udformet med henblik på kortspil o. lign., men som også finder anvendelse på f. ex. det »spil« der foregår mellem flere økonomiske enheder der producerer varer til et marked hvor hver fastsætter sit udbudskvantum, varekvalitet og andre aktionsparametre under hensyntagen til de andres forventede reaktioner på han handlinger.

Formålet med den foreliggende artikkel er at belyse anvendelsen av teorien ved et exempel, — hentet ikke fra nationaløkonomien men fra de øvrige samfundsvidenskabers stof —, som i matematisk henseende er forholdsvis simpelt og derfor egnet til at indføre læserne i spilteorien. Desuden præsenterer den et nyt synspunkt på landstingsvalget — i det hele taget på indirekte valg hvor mere end to partier deltager — som for et av de undersøgte valg (oktober 1920) giver til resultat at den mandatfordeling som faktisk blev opnået ikke er forenlig med en forudsætning om rationel handlemåde hos partiledelserne. Det er vel et spørgsmål i hvor stort omfang partierne bør handle rationelt i denne sammenhæng, men dette er ikke stedet til at drøfte det. Det er tilstrækkeligt at anvendelsen av spileorien har ført til at problemet er blevet rejst.

---

*) Neumann & Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, 2. udg., Princeton, 1947. I det følgende henvises med signaturen N. & M. til denne udgave. Se endvidere bl. a. artikler av Hurwicz i American Economic Review bd. 35, 1945, side 909—925, Marschak i Journal of Political Economy bd. 54, 1946, side 97—115, Kaysen i Review of Economic Studies bd. XIV (1), 1946—47, side 1—15 og Stone i Economic Journal, juni 1948, side 185—201. Et yderst kort resume i ikke-matematisk form av bogens hovedindhold er givet av Gustav Leunbach i Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi, 1948, (festskrift for F. Zeuthen) side 175—178. I en del større værker er der allerede gjort brug av N. & M.s teorier, således fra dansk side i Hans Brems: Some Problems of Monopolistic Competition, 1950 (doktordisputats).

Et spil i N. & M.s forstand defineres på følgende måde: Spillets mekanisme, der kan være av de mest forskellige slags, bestemmer eentydigt hvilket økonomisk (dvs. talmæssigt) resultat enhver given koalition blandt de deltagende spillere kan opnå mod de øvrige spilleres bedst mulige modstand. (Hvordan disse resultater bestemmes behandles meget udførligt i første halvdel av N. & M.s bog. I det foreliggende tilfælde volder dette punkt intet som helst besvær, »landstingsspillet« er fuldstændig determinert i snævrere forstand (specially strictly determined, se N. & M. side 150) og denne side av sagen vil ikke blive nærmere omtalt her.)

Spillet beskrives således ved den såkaldte »karakteristiske funktion« der for hver mulig koalition blandt spillerne bestemmer dennes »værdi«. En given koalition betegnes med S og værdien med v(S). Den karakteristiske funktion må opfylde følgende betingelser:

(1) $v(0) = 0$ — Den »tomme« koalition bestående av ingen deltagere får nødvendigvis værdien 0.

(2) $v(S+T) \geqq v(S) + v(T)$ — En given koalition får mindst lige så meget som summen av hvad to delkoalitioner den er sammensat av kunne få hver for sig.

Hvis den karakteristiske funktion endvidere opfylder betingelsen:

(3) $v(S) + v(\bar{S}) = v(I)$ — I er koalitionen bestående av alle spillere, $\bar{S}$ er koalitionen av alle undtagen dem der deltager i S, dvs. hvis man på vilkårlig måde opdeler spillerne i to modstående grupper udtømmer disse tilsammen den værdi som overhovedet kan tilfalde spillerne.

kaldes spillet et 0-sum spil. (For at betegnelsen 0-sum spil skulle være sproglig korrekt måtte det endvidere forudsættes — som N. & M. også fra begyndelsen gør det — at:

(4) $v(I) = 0$

dvs. spillerne som helhed hverken modtager noget beløb fra eller avgiver noget til omgivelserne, og enhver koalition vinder præcis hvad den modstående taber. Den ovenfor angivne definition er dog fra spillets synspunkt i enhver henseende tilstrækkelig.)

Når man skal opgøre resultatet av et spil nytter det i regelen hverken i økonomiske modeller eller i andre spil at lede efter en fordeling der er bedst mulig for alle spillere. For at nå frem sammenligner N. & M. to og to alle de fordelingsmuligheder der kan forekomme (man begrænser sig pr. definition til de tilfælde hvor ingen spiller får mindre end værdien av den koalition hvor han selv er eneste deltager) og opstiller følgende definition på begrebet domination: (Specielt med henblik på økonomiske modeller kan ordet domination med held oversættes ved »effektiv preference« der direkte angiver de to betingelser der opstilles.)

At en fordelingsmulighed (i N. & M.s terminologi imputation) $(x_1, .. x_n)$ hvor $x_i$ er det beløb, der tildeles spiller nr. i indenfor de av spillereglerne fastsatte rammer dominerer en anden imputation $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vil sige at der findes en koalition S blandt de n spillere (et effektivt sæt) sådan beskaffent at

(5) $\Sigma x_i \leqq v(S)$ hvor summationen går over de spillere som er medlemmer av S, »Effektivitet«

(6) $x_i > y_i$ for ethvert medlem av S, »Preference«,

dvs. medlemmerne av S skal i fællesskab være i stand til at skaffe sig så meget at den del av imputationen der vedrører dem kan opfyldes og de skal være eenstemmige om at foretrække x fremfor y.

En løsning til spillet defineres endelig som en gruppe av imputationer sådan beskaffen at en imputation i løsningen ikke kan dominere en anden i den samme løsning, men enhver imputation udenfor løsningen domineres av mindst een indenfor. Dvs. der er ikke noget effektivt sæt av spillere der er interesserede i at udbytte en av løsningens imputationer med en anden, men hvis man kommer udenfor løsningen er der altid et effektivt sæt der kan bringe en ind igen. Derimod er det ikke forbudt, og i de fleste tilfælde uundgåeligt at en imputation indenfor løsningen domineres av en udenfor.

Situationen ved et landstingsvalg kan beskrives således: På grundlag av de avgivne stemmetal fastsættes det rent mekanisk hvor mange valgmænd partierne kommer til at råde over i hver av de seks landstingskredse. Loven siger nu at valgmændene skal stemme efter deres overbevisning, men den gængse fortolkning av denne paragraf er at når en valgmand er valgt av et bestemt parti tjener han sin overbevisning bedst ved at stemme på den kandidat som partiledelsen med det større overblik anviser ham. Og partiledelsen indenfor den enkelte kreds arbejder heller ikke på egen hånd. Det er ikke en teoretisk mulighed men et i praksis ofte forekommende tilfælde når der er valg samtidig i flere kredse, at et parti i en kreds udlåner sine stemmer til et andet parti mod til gengæld i en anden kreds at få støtte til at vælge sin kandidat.

For enhver partikoalition i en given kreds bestemmer forholdstalvalgmåden eentydigt hvor mange mandater den kan få når den danner en valggruppe og alle de øvrige partier en anden, og summen av de to valggruppers mandattal er altid det totale antal mandater i kredsen. Vi har altså den karakteristiske funktion for et 0-sum spil, og når vi lægger funktionerne sammen for de kredse hvor der er valg samtidig får vi igen den karakteristiske funktion for et 0-sum spil.

I praksis forekommer det at to partier trækker lod om et mandat. Dette skulle i teorien svare til muligheden av brudne tal i mandatfordelingen. I den her opstillede model har jeg dog foretrukket kun at tillade imputationer med heltallige mandatantal for partierne. Tilsvarende er den karakteristiske funktion blevet »tvangsindrettet« til kun at antage hele værdier ved en mere eller mindre tilfældig regel for mandatfordelingen i de tilfælde hvor der i virkeligheden nødvendigvis måtte finde lodtrækning sted, f. eks. hvor der i en kreds skal vælges et ulige antal landstingsmænd og to partiprupper hver råder over præcis halvdelen av valgmændene.

Denne indskrænkning til hele tal i imputationerne har en dybtgående indvirkning på hele løsningsstrukturen ved kraftigt at skærpe betingelserne for domination. Når variation kun kan ske i spring på een forandres begrebet »større end« til »mindst een større end«, dvs. for at domination kan finde sted med en given koalition på p medlemmer som effektivt sæt må disse p i fællesskab kunne skaffe sig mindst eet mandat hver mere end de enkeltvis er i stand til, eller med spillets terminologi, værdien av denne koalition må være mindst p større end summen av værdierne av dens deltagere. Med en geometrisk analogi som kunne udbygges til et fuldstændigt bevis i en mangedimensional geometri kan man sige at i det kontinuerte tilfælde udgør de imputationer der dominerer — eller domineres av — en given imputation et eller flere åbne områder (dvs. begrænsningsfladen hører ikke til området), i det diskontinuerte tilfælde reduceres disse områder til enkelte punkter der skal ligge »langt fra« dels hinanden, dels begrænsningsfladen, dvs. mindre sådanne områder kan reduceres til et enkelt punkt eller til slet ingenting. Tilsvarende bliver i det diskontinuerte tilfælde løsningerne færre og mere omfattende, i grænsetilfælde hvor domination overhovedet ikke forekommer, bliver der kun een løsning som består av alle imputationer.

Den enkleste fremgangsmåde ved udledningen av samtlige løsninger er følgende. Først bestemmes udfra den karakteristiske funktion hvilke effektive sæt der overhovedet findes og dernæst hvilke imputationer der ikke domineres av nogen andre. Disse må høre med til enhver løsning, og omvendt kan de imputationer der domineres av disse ikke høre med til nogen løsning. Blandt de tiloversblevne (ofte temmelig få) kan samme fremgangsmåde benyttes. Hvis der findes en gruppe som indenfor dette område opfylder betingelserne for en løsning vil den sammen med de ikke-dominerede imputationer udgøre en løsning til spillet, og omvendt må enhver løsning til spillet være sammensat på denne måde.

### *Exempler.*

For oversigtens skyld transponeres de karakteristiske funktiner således at hvert parti på forhånd tildeles det antal mandater det kan få ved egen hjælp, og dette antal fradrages så overalt i den karakteristiske funktion. Herved bliver værdien av alle koalitioner på 0 eller 1 deltagere 0, og værdien av koalitioner på alle eller alle undtagen een bliver hele det tiloversblevne antal mandater (spillerummet). Alle andre værdier av den karakteristiske funktion bliver hele tal herimellem, og imputationerne bliver alle sæt av hele, ikke-negative tal hvis sum er spillerummet. Hvis der er n spillere og spillerummet er r vil der da findes $\binom{n+r-1}{r}$ forskellige imputationer. Betingelsen for at domination kan indtræffe bliver at der findes en koalition på p ($\geqq 2$) deltagere hvis værdi er mindst p.

*Ex. I.* Valget 1932 i 1., 4. og 6. kreds. I 4. kreds kunne de fire store partier hver for sig skaffe sig mandattal der tilsammen dækkede de seks pladser kredsen råder over, og indgåelse av koalitioner kunne altså ingen betydning få, så når resultaterne i de andre kredse lægges sammen kan 4. kreds lades ude av betragtning. I 1. kreds kunne liste A få 6 og liste C 3 mandater av kredsens 10, det sidste sikredes i en koalition enten mellem de to partier eller av et av dem med liste B. Liste K havde 2 valgmænd og kunne ikke spille nogen rolle. For 6. kreds angives udregningerne udførligt. (M er en missionsliste, de øvrige bogstaver er de sædvanlige partibetegnelser.)

| Antal | valgmænd. |
|---|---|
| A | 217 |
| B | 58 |
| C | 102 |
| D | 319 |
| E | 1 |
| F | 24 |
| M | 5 |
| Ialt | 726 |

Da der i kredsen vælges 12 landstingsmænd er fordelingstallet 726:13 = 56 (avrundet opad). Hvis f. ex. en koalition har et antal valgmænd mellem 4 og 5 gange fordelingstallet kan den fordele sine stemmer på 4 kandidater der hver får mere end fordelingstallet, den modstående koalition kan da ikke fordele det samme antal stemmer til mere end 8 kandidater og resultatet er således givet.

Partierne kan hver for sig opnå følgende resultater: A-3, B-1, C-1, D-5, de øvrige 0, og der er således 2 av mandaterne hvis fordeling beror på forhandling mellem partierne. Koalitioner mellem flere partier giver følgende resultater:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| AB 275—4 | | | | | |
| AC 319—5 | BC 160—2 | | | | |
| AD 536—9 | BD 377—6 | CD 421—7 | | | |
| AE 218—3 | BE 59—1 | CE 103—1 | DE 320—2 | | |
| AF 241—4 | BF 82—1 | CF 126—2 | DF 343—6 | EF 25—0 | |
| AM 222—3 | BM 63—1 | CM 107—1 | DM 324—5 | EM 6—0 | FM 29—0 |

| | | |
|---|---|---|
| ABC 377—6 | | |
| ABD 594—10 | ACD 638—11 | |
| ABE 276—4 | ACE 320—5 | ADE 537—9 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ABF 299—5 | ACF 343—6 | ADF 560—10 | AEF 242—4 | |
| ABM 280—5 | ACM 324—5 | ADM 541—9 | AEM 223—3 | AFM 246—4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| BCD 479—8 | | | |
| BCE 161—2 | BDE 378—6 | | |
| BCF 184—3 | BDF 401—7 | BEF 83—1 | |
| BCM 165—2 | BDM 382—6 | BEM 64—1 | BFM 87—1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| CDE 422—7 | | | | | |
| CDF 445—7 | CEF 127—2 | | DEF 344—6 | | |
| CDM 426—7 | CEM 108—1 | CFM 131—2 | DEM 325—5 | DFM 348—6 | EFM 30—0 |

Koalitioner med 4 eller flere deltagere fremgår som de modstående av disse.

Når vi trækker de før anførte tal for partierne hver for sig fra får vi den transponerede karakteristiske funktion:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| v(AB) = 0 | | | | | |
| v(AC) = 1 | v(BC) = 0 | | | | |
| v(AD) = 1 | v(BD) = 0 | v(CD) = 1 | | | |
| v(AE) = 0 | v(BE) = 0 | v(CE) = 0 | v(DE) = 0 | | |
| v(AF) = 1 | v(BF) = 0 | v(CF) = 1 | v(DF) = 1 | v(EF) = 0 | |
| v(AM) = 0 | v(BM) = 0 | v(CM) = 0 | v(DM) = 0 | v(EM) = 0 | v(FM) = 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| v(ABC) = 1 | | | | |
| v(ABD) = 1 | v(ACD) = 2 | | | |
| v(ABE) = 0 | v(ACE) = 1 | v(ADE) = 1 | | |
| v(ABF) = 1 | v(ACF) = 2 | v(ADF) = 2 | v(AEF) = 1 | |
| v(ABM) = 1 | v(ACM) = 1 | v(ADM) = 1 | v(AEM) = 0 | v(AFM) = 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| v(BCD) = 1 | | | |
| v(BCE) = 0 | v(BDE) = 0 | | |
| v(BCF) = 1 | v(BDF) = 1 | v(BEF) = 0 | |
| v(BCM) = 0 | v(BDM) = 0 | v(BEM) = 0 | v(BFM) = 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| v(CDE) = 1 | | | | | |
| v(CDF) = 1 | v(CEF) = 1 | | v(DEF) = 1 | | |
| v(CDM) = 1 | v(CEM) = 0 | v(CFM) = 1 | v(DEM) = 0 | v(DFM) = 1 | v(EFM) = 0 |

Man ser at der ikke findes nogen koalition hvor E deltager som har større værdi end den tilsvarende koalition uden E (+ værdien av E som koalition der er 0). E kaldes da en »dummy« (N. & M. side 301) og det er naturligt at forudsætte at en sådan ikke deltager i gevinstfordelingen, dvs. der tillades kun imputationer der ingen mandater giver til E. Liste K der opstiller i 1. kreds er i samme situation, M derimod ikke (v(ABM) > v(AB) + v(M)). I N. & M. side 397—98 bevises det for det kontinuerte tilfælde at en løsning ikke kan indeholde imputationer som byder en dummy mere end hans minimumsbeløb, en sætning der i dette diskontinuerte tilfælde ikke gælder med mindre den indføres explicit.

Der er altså 6 partier der deltager og spillerummet i 1. og 6. kreds tilsammen er 3, og der existerer altså 56 imputationer.

For første kreds har den karakteristiske funktion for koalitioner der indeholder mindst 2 av partierne A, B og C værdien 1 og for alle andre værdien 0. Når de to funktioner lægges sammen ses det at den eneste to-parti koalition der har værdien 2 er AC, og 3-parti koalitioner med værdien 3 findes kun blandt dem der indeholder A og C. Betingelsen for at en imputation kan domineres er altså at A og C begge får gevinsten 0, og den eneste løsning består av de 36 imputationer hvor dette ikke er tilfældet.

*Ex. II.* Oktober 1920, valg i alle 6 kredse (efter genforeningen). Der deltog 7 partier (ingen av dem dummies) og spillerummet var 7. Der eksisterer altså 1716 imputationer.

Her er der 18 imputationer der ikke domineres, men blandt de øvrige er der en del som ikke er domineret av nogen av de 18, og indenfor denne gruppe gælder det da atter om at søge en løsning. Her er igen 17 som ikke domineres av nogen indenfor gruppen, og av de resterende er der 5 som ikke domineres av hinanden eller av de 17. De nævnte $18+17+5 = 40$ imputationer udgør da spillets eneste løsning.

Det er værd at bemærke — som allerede omtalt i indledningen — at den i valget realiserede fordeling $(2, 2, 1, 2, 0, 0, 0)$ (de fire store partier nævnt først i alfabetisk orden) ikke forekommer i løsningen. Det kan i nogen grad skyldes at en av forudsætningerne ikke holder stik, nemlig at ethvert parti kun interesserer sig for at dets eget resultat bliver så stort som muligt. Det kan dog ikke helt forklares derved, da der indenfor løsningen findes en anden mulighed der bringer visse partier en fordel uden at det sker på bekostning av nogen av de faste politiske koalitioner (AB) og (CD), nemlig $(3, 1, 2, 1, 0, 0, 0)$ der dominerer den ovennævnte, idet $v(AC) = 5$, og socialdemokraterne og de konservative har altså ikke udnyttet valgets muligheder rationelt. Man må dog huske at det ikke er selve den omstændighed at den foreliggende imputation kan domineres der får os til at drage denne slutning — som nævnt ovenfor indeholder løsningen i dette exempel imputationer som kan domineres — det væsentlige er at der blandt de imputationer som dominerer den foreliggende findes en der nødvendigvis må tilhøre løsningen og som der derfor ikke kan være nogen fordel ved at forkaste.

*Ex. III.* Valget 1939. Valg i alle 6 kredse (grundlovsvalg). 10 partier deltog (samt Dansk Samling der overhovedet ingen valgmænd fik), spillerummet var 10, antallet av imputationer altså $\binom{19}{10} = 92378$. Trods dette store antal er løsningen av samme simple karakter som i ex. I.: den eneste løsning består av de 871 imputationer som ikke domineres. Disse dominerer nemlig tilsammen alle andre. Og ligesom i ex. I. er den realiserede fordeling indeholdt i løsningen. Det er altså ikke graden av komplikation av den karakteristiske funktion — antallet av funktionsværdier og variationsmuligheder i disse — der først og fremmest bestemmer løsningsstrukturen for spillet, men derimod formen på de strategisk vigtige partier av den karakteristiske funktion.