MATEMATIK OG ØKONOMI

Af BJARKE FOG *).

1. I mange år har nationaløkonomien lidt under noget i retning af en metodekrise. Vanskelighederne ved at gennemføre nye fremskridt indenfor den teoretiske økonomi har været stigende. Som regel har man kun kunnet nå frem til udsagn om, at der formentlig eksisterer en sammenhæng mellem to eller flere størrelser i den eller den retning, hvorefter en anden forsker kort efter påstår det modsatte, medens alle andre økonomer derefter får travlt med at diskutere, hvem der har ret. Mange økonomer har følt, at økonomien vil blive ved med at være en tvivlsom videnskab, så længe den bliver stående ved sådanne vage udsagn, og hævdet, at først når økonomernes udsagn gøres kvantitative kan nationaløkonomien gøre krav på at regnes for en eksakt videnskab. Mange økonomer har da også forsøgt at arbejde efter disse linier, og efterhånden synes disse forskellige bestræbelser at samles under navnet Økonometri.

Det karakteristiske ved den økonometriske skole er, at den ved løsningen af økonomiske problemer anvender matematik og statistik sammen med økonomi. Opgaven med denne artikel skal kun være at diskutere anvendelsen af matematik inden for økonomien, og er derfor ingen diskussion af økonometrien, som netop er karakteriseret ved en kombineret anvendelse af statistik og matematik, ikke ved matematik alene.

Anvendelsen af ren matematik inden for økonomien har taget stærk fart i de senere år, flere og flere økonomiske artikler og bøger bliver fyldt med matematiske formler. Samtidig bliver den anvendte matematik sværere og sværere, og færre og færre bliver i stand til at forstå den. Jeg tror, at det var afdøde professor Nybølle der engang udtalte, at matematikken truer med at opdele økonomerne i tre klasser: de der kan økonomi, men ikke matematik; de der kan matematik, men ikke økonomi og endelig de, der hverken kan matematik eller økonomi. Indstillingen over for den udbredte anvendelse af matematik er noget forskellig hos ikke-matematiske økonomer. Mange betragter det som

---

*) Forfatteren ønsker at takke cand. oecon. P. Nørregaard Rasmussen og cand. oecon. Svend Fredens for diskussioner om emnet og gennemlæsning af manuskriptet. Forfatteren bærer dog alene ansvaret for de fejl, der sandsynligvis forekommer.

MATEMATIK OG ØKONOMI

Af BJARKE FOG *).

1. I mange år har nationaløkonomien lidt under noget i retning af en metodekrise. Vanskelighederne ved at gennemføre nye fremskridt indenfor den teoretiske økonomi har været stigende. Som regel har man kun kunnet nå frem til udsagn om, at der formentlig eksisterer en sammenhæng mellem to eller flere størrelser i den eller den retning, hvorefter en anden forsker kort efter påstår det modsatte, medens alle andre økonomer derefter får travlt med at diskutere, hvem der har ret. Mange økonomer har følt, at økonomien vil blive ved med at være en tvivlsom videnskab, så længe den bliver stående ved sådanne vage udsagn, og hævdet, at først når økonomernes udsagn gøres kvantitative kan nationaløkonomien gøre krav på at regnes for en eksakt videnskab. Mange økonomer har da også forsøgt at arbejde efter disse linier, og efterhånden synes disse forskellige bestræbelser at samles under navnet Økonometri.

Det karakteristiske ved den økonometriske skole er, at den ved løsningen af økonomiske problemer anvender matematik og statistik sammen med økonomi. Opgaven med denne artikel skal kun være at diskutere anvendelsen af matematik inden for økonomien, og er derfor ingen diskussion af økonometrien, som netop er karakteriseret ved en kombineret anvendelse af statistik og matematik, ikke ved matematik alene.

Anvendelsen af ren matematik inden for økonomien har taget stærk fart i de senere år, flere og flere økonomiske artikler og bøger bliver fyldt med matematiske formler. Samtidig bliver den anvendte matematik sværere og sværere, og færre og færre bliver i stand til at forstå den. Jeg tror, at det var afdøde professor Nybølle der engang udtalte, at matematikken truer med at opdele økonomerne i tre klasser: de der kan økonomi, men ikke matematik; de der kan matematik, men ikke økonomi og endelig de, der hverken kan matematik eller økonomi. Indstillingen over for den udbredte anvendelse af matematik er noget forskellig hos ikke-matematiske økonomer. Mange betragter det som

---

*) Forfatteren ønsker at takke cand. oecon. P. Nørregaard Rasmussen og cand. oecon. Svend Fredens for diskussioner om emnet og gennemlæsning af manuskriptet. Forfatteren bærer dog alene ansvaret for de fejl, der sandsynligvis forekommer.

noget uvedkommende; næsten alle springer det over, men trods alt med en lumsk følelse af at være gået glip af noget. Enkelte har rettet skarpe angreb på anvendelsen af matematik og betragter det som en udartning uden praktisk betydning. Der synes derfor at være god grund til en kort diskussion af matematikkens anvendelse inden for økonomien; forfatteren er ikke selv matematiker, og det følgende skal derfor være et forsøg på at give en ikke-matematikers syn på den matematiske økonomi. Derfor vil denne artikel heller ikke blive særlig dybtgående, men indeholder kun nogle temmelig almindelige betragtninger over matematik og økonomi.

2. »Mathematics is a language« er mottoet for Paul Samuelson's værk »Foundations of Economic Analysis«. Man kan også sige, at det er en speciel form for logik, kvantitativ logik. *Naturligvis vil man ikke ved matematiske metoder komme til andre resultater end ved andre metoder;* man vil komme til samme resultat, hvad enten man ud fra givne forudsætninger deducerer verbalt eller man opstiller de samme forudsætninger i matematisk form og ved hjælp af matematikkens regler finder frem til et resultat. Verbal ræsonneren og brugen af matematiske formler er derfor logisk set sidestillede.

De fleste læsere standser op, når de støder på et græsk bogstav eller et integraltegn og springer det næste over; der er derfor for mange kommet til at ligge noget mystisk i den matematiske symbolbrug. Men der er intet mystisk heri; almindelige ord er lige så vel symboler som matematiske tegn; begge tegnene »Y« og »Indkomst« er i virkeligheden symboler for det samme. Een gren af matematikken er altid blevet anvendt i økonomien uden diskussion, nemlig geometri. Selv økonomer, der ellers er skeptiske over for matematik, tager gerne kurver og linier til hjælp for deres økonomiske ræsonnementer. Men om man benytter algebra, geometri eller verbal logik er i virkeligheden ligegyldigt, resultatet og indholdet af ræsonnementerne er det samme.

Lad os illustrere det med et simpelt og alment kendt eksempel, bestemmelsen af pris og mængde i tilfælde af monopol. Ligegyldigt hvilken metode man ønsker at gå frem efter, opstiller man de samme forudsætninger om, at efterspørgsels- og omkostningskurverne er kendt, og at monopolisten ønsker at opnå maksimal gevinst. Problemet kan f. eks. løses ved hjælp af algebra:

Kaldes mængde for x og pris for p, går vi ud fra en efterspørgsels- og en omkostningsligning:

$p = f(x)$ og
$T = F(x)$, hvor T betegner totale omkostninger.

Disse ligninger siger intet andet end at pris og omkostninger er en funktion af den producerede (og solgte) mængde.

Bruttoindtægten må da være $R = x \cdot f(x)$ og nettogevinsten bliver $R \div T$. Som det senere skal omtales er den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for at mængden x giver maksimal gevinst, at differentialkvotienten af $(R \div T)$ med hensyn til x er nul, og at den anden afledede er negativ.

Den første betingelse er altså, at

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{R} - \mathrm{T}) = 0$$

Ved udregning får man

$$\frac{dR}{dx} - \frac{dT}{dx} = 0; \text{ altså at } \frac{dR}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

Men $\frac{dR}{dx}$ betyder grænseomsætningen (også kaldet grænseindtægten) og $\frac{dT}{dx}$ er grænseomkostningerne, således at vi får betingelsen for maksimum, at grænseomsætning og grænseomkostninger er lige store.

Den anden betingelse, at den anden afledede skal være negativ, kan skrives som:

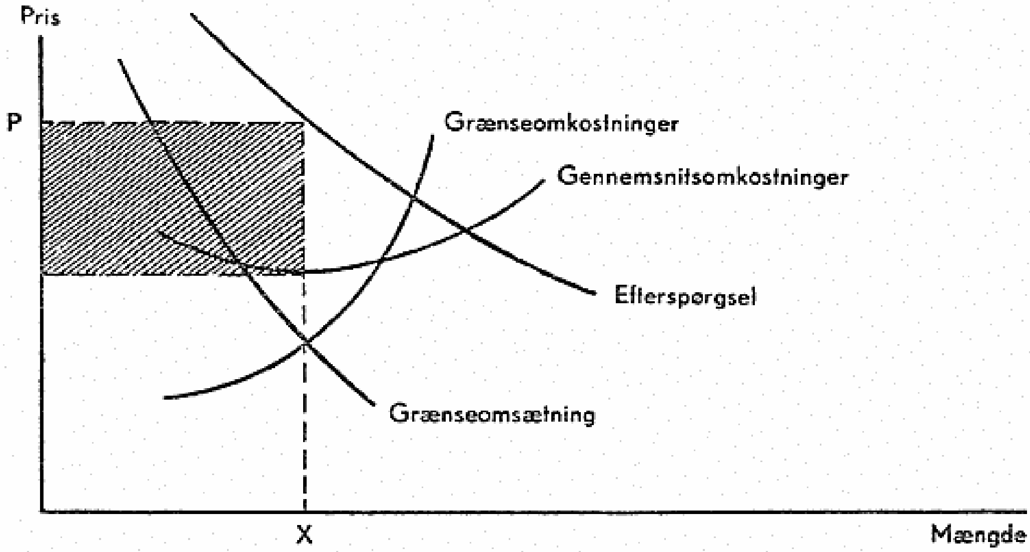
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(R - T)\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dT}{dx}\right) = \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} - \frac{d^2T}{dx^2} < 0$$

$$\text{d.v.s.} \quad \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} < \frac{d^2T}{dx^2}$$

Hvilket betyder, at i ligevægtspunktet må grænseomsætningen falde stærkere end grænseomkostningerne. Denne betingelse vil automatisk være opfyldt, hvis grænseomsætningen er faldende og grænseomkostningerne stigende.

Men i virkeligheden er dette det samme argument, som når man uden brug af matematiske symboler ræsonnerer, at det vil kunne betale sig at udvide produktionen, så længe merindtægterne (i matematisk sprog: $\frac{dR}{dx}$) er større end meromkostningerne ($\frac{dT}{dx}$) men at man vil standse produktionen, når disse størrelser bliver lige store. Og princippet i ræsonnementet forbliver det samme, hvis man vælger at illustrere det ved hjælp af kurver.

Også her vil man få maksimum for monopolgevinsten (det skraverede areal), når mængden fastsættes der hvor grænseomkostnings-



og grænseomsætningskurven skærer hinanden. Betingelsen for at ligevægtspunktet er stabilt er, at grænseomsætningskurven skærer grænseomkostningskurven fra venstre, hvilket er det samme som at sige, at grænseomsætningen skal falde stærkere end grænseomkostningerne.

Alle metoder siger derfor i virkeligheden det samme, og man kan vælge den man selv finder nemmest. Mange vil måske synes, at den algebraiske er den mest indviklede, og dette vil ofte være tilfældet ved så simple problemer. Men ved mere indviklede problemer med mange variable kan det være vanskeligt at holde sammen på alle størrelser og sammenhænge uden at skrive det op i form af symboler og funktioner. Og når der bliver så mange variable, at man skal bruge mere end tre dimensioner, slår heller ikke geometrien til.

Mange økonomiske problemer er maksimerings- eller minimeringsproblemer, og navnlig ved behandlingen af sådanne spørgsmål får funktionsregningen betydning. Betingelsen for, at minimum eller maksimum er nået, er jo, at differentialkvotienten er lig 0. Ved at differentiere og sætte differentialkvotienten lig 0, kan ligevægtssituationen findes. Ved funktioner med flere variable bliver der tale om partielle differentialkvotienter (betegnet med symbolet $\frac{\delta y}{\delta x}$), der angiver ændringen i den afhængigt variable ved en uendelig lille ændring af een af de uafhængigt variable, mens de andre holdes uforandret. Da mange økonomiske problemer netop er at finde den isolerede virkning af een faktor, mens andre søges holdt uforandret, er partiel differentiation af stor betydning for den matematiske økonom. På figuren s. 197 er det angivet, hvorledes de partielle differentialkvotienter angiver retningen for ændringer i z ved variation af henholdsvis x og y.

Betingelsen, at differentialkvotienten er 0, er kun en nødvendig, ikke en tilstrækkelig betingelse for maksimum. Ved funktioner med een variabel er det en yderligere betingelse, at den anden afledede er negativ. Ved funktioner med flere variable må betingelsen udtrykkes gennem determinanter. Determinanternes store betydning ligger deri, at man kan operere med vilkårligt mange størrelser på engang og alligevel være i stand til at komme frem til betydningsfulde udsagn.

3. I »Foundations of Economic Analysis« har Paul Samuelson*) givet de generelle principper for funktionsregningens anvendelse ved økonomiske problemer. På grundlag af hans fremstilling skal ganske kort skitseres princippet i den matematiske økonoms behandling af et teoretisk problem.

Forudsætningen, vi går ud fra, er, at vi har en række variable, $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ og en række parametre: $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_m$. De variable kan f. eks. være mængder af forskellige produktionsfaktorer, x_i, mens priserne på varer og faktorer antages at være givne, a_i.

Vor antagelse er, at der er en sammenhæng mellem disse variable og parametre:

$$Q = f_i\,(x_1 \ldots\ldots\ldots x_n, a_1 \ldots\ldots\ldots a_m) = 0;\ i = 1, 2 \ldots\ldots n$$

Disse ligninger skal da løses for hvert x_i, hvilket i almindelighed vil kunne lade sig gøre, teoretisk set:

$$x_i = g_i\,(a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots a_m); \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots m$$

Det, der interesserer økonomen, er ikke så meget at løse ligningen som at finde hvilke egenskaber $\frac{\delta x_i}{\delta a_j}$ har, med andre ord at undersøge hvilke virkninger en marginal forandring i a_j vil have på x_i, når alt andet er uforandret. Som regel vil det være således, at vi ikke kan finde $\frac{\delta x_i}{\delta a_j}$ af g_i-funktionen, fordi vi intet kendskab har til denne, hvorimod vi ofte har oplysninger om f_i-funktionerne. Problemet er derfor på grundlag af viden om f_i-funktionerne at kunne sige noget om de partielle differential-kvotienter i g_i-funktionerne.

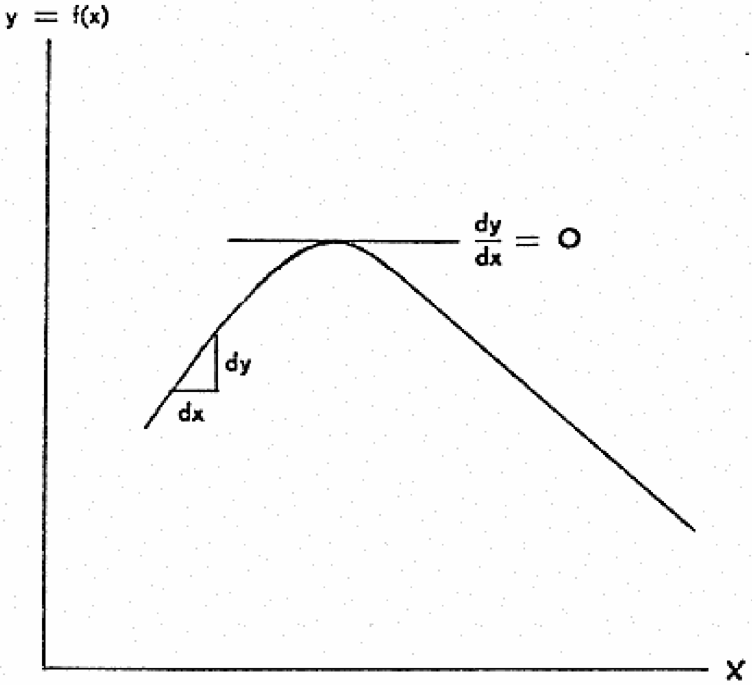
Hvis vi holder alle a konstant, undtagen a_j og differentierer f_i-funktionerne med hensyn til a_j, får vi

$$\frac{\delta Q}{\delta a_j} = \frac{\delta f_i}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta a_j} + \frac{\delta f_i}{\delta x_2}\frac{\delta x_2}{\delta a_j} + \cdots\cdots\cdots + \frac{\delta f_i}{\delta x_n}\frac{\delta x_n}{\delta a_j} + \frac{\delta f_i}{\delta a_j}\frac{\delta a_j}{\delta a_j} = 0.$$

Vi får derved et system af ligninger med lige mange ubekendte og ligninger, der kan løses på sædvanlig vis ved hjælp af determinanter.

---

*) Se også Lawrence R. Kleins artikel i Stimulator, 1948: Tools for Analytical Economics, der gengiver den samme analyse.



Almindelig (eller total) differentiation.

I det simple tilfælde, at der kun svarer een parameter til hver f_i-funktion (d.v.s. $\frac{\delta f_i}{\delta a_j} = 0$ for $j \neq i$) bliver løsningen

$$\frac{\delta x_i}{\delta a_j} = \frac{-\frac{\delta f_i}{\delta a_j} \Delta_{ji}}{\Delta}$$

hvor

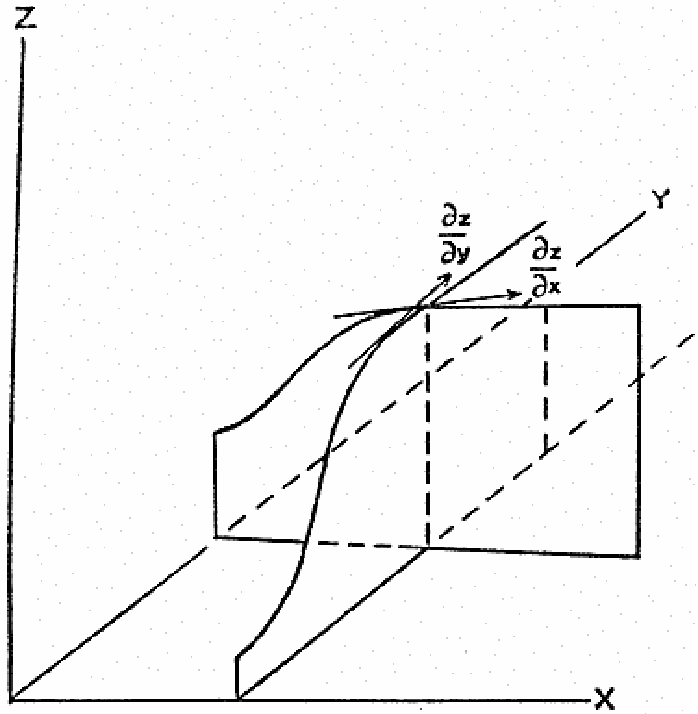
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{vmatrix}$$

og Δ_{ji} er den co-factor (underdeterminant), hvor j-række og i-kolonne er slettet.

I det mere generelle tilfælde, hvor hver f_i-funktion har flere relevante parametre, må løsningen skrives som

$$\frac{\delta x_i}{\delta a_j} = \frac{\sum_{h=1}^{n} \frac{\delta f_h}{\delta a_j} \Delta_{hi}}{\Delta}$$

Den store betydning af dette resultat er, at det ofte vil være muligt at sige noget om Δ og Δ_{ji}, selvom de indeholder uendeligt mange størrelser. Regnereglerne for determinanter er principielt set ret simple. Ved behandlingen af økonomiske problemer vil det som regel være umuligt at sige noget om størrelsesordenen af Δ og Δ_{ji}, men undertiden kan man under visse forudsætninger bestemme fortegnet for determinanterne, hvilket er af største betydning. De tilstrækkelige betingelser for at en funktion har



Partiel differentiation

maksimum eller minimum kan nemlig formuleres i form af betingelser for determinanternes fortegn, og kan disse bestemmes, kan vi sige noget om fortegnet for $\frac{\delta x_i}{\delta \alpha_j}$. Selvom vi ikke får bestemt størrelsen af $\frac{\delta x_i}{\delta \alpha_j}$, er alene det, at vi kan afgøre om en forandring af α_j vil have positiv eller negativ virkning på x_i af største interesse. Gennem analyse af determinanterne vil det ofte være muligt at sige noget om betingelserne for, at en forandring i α_j vil indvirke i den ene eller anden retning på x_i. De tilstrækkelige betingelser for at maksimum eller minimum er nået, som så ofte overses, bliver derved af afgørende betydning for bestemmelsen af, hvorledes ændringen i en parameter vil indvirke på en variabel.

4. Selvom det først og fremmest er den almindelige funktions- og determinantregning, der har vundet indpas i den økonomiske analyse, findes der næppe nogen gren af matematikken, der ikke er blevet anvendt i økonomien. Ikke blot logaritmer og integraler anvendes almindeligt, men også trigonometriske funktioner og imaginære tal, ja selv sfærisk geometri har fundet anvendelse ved løsningen af økonomiske problemer.

Vi har slået fast, at matematikken kun er en anden måde at komme til de samme resultater som ad andre veje. Ligesom den litterære økonom må opstille sine forudsætninger og deducere derudfra, således må også den matematiske økonom gøre. Forskellen er blot, at den sidste foretager sine logiske deduktioner efter ganske bestemte mekaniske regler – og derfor med større sikkerhed. Som professor Leontief engang udtrykte det i en privat diskussion: »It is the beauty of mathematics that you do not understand what you are doing.« Denne løsrevne replik, som kan lyde lidt mærkelig, skal naturligvis forstås derhen, at man mekanisk kan anvende de matematiske regler uden at bryde sig om, hvad disse operationer egentlig indebærer, og hvad deres økonomiske betydning er. Når så slutresultatet er nået, kan dette altid »oversættes« til økonomi igen. Undertiden har man kaldt matematikken for en slags stenografi for den økonomiske tænkning; principielt giver stenografien ikke andet resultat end den almindelige skrift, men den kan – med tilstrækkelig kendskab – give resultaterne hurtigere og sikrere.

En af de store fordele ved anvendelsen af matematik er, at den tillader generelle udsagn. De fundne sætninger er ikke afhængige af specielle talværdier, men gælder i al almindelighed – eller man kan i hvert fald finde inden for hvilke grænser de pågældende udsagn gælder. Jævnfør også indledningen til professor Hicks' matematiske appendix i »Value and Capital«: »The purpose of this Appendix is not merely the transcription of the argument of the text into mathematical symbols; I see little advantage to be got from doing that. When the verbal (or geometrical) argument is conclusive, it gains nothing from being put in another form. What can be gained, however, is the assurance that our argument is completely general.« Ved behandlingen af et nyt problem vil mange økonomer ganske uvilkårligt vælge nogle bestemte talværdier og analysere tilfældet derudfra. I sin mere raffinerede form giver denne metode sig udslag i store talmodeller, således som f. eks. anvendt af Erik Lundberg i »Economic Expansion«. Men denne metode kan allerhøjest have pædagogisk betydning og give illustrerende eksempler. Resultaterne er afhængige af de specielle talværdier, man har valgt, og gælder ikke generelt – ofte vil man endda komme til stik modsatte resultater ved at vælge andre talværdier. I sådanne tilfælde viser den matematiske metode sin overlegenhed.

5. Tag som eksempel en kombineret anvendelse af multiplier- og accelerationsprincippet, f. eks. i form af den såkaldte Hansen-Samuelson-equation*). I overensstemmelse med accelerationsprincippet antages det, at forøgelsen i den private investering er proportional med stigningen i forbruget mellem den tidligere og nuværende periode med proportionalitetsfaktoren β (»the relation«). Bruges de sædvanlige betegnelser for indkomst $Y(t)$, Investering $I(t)$ og forbrug $C(t)$ som funktioner af tiden og kaldes multiplier α, kan forudsætningerne skrives som

---

*) Se Paul Samuelson. Review of Economic Statistics. 1939; genoptrykt i »Readings in Business Cycle Theory«.

$$C(t) = \alpha \cdot Y(t-1) \qquad (1)$$
$$I(t) = \beta\,[C(t) - C(t-1)] \qquad (2)$$
$$Y(t) = C(t) + I(t) \qquad (3)$$

hvoraf

$$Y(t) = \alpha\, Y(t-1) + \beta\,[\alpha\, Y(t-1) - \alpha\, Y(t-2)] \qquad (4) \text{ eller}$$
$$Y(t) - \alpha(1+\beta)\, Y(t-1) + \alpha\beta\, Y(t-2) = 0 \qquad (5)$$

Den videre analyse kan nu foretages derved, at man giver de variable nogle bestemte værdier og derved opstiller en talmodel, hvis forløb gennem tiden man derpå undersøger. Men alt efter hvilke talværdier, man vælger, kan man få nogenlunde hvilke resultater, man ønsker. Derimod vil den matematiske økonom, der analyserer videre ad ren matematisk vej, komme til langt sikrere resultater. Det kan f. eks. gøres således:

Kaldes for nemheds skyld $-\alpha(1+\beta)$ for A og $\alpha\beta$ for B kan (5) skrives:

$$Y(t) + AY(t-1) + BY(t-2) = 0$$

Vælges løsningen $Y = \lambda^t$ har vi

$$\lambda^{t+2} + A\lambda^{t+1} + B\lambda^t = 0$$

Ved division med λ^t $(Y = \lambda^t \neq 0)$

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0$$

hvoraf løsningen

$$\lambda = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$$

Betegnes de to rødder

$$\lambda_1 = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$$
$$\lambda_2 = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$$

er løsningen

$$Y(t) = K_1\,\lambda_1{}^t + K_2\,\lambda_2{}^t$$

hvor K_1 og K_2 er konstanter.

Tilsyneladende siger dette resultat ikke meget, men i virkeligheden kan deraf udledes betingelserne for at det økonomiske forløb tager den ene eller anden form. Man ser f. eks. straks, at hvis λ_1 og λ_2 har værdier, der ligger mellem 0 og 1, vil

$$Y(t) \to 0$$
$$t \to \infty$$

Det er muligt at påvise, at alle tænkelige kombinationer af α og β kan deles op i fire grupper alt efter som $\alpha\beta \lesseqgtr 1$ og $\alpha \gtrless \dfrac{4\beta}{(1+\beta)^2}$.

Hver gruppe vil da give een af de følgende 4 typer af bevægelser for indkomsten $Y(t)$:

1. $y(t)$ vil nærme sig asymptotisk til et bestemt niveau
2. Dæmpede svingninger omkring — — —
3. Eksplosive svingninger omkring — — —
4. Stadigt stigende $Y(t)$.

Medens en vilkårlig talmodel mere eller mindre tilfældigt kan dumpe ned i en hvilkensomhelst af de fire muligheder, giver den matematiske analyse klart betingelserne for, at vi får det ene eller andet forløb. Her skal blot omtales, hvad der sker, hvis

$$\frac{A^2}{4} - B < 0 \text{ d.v.s. } \frac{\alpha^2 (1 + \beta)^2}{4} - \alpha\beta < 0$$

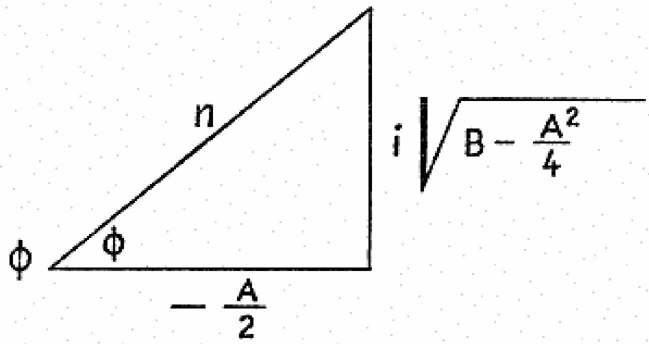
I dette tilfælde kan λ_1 (og analogt for λ_2) skrives som

$$\lambda_1 = -\frac{A}{2} + i\sqrt{B - \frac{A^2}{4}} \quad \text{hvor } i = \sqrt{-1}$$

Vi indfører nogle hjælpestørrelser, jvfr. figuren således at

$$\sin\phi = \frac{i\sqrt{B - \frac{A^2}{4}}}{n} \quad \text{og}$$

$$\cos\phi = \frac{-\frac{A}{2}}{n}$$



Heraf

$$\lambda_1 = n\cos\phi + n\sin\phi$$

Det kan bevises at

$$\lambda^t = n^t (\cos t\phi + \sin t\phi) \quad \text{således at vi får}$$

$$Y(t) = n^t (K_1 (\cos t\phi + \sin t\phi) + K_2 (\cos t\phi - \sin t\phi))$$

I denne formel vil de trigonometriske funktioner virke i retning af dæmpede svingninger, medens det eksponentielle led enten vil virke dæmpende eller gøre systemet eksplosivt.

6. Selvom de formler, hvormed en matematisk analyse af økonomiske problemer ender, ofte kan være af formidabel længde vil de alligevel i overskuelig form vise relationen mellem de indgående størrelser. Ofte kan man alt efter som en given størrelse står i tæller eller nævner, med positivt eller negativt fortegn osv. se i hvilken retning en variation i denne vil påvirke helhedsresultatet.

Desuden er matematikken en stor hjælp derved, at den viser, hvorledes analoge problemer inden for vidt forskellige grene af den økonomiske teori kan løses på samme matematiske måde.

Mange af de indvendinger, der har været fremført imod matematikkens anvendelse i økonomien, viser en fuldkommen mangel på forståelse af, hvad det hele drejer sig om. Dette gælder f. eks. indvendingen, at »man kan ikke få mere ud af ligningerne, end man selv har lagt i dem, hvorfor anvendelsen af matematik i økonomien er nytteløs«, eller at »brugen af matematik indhyller argumenterne i en tåge, hvis fjernelse ville gøre sagen klar.«*)

En almindelig indvending mod matematikkens anvendelse i økonomien er, at man ikke kan presse det rigt pulserende økonomiske liv ind i stive matematiske formler. Denne indvending *kan* være udtryk for en misforståelse af matematikkens karakter. Indvendingen rammer jo lige fuldt enhver logisk deduktion — verbal eller matematisk — ud fra givne forudsætninger. At de forudsætninger, man arbejder under, ofte er temmelig virkelighedsfjerne gælder ikke blot den matematiske økonomi. Ja, til og med burde matematikken i så henseende være en fordel, fordi dens stringens for det første tvinger forskeren til at præcisere betydningen af sine symboler og undgå tvetydige udtryk, og for det andet tvinger ham til at gøre sig sine forudsætninger klart, hvorved han opdager, hvor virkelighedsfjerne eller — nære de er. Og derfor bør han også være på vagt over for en umiddelbar anvendelse af resultaterne på virkeligheden. Den litterære økonom vil nemmere gøre sig skyldig i den forseelse ikke at præcisere sine forudsætninger eller at føre skjulte forudsætninger ind i løbet af ræsonnementerne. Fordelen burde derfor være på matematikkens side, men desværre ser man undertiden matematiske økonomer lidt for skødesløst anvende deres resultater på virkeligheden uden de nødvendige forbehold. Og selv om det rent videnskabeligt set er en synd at indsmugle forudsætninger, vil der meget ofte være tale om meget virkelighedsnære forudsætninger, som man ganske uvilkårligt tager med; og netop derfor vil en anvendelse af resultaterne på virkeligheden kunne give et korrekt billede.

Der kan alligevel ligge noget rigtigt i den indvending, at de matematiske formler er for eksakte til at kunne anvendes i økonomien. Der er nemlig mange økonomiske problemer, hvor matematiske hjælpemidler er uanvendelige. Dette gælder f. eks., hvor psykologiske forhold spiller ind; ganske vist er psykologerne på vej mod, at reglerne for mange individers psykologiske handlinger kan udtrykkes matematisk, men at behandle det enkelte individs psykologi efter faste formler er vel endnu umuligt. Og netop i det moderne økonomiske samfund spiller enkelte individers beslutninger en afgørende rolle for forløbet af økonomiske processer. Enkeltstående individer som f. eks. en finansminister, ledende forretningsfolk, arbejderførere osv. kan

*) Begge citater fra A. C. Pigou. »Newspaper Reviewers, Economics and Mathematics«. Economic Journal. 1941, p. 279.

gennem deres beslutninger påvirke det økonomiske liv — og ved behandlingen af sådanne faktorers indflydelse viser matematikken sin utilstrækkelighed. Ganske vist er det økonomiske samfund noget i retning af en mekanisme, for hvilken der kan opstilles visse regler og love, der eventuelt kan formuleres matematisk — men det er en mekanisme, der i aller højeste grad er under menneskelig indflydelse, og derfor må håndfast formulerede regler tages med varsomhed.

7. Matematikken har først og fremmest sin betydning ved løsningen af nye og indviklede problemer. Uden brug af matematik er det næsten håbløst at holde sammen på et stort antal størrelser, og hele problemet bliver uoverskueligt. Derfor er matematikken ofte en stor hjælp for videnskabsmanden, der søger at trænge dybere ind i problemerne.

Flere økonomer påstår selv, at det kun ad matematisk vej har været muligt for dem, at komme frem til de fundne resultater, jvfr. f. eks. følgende citat fra professor Fritz Machlup: »I must confess that I have had great difficulties in formulating this merely verbal reasoning and, if I have succeeded at all (of which I am not too sure), I attribute it to previous algebraic reasoning. Here is one of the cases where a statement of literary economics was obtained only through translation from mathematical groundwork.«*)

Man kan så diskutere, om man ved en offentliggørelse kun skal bringe resultaterne oversat til almindelig sprogbrug eller også den tilgrundliggende matematiske analyse. Selvom de matematiske udregninger vil fylde meget, er der dog meget der taler for at tage dem med: muligheden for at kontrollere bevisets rigtighed; andre forskere vil kunne lære af argumentationen osv.

Derimod må der advares imod, at matematikken helt tager overhånd; den er og bliver en hjælpevidenskab og skulle ikke gerne blive hovedsagen. Ganske vist ser det meget videnskabeligt ud med en masse matematik, men ofte kan resultaterne lige så nemt findes uden brug af denne. Og så er det naturligvis en betingelse, at matematikken er rigtig! Matematik er jo for tiden lidt af en modesag inden for økonomien, og den ene økonom efter den anden begynder at fylde ligninger og formler ind i deres artikler. Men man har unægtelig tit på fornemmelsen, at uddannede matematikere blot smiler ad økonomernes famlende forsøg på at trænge ind på deres område. Lige såvel som der kan nævnes mange eksempler på, at logiske fejlslutninger kunne være undgået, hvis vedkommende økonom havde stillet sine argumenter op

*) International Trade and the National Income Multiplier. p. 104.

i matematisk form, kan der nævnes eksempler på, at fejlslutninger kunne være undgået, hvis man blot havde undladt brugen af matematik. Således opregner Adolf Kozlik i »Zur Anwendung der Mathematik in der Nationalökonomie«, Zeitschrift für Nationalökonomie, 1939, adskillige matematiske fejl hos så habile matematiske økonomer som Erich Schneider, Kühne og Chamberlin. F. eks. begår Chamberlin i sin kritik af Joan Robinson »ein krasser fehler« ved at påstå, at »the equation of price with average cost is quite sufficient (.... for full equilibrium), because it necessarily includes the equation of the marginal items, whereas the reverse is not true«.**) Men siger Kozlik, dette betyder, at Chamberlin slutter, at når gennemsnitsomkostningerne er $k = \varphi\ (x)$ og efterspørgselskurven er $p = f(x)$, så følger det at i ligevægtspunktet, hvor $\varphi(x) = f(x)$ må også $\varphi'(x). = f'(x)$. Men dette er forkert undtagen i det specielle tilfælde, at kurverne tangerer hinanden.**)

I »Föreläsningar i Nationalekonomi«, I. del p. 96 giver Wicksell et eksempel på en fejlslutning hos Launhardt, »Mathematische Begründung der Volkswirtschaftslehre«, og Vilhelm Lorey***) nævner, hvorledes sådanne skødesløsheder som at skrive $539^3 = 3 \log 539$ forekommer.

Disse fejl synes dog at være enkelttilfælde, hvorimod en anden fejl går igen og igen hos mange økonomer, der anvender matematik; nemlig *at fortolke en ligning, der blot angiver en ligevægtsbetingelse, i en bestemt retning*, d.v.s. der lægges en bestemt årsagssammenhæng ind. Det klassiske eksempel er kvantitetsteoriens fortolkning af ligningen $MV = PT$. Det kan alle indse, men alligevel bliver den samme fejl gentaget gang efter gang, når blot ligningerne ser lidt mere indviklede ud. Til trods for at jeg må indrømme mine egne matematiske kundskabers mangelfuldhed, synes det mig alligevel, at megen matematisk økonomi er en gentagelse af kvantitetsteoriens fejl. Her skal som eksempler nævnes professor Thorkil Kristensens prisbestemmelse i tilfælde af sammensat monopol****) og professor Winding Pedersens behandling af dynamiske prisproblemer i »Omkring den moderne pristeori«.*****) Selvom de to nævnte afhandlinger omhandler forskellige emner, er det i virkeligheden ganske samme metode, der anvendes, og de kan derfor disku-

---

*) Monopolistic or Imperfect Competition. Quarterly Journal of Economics. 1937 p. 559.

**) Kozlik. a. a. p. 98.

***) »Bemerkungen über falschen und richtigen Gebrauch der Mathematik im wirtschaftswissenschaftlichen Schrifttum«, Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung 1936, p. 41.

****) Sammensat og kollektivt monopol. Nationaløkonomisk Tidsskrift, 1938 p. 320.

*****) Nationaløkonomisk Tidsskrift 1939, p. 143.

teres under eet.*) Vi vælger som eksempel prof. Thorkil Kristensens behandling af sammensat monopol, hvori udgangspunktet tages i hans grundlæggende ligning (5) eller (6):

$$Pa = \frac{V'(x_a) \cdot E_a}{E_a - 1} + \frac{x_b \cdot E_{ba} \cdot (p_b - V'(x_b))}{x_a \cdot (E_a - 1)} \quad (5)$$

$$Pa = Ma + \frac{x_b \cdot E_{ba} \cdot (p_b - V'(x_b))}{x_a \cdot (E_a - 1)} \quad (6)$$

hvor p_a : Prisen på den ene vare, A.
p_b : Prisen på den anden vare, B.
x_a : Den solgte mængde af A.
x_b : Den solgte mængde af B.
E_{ba}: Krydselasticiteten, der angiver den relative forøgelse af salget af B divideret med tilsvarende relative forhøjelse af prisen på A.
E_a : Den almindelige elasticitet for A.
$V'(x_b)$: Grænseomkostningerne ved at fremstille B.
M_a: Den pris A ville have ved simpelt monopol.

Denne ligning angiver en grundlæggende ligevægtsbetingelse og giver en simultan bestemmelse af samtlige indgående størrelser, men mere siger den heller ikke, og det er – så vidt jeg kan se – utilladeligt at fortolke ligningen i en bestemt retning.

Thorkil Kristensens fortolkning er, at brøken i (6) angiver, hvor meget man vil afvige fra den almindelige monopolpris på A, når man samtidig har monopol på B. ...... Størrelsen $\frac{x_b}{x_a}$ betyder, at *alt andet lige* vil afvigelsen fra den almindelige, simple monopolpris blive desto større, jo større omsætningen af B er i forhold til omsætningen af A. ...... Størrelsen $\frac{E_{ba}}{E_a - 1}$ betyder, at *alt andet lige* vil afvigelsen fra den simple monopolpris blive desto større, jo større krydselasticiteten er. Og ...... endelig betyder størrelsen $p_b - V'(x_b)$, at afvigelsen fra simpel monopolpris bliver desto større, jo større forskel der er mellem prisen på B og denne vares grænseomkostning. Stadig må man dog tilføje: *alt andet lige*. Det synes altså, at p_a er bestemt af størrelserne på højre side af lighedstegnet.

Såvel Thorkil Kristensen som Winding Pedersen er til dels klar over, at deres fortolkning af ligningen ikke er helt korrekt, idet der gøres

---

*) Den samme indvending kan iøvrigt rettes mod fortolkningen af ligningerne (29) og følgende i min egen artikel, »Dynamic Price problems under monopolistic competition«, Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi 1946—47 p. 268, jvfr. dog forbeholdet på s. 260.

opmærksom på, at den elasticitet, der optræder i ovenstående ligning, kan være forskellig fra den elasticitet, der gælder for ligevægtspunktet ved simpel monopol. Det er derfor kun med tilnærmelse, at $\frac{V'(x_a) \cdot E_a}{E_a - 1}$ udtrykker den almindelige monopolpris. Men en mere afgørende indvending kan rettes mod ligningens fortolkning.

Jeg skal ikke diskutere, om den pågældende økonomiske teori er rigtig eller ej, det er sandsynligt, at den er det, men det følger bare ikke af den omtalte ligning. Ligesåvel kan kvantitetsteorien godt være korrekt, selvom dens fortolkning af kvantitetsligningen er utilladelig. Den grundlæggende ligning siger blot, at i ligevægtspunktet må de indgående størrelser antage sådanne værdier, at ligningen stemmer, men det kan ligesåvel være x_b, der bestemmer p_a som omvendt — det er en samtidig bestemmelse af alle indgående størrelser.

Så må man vel i stedet spørge, hvilke virkninger en marginal ændring i een faktor, *alt andet lige*, vil have på en hvilken som helst af de andre? Nej, det er et spørgsmål der i almindelighed vil være uden mening. Ved at forandre een af størrelserne vil vi komme i en ny ligevægtssituation, hvortil alle de andre størrelser må tilpasse sig således at den grundlæggende ligning stadig er opfyldt. Der er tale om to helt forskellige ligevægtssituationer, der kun kan sammenlignes gennem en alternativ analyse. *Det er ordene »alt andet lige«, jeg vil angribe, for »alt andet« kan ikke være lige* undtagen i det ganske specielle tilfælde, at vi har isoelastisk efterspørgelseskurve og konstante grænseomkostninger. Lad mig citere Nørregaard Rasmussen: The »ceteris paribus« clause is one of the most necessary, and at the same time one of the most dangerous tools of economic analysis«.*) Den grundlæggende ligevægtsbetingelse binder de forskellige størrelser sammen og tillader ingen variation i den ene med en fastholden af de andre.**)

*) Some remarks on the joint effect of simultaneous relations between economic variables. Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi. 1948 p. 215.

**) I Thorkil Kristensens eksempel kan man som sagt tænke sig det specielle tilfælde, at alle størrelser med undtagelse af f. eks. $\frac{x_b}{x_a}$ antager den samme værdi i den nye ligevægtssituation som i den gamle. I dette tilfælde er en sammenligning af de to alternative situationer derfor let. Men i andre modeller vil det ofte være tilfældet, at flere variable med logisk nødvendighed må antage forskellige værdier i to forskellige ligevægtssituationer, jvfr. f. eks. Nørregaard Rasmussens model i den omtalte artikel, hvor han viser, at »generally it is not permissible to detach a relation from its simultaneous connections in order to examine and interpret variations in the »dependent« variable, when the »independent« variables or the characteristic parameters are changed«. (S. 216) og »In the analysis and interpretation of a relation it is not sufficient to regard the relation concerned as isolated, but it is necessary to use the model as a whole in the interpretation of the relation. In other, it will be necessary to adopt a simultaneous approach«. (S. 222).

Lad mig illustrere det med endnu et eksempel. Bruges de sædvanlige betegnelser for indkomst, investering og forbrug, kan vi opstille en simpel model gennem ligningerne:

$$Y = C + I$$
$$C = f(Y) \text{ og}$$
$$I = f(Y)$$

Man kan så være fristet til at stille spørgsmålet, hvorledes vil en marginal ændring i I påvirke Y, med andre ord, hvilken værdi har $\frac{dY}{dI}$? Men et sådant spørgsmål har ingen mening.

Vi har tre ligninger og tre variable og dermed et determineret ligningssystem. Men i et sådant system kan man ikke ændre den ene uden også at forandre de andre, ellers vil ligningerne ikke blive ved med at stemme. *En isoleret variation er derfor umulig, systemet er med andre ord låst fast, der er ingen frihedsgrader.*

Det kan vi derimod få ved at opstille en anden model:

$$Y = C + I$$
$$C = f(Y) \text{ og}$$
$$I = \text{autonom.}$$

I dette tilfælde er der een frihedsgrad og vi kan spørge, hvad virkningerne af en variation i I er. Kun i det tilfælde, at vi på højre side har parametre kan vi spørge om, hvad f. eks. $\frac{dY}{dI}$ betyder. Findes der variable på højre side, må ligningerne omskrives, så højre side kun indeholder autonome størrelser, ellers kan vi ikke spørge, hvilken virkning en ændring i een faktor vil have på een af de andre.

8. Selvom matematikken kan være en god hjælper i den økonomiske teori, må man derfor være varsom med anvendelsen af den. Ganske vist er der ikke tvivl om, at flere økonomer samtidig er fremragende matematikere. Men når så dygtige matematikere som Schneider og Launhardt, ja, selv Paul Samuelson skal være blevet kritiseret af »rigtige« matematikere, ligger der deri en advarsel til os andre om ikke at vove os længere ud end vi kan bunde.*)

Økonomien bliver hverken mere eller mindre rigtig eller videnskabelig gennem anvendelsen af matematik. Undertiden har man på fornemmelsen, at visse matematiske økonomer betragter den ikke-matematiske økonomi som mindre eksakt og derfor også mindre »fin« og

*) Forf. føler, at han allerede ved at skrive denne artikel har vovet sig ud på gyngende grund.

»videnskabelig«. Jeg stiller mig også tvivlende over for den opfattelse, at kun gennem anvendelsen af matematik kan den økonomiske teori gøre yderligere fremskridt, at matematikken er økonomiens redningsplanke. Der er ingen grund til, at man ikke skulle kunne blive en god økonom, selvom man ikke forstår matematik. Om man ved løsningen af økonomiske spørgsmål vil bruge matematiske hjælpemidler eller ej, kommer kun an på, hvad man selv finder nemmest. Det er rigtigt, at matematikken ofte vil være en vej frem, som regel endda den hurtigste, men det er ikke den eneste.