

OM ANTAL FRIHEDSGRADER I ØKONOMISKE MODELLER¹⁾

Av SVEN DANØ

VED en økonomisk model vil man i almindelighed forstå et system av relationer mellem økonomiske variable; nogle av relationerne er blot bogholderimæssige identiteter (definitionslikninger), medens de øvrige udtrykker tekniske sammenhænge eller økonomiske subjekters adfærd (strukturelikninger). For at man kan tale om en model, er det naturligvis ikke nødvendigt, at man har et formelt matematisk system for sig; hvadenten man opererer med »likninger« eller blot taler om »sammenhænge«, er det samme sagforhold, man har for øje.

Har man lige mange likninger og variable — likningerne forudsættes at være indbyrdes uafhængige og ikke indbyrdes modstridende — vil systemet i almindelighed være determineret, d. v. s. der er kun et bestemt sæt (eller i hvert fald kun et endeligt antal sæt) værdier av de variable, som tilfredsstiller systemet, og disse bestemte værdier kan beregnes udtrykt ved systemets koefficienter. Er der flere likninger end variable, vil modellen i almindelighed være overdetermineret, d. v. s. alle relationer kan ikke være opfyldt samtidigt, og systemet blir »umuligt«. Er der omvendt for få likninger, har likningssystemet uendelig mange løsninger, det blir ubestemt; determineret blir modellen da først, når man pålægger den det manglende antal bånd. Er der f. eks. 2 flere variable, end der er likninger, kan man frit vælge vilkårlige værdier for 2 av modellens variable; modellen siges i dette tilfælde at ha 2 frihedsgrader, og når man har sat 2 variable lig med bestemte værdier, er der blevet lige mange likninger og ubekendte i systemet.

Hvis man har et determineret (og statisk) system, har det følgelig ingen mening at spørge, hvilken virkning det har på de øvrige størrelser indenfor modellen, at man ændrer på en av de variable. Samtlige variable er jo låst fast på bestemte værdier; systemet har ingen frie (uafhængige) variable til disposition, ingen frihedsgrader²⁾. Har man f. eks. en partiel statisk model bestående av en almindelig efterspørgsels- og en udbudsrelation for en

¹⁾ Artiklen prætenderer ikke at bringe noget egentligt nyt, men er blot et forsøg på at give en kort, populær fremstilling av tanker, som er alt for lidt kendt udenfor de matematisk indstillede økonomers kreds.

²⁾ Derimod har det mening at spørge om virkningerne av, at selve *formen* på en av relationerne ændres (et »shift«), men dette kan ofte tolkes derhen, at man i virkeligheden har indført en ny parameter og dermed en frihedsgrad, som tillader variation i systemet. Et shift i en efterspørgselskurve vil f. eks. ofte skyldes, at indkomsten har ændret sig.

OM ANTAL FRIHEDSGRADER I ØKONOMISKE MODELLER¹⁾

Av SVEN DANØ

VED en økonomisk model vil man i almindelighed forstå et system av relationer mellem økonomiske variable; nogle av relationerne er blot bogholderimæssige identiteter (definitionslikninger), medens de øvrige udtrykker tekniske sammenhænge eller økonomiske subjekters adfærd (strukturelikninger). For at man kan tale om en model, er det naturligvis ikke nødvendigt, at man har et formelt matematisk system for sig; hvadenten man opererer med »likninger« eller blot taler om »sammenhænge«, er det samme sagforhold, man har for øje.

Har man lige mange likninger og variable — likningerne forudsættes at være indbyrdes uafhængige og ikke indbyrdes modstridende — vil systemet i almindelighed være determineret, d. v. s. der er kun et bestemt sæt (eller i hvert fald kun et endeligt antal sæt) værdier av de variable, som tilfredsstiller systemet, og disse bestemte værdier kan beregnes udtrykt ved systemets koefficienter. Er der flere likninger end variable, vil modellen i almindelighed være overdetermineret, d. v. s. alle relationer kan ikke være opfyldt samtidigt, og systemet blir »umuligt«. Er der omvendt for få likninger, har likningssystemet uendelig mange løsninger, det blir ubestemt; determineret blir modellen da først, når man pålægger den det manglende antal bånd. Er der f. eks. 2 flere variable, end der er likninger, kan man frit vælge vilkårlige værdier for 2 av modellens variable; modellen siges i dette tilfælde at ha 2 frihedsgrader, og når man har sat 2 variable lig med bestemte værdier, er der blevet lige mange likninger og ubekendte i systemet.

Hvis man har et determineret (og statisk) system, har det følgelig ingen mening at spørge, hvilken virkning det har på de øvrige størrelser indenfor modellen, at man ændrer på en av de variable. Samtlige variable er jo låst fast på bestemte værdier; systemet har ingen frie (uafhængige) variable til disposition, ingen frihedsgrader²⁾. Har man f. eks. en partiel statisk model bestående av en almindelig efterspørgsels- og en udbudsrelation for en

¹⁾ Artiklen prætenderer ikke at bringe noget egentligt nyt, men er blot et forsøg på at give en kort, populær fremstilling av tanker, som er alt for lidt kendt udenfor de matematisk indstillede økonomers kreds.

²⁾ Derimod har det mening at spørge om virkningerne av, at selve *formen* på en av relationerne ændres (et »shift«), men dette kan ofte tolkes derhen, at man i virkeligheden har indført en ny parameter og dermed en frihedsgrad, som tillader variation i systemet. Et shift i en efterspørgselskurve vil f. eks. ofte skyldes, at indkomsten har ændret sig.

enkelt vare, d. v. s. 2 ligninger i 2 variable (pris og mængde), kan man ikke indenfor dette system stille spørgsmål som: Hvor stor ville den omsatte mængde blive, hvis prisen f. eks. blev 1 kr. lavere? Der er jo i almindelighed kun én bestemt pris og én bestemt mængde, der tilfredsstiller begge relationer, og hvis man varierer på prisen på en bestemt måde, indfører man dermed en tredje relation, som gør systemet overbestemt. (Noget andet er, at man ofte forestiller sig, at løsningen er kommet i stand ved en gradvis tilpasningsproces, som ender i skæringspunktet mellem efterspørgsels- og udbudskurven, men dette er — som påpeget af Haavelmo¹⁾ — kun at forstå som en »mental proces« hos efterspørgere og udbydere (så længe man ræsonnerer indenfor et *statisk system*; i en dynamisk model kan forholdet blive et andet, jfr. spindelvævstilfældet).

Den økonomiske teori må imidlertid også kunne svare på spørgsmål om, hvad der sker med visse variable, når man varierer på visse andre, der da betragtes som uafhængige variable. Dette er faktisk teoriens fornemste opgave. Sådanne spørgsmål kan kun besvares indenfor modeller, der har lige så mange frihedsgrader, som der er uafhængige (frie) variable. Hvis man f. eks. vil undersøge, hvad der sker med den omsatte mængde, hvis prisen på en vare af en eller anden grund nedsættes fra udbydernes side, indebærer selve problemstillingen, at man *må* ha en model med én frihedsgrad. Denne fremkommer da ved, at udbudskurven bryder sammen, idet udbudskurven ikke kan bestå, hvis udbudsprisen frit kan varieres af producenterne; det typiske eksempel er prisdannelsen under monopol, hvor udbyderen er herre over prisen, og hvor der ikke gælder nogen udbudskurve²⁾. I denne model kan den omsatte mængde ved hjælp af efterspørgselskurven udtrykkes som funktion af den uafhængige variabel, prisen, og når man disponerer over denne frie parameter (ved at fikse den på en bestemt værdi eller foreskrive en bestemt variation af den), er den disponible frihedsgrad brugt op og systemet er determineret. Kun i en sådan model har elasticitetsbegrebet, der jo implicerer, at man iagttaget virkningen på én størrelse af en variation i en anden, nogen mening. Denne ene frihedsgrad kan man ha indenfor *en enkelt relation* (f. eks. når man ser på en efterspørgselskurve alene), men man kan også ha en frihedsgrad indenfor *et helt system*; det generelle tilfælde er et system af flere simultane relationer med flere disponible (uafhængige) parametre. For anskuelighedens skyld kan man tænke sig, at man tar sit udgangspunkt i en determineret model i mange variable (svarende til en økonomisk virkelighed, hvor alle størrelser tilpasser sig automatisk uden »indgreb« af nogen art). Man kan da gradvis indføre flere frihedsgrader; for hver

¹⁾ Jfr. »Økonomisk likevekt og økonomisk velferd«, Statsøkonomisk Tidsskrift 1949, s. 220.

²⁾ En anden sag er, at hvis man antar, at monopolistens udbud er styret af profitmaksimeringshensynet, kan monopolprisen ikke længere betragtes som en fri variabel.

ny frihedsgrad må en av de oprindelige ligninger bryde sammen (hvis man ikke vil indføre nye variable). Jo mere generel modellen skal være, d. v. s. jo større en klasse av institutionelle forudsætninger den skal kunne dække, des flere frihedsgrader må man ha¹⁾; det mest generelle — i praksis naturligvis utænkelige²⁾ — tilfælde har man, når de er lige så mange frihedsgrader, som der er variable, d. v. s. når samtlige variable — priser og mængder — kan fikseres (f. eks. av staten) på vilkårlige og indbyrdes uavhengige værdier; specielle, mere realistiske tilfælde får man da av dette generelle system ved at pålægge de variable et antal bånd, som svarer til de sammenhænge, der gælder i den virkelige verden, modellen skal være et forenklet billede av. Vil man f. eks. ha en model, der kan anvendes på en virkelighed, hvor der er fri markedstilpasning på efterspørgselssiden, indfører man efterspørgselsrelationer mellem pris og mængde, o. s. fr.

Hvor mange frihedsgrader man skal operere med, avhænger selvsagt av, hvilket problem man har stillet sig³⁾. En model blir ikke i sig selv mere eller mindre »realistisk« ved, at man ændrer antallet av frihedsgrader. Det avgørende er, hvor mange frie variable man har brug for; vil man f. eks. undersøge, hvordan det går med sysselsætningen, hvis man autonomt øger pengemængden og samtidig forandrer på omsætningsskatteprocenten, må man ha en model med 2 frihedsgrader; enhver av modellens variable kan da ved løsning av ligningssystemet udtrykkes som funktion av disse to uavhengige variable. Når professor Frisch's decisionsmodel⁴⁾ har 14 frihedsgrader, er det bl. a. udtryk for, at man har villet beregne virkningerne av 14 simultane økonomisk-politiske indgreb.

Indenfor en model med flere frihedsgrader kan man naturligvis godt undersøge virkningerne av en isoleret (partiell i matematisk forstand) variation i en enkelt av de variable. De øvrige frie variable holdes da konstante (*ceteris paribus*)⁵⁾, og enhver av de avhengige variable kan ved elimination av de andre udtrykkes som funktion av den frie variabel.

¹⁾ Jfr. Ragnar Frisch: Om desisjonsmodeller, stensil-memo fra Universitetets Sosialøkonomiske Institutt, Oslo, 28. sept. 1949.

²⁾ Tilfældet er utænkeligt alene av den grund, at der i regelen må eksistere et antal definitions-mæssige relationer mellem de variable.

³⁾ Jfr. Frisch, op. cit.

⁴⁾ Jfr. »Price-Wage-Tax-Subsidy Policies as Instruments in Maintaining Optimal Employment« (UN Document E/CN. 1/Sub. 2/13, 18. April 1949), og »Mathematical Appendix« hertil (stensil-memo fra Universitetets Sosialøkonomiske Institutt, Oslo, 23. september 1949).

⁵⁾ Er der n frihedsgrader i systemet, holder man altså $(n-1)$ parametre konstante, d. v. s. man lægger $(n-1)$ yderligere bånd på de variable. Disse bånd må — på samme måde som selve ligningerne i systemet — være indbyrdes uavhengige og konsistente. Som følge herav kan man ikke vælge et hvilket som helst sæt av n variable til at være »frie variable«; man kan f. eks. ikke samtidig betragte pengemængden og renten som frie variable.

Av disse funktioner kan man da, om det ønskes, beregne elasticiteterne av de avhængige variable m. h. t. den uafhængige.

Det kan undertiden være hensigtsmæssigt således at operere med en model med to eller flere frihedsgrader, selv om det, man ønsker at undersøge, kun er virkningerne av en bestemt ændring i en enkelt uafhængig variabel. Sæt at man f. eks. har opstillet en makromodel med det formål at beregne virkningerne på nationalindtægten av, at de bestående indirekte skatter ophæves. Hvis en sådan model skal være realistisk, må man ta hensyn til, at en ophævelse av forbrugsbeskatningen via øget konsumtion vil medføre et øget pres på betalingsbalancen, og at myndighederne da nødvendigvis må gribe ind for at hindre dette, f. eks. ved nye direkte skatter på de lavere indkomster. Dette svarer i modellen til, at der lægges et yderligere bånd på de variable (nemlig betingelsen: underskudet på betalingsbalancen = konstant), og for at systemet ikke skal blive overbestemt, indfører man da en ny variabel, som skal repræsentere det indgreb, der kan sikre, at betingelsen om betalingsbalancen blir opfyldt¹⁾, f. eks. direkte skatter på de små indkomster. Systemet har da de 2 frihedsgrader, man behøver: en til at variere på de indirekte skatter og en, som bruges til at holde underskudet på betalingsbalancen fast. Den sidstnævnte gir således mulighed for i modellen at ta hensyn til en økonomisk-politisk målsætning, som man véd vil bli søgt realiseret av myndighederne, og som man derfor må ta med i sin model, hvis den skal være realistisk. Uændret underskud på betalingsbalancen er naturligvis ikke det eneste bånd, den økonomiske politik kan tænkes at lægge på de størrelser, som indgår i systemet; i makroøkonomiske modeller kan man f. eks. ofte bli nødt til at regne med fuld sysselsætning som mål, der ønskes realiseret, og man må da indføre endnu en aktionsparameter og dermed en yderligere frihedsgrad. På den måde blir det muligt i modellen at ta hensyn til det økonomisk-politiske »miljø«, indenfor hvilket man manipulerer med en av modellens variable.

Hidtil er der kun talt om *statiske* systemer. De samme ræsonnementer kan imidlertid stort set anvendes på *dynamiske* modeller, blot at man her må tale om »tidsrækker« eller tidsfunktioner« i stedet for »variable. Hvis der i et dynamisk system er lige så mange ligninger, som der er ubekendte tidsfunktioner, og tillige initialbetingelserne er givet, er systemet determineret i den forstand, at udviklingen fremover i tiden da kan beregnes for hver enkelt størrelse.

Hvad der ovenfor er sagt, vil formodentlig forekomme mange at være rene selvfølgeligheder, og forsåvidt med rette, som der jo ikke er noget

¹⁾ I Professor Frisch's terminologi blir underskudet på betalingsbalancen da en »målsætningsparameter«, og de nye skatter blir en »aktionsparameter«, som må indføres, for at man ikke skal miste en frihedsgrad.

opsigtsvækkende i, at der i almindelighed skal være lige mange ligninger og ubekendte, hvis et system av simultane ligninger skal kunne løses. Alligevel synes der ofte mod disse ganske simple regler, f. eks. ved at man beregner elasticiteter i et determineret system, hvor alle størrelser er låst fast og variation derfor er udelukket; det gælder i særlig grad om ikke-matematiske modeller, hvor man ikke så klart har rede på antallet av ligninger og variable.