MONA

Matematik- og Naturfagsdidaktik
– tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere

Syddansk Universitet

VIA University College

Absalon Professionshøjskolen Absalon

Aarhus Universitet

Københavns Professionshøjskole KP

UCL Erhvervsakademi og Professionshøjskole

DASG Danske Science Gymnasier

Københavns Universitet
Natur- og Biovidenskab

2024-3

MONA

Matematik- og Naturfagsdidaktik – tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere

MONA udgives af Det Natur- og Biovidenskabelige Fakultet ved Københavns Universitet, i samarbejde med Det Tekniske Fakultet og Det Naturvidenskabelige Fakultet ved Syddansk Universitet, Hovedområdet Science & Technology ved Aarhus Universitet, Det Lærerfaglige Fakultet ved Københavns Professionshøjskole, UCL Erhvervsakademi og Professionshøjskole, Center for Skole og Læring ved Professionshøjskolen Absalon, VIA University College og Danske Science Gymnasier.

Manuskripter
Manuskripter indsendes per mail, se www.science.ku.dk/mona. Medmindre andet aftales med redaktionen, skal der anvendes den artikelskabelon i Word som findes på www.science.ku.dk/mona. Her findes også forfattervejledning. Artikler i MONA publiceres efter peer-review (dobbelt blindt).

Abonnement
Abonnement kan tegnes via www.science.ku.dk/mona. Årsabonnement for fire numre koster p.t. 225,00 kr., for studerende 100 kr. Henvendelser vedr. abonnement, adresseændring, mv., se hjemmesiden eller ring til tlf 70 25 55 13 (kl. 9-16 daglig, dog til 14 fredag) eller mail til mona@portoservice.dk

Produktionsplan og deadlines for indsendelse af bidrag til MONA
MONA udkommer fire gange om året, normalt på onsdagen nærmest 5. marts, 5. juni, 5. september og 5. december.
Artikelmanuskripter og forslag til aktuelle analyser modtages løbende og behandles så hurtigt som muligt. Den redaktionelle proces (inkl. peer-review) tager mindst tre måneder. Deadlines aftales individuelt.
For kommentarer, litteraturanmeldelser og nyheder er deadline normalt 2 måneder før officiel udgivelsesdag.

Omslagsbillede skabt via ChatGPT af tekst-til-billede-modellen DALL-E, efterfølgende udvidet i Photoshop.

Billede på mellemsider: MONAs klassiske blå fjer gentænkt af DALL-E via ChatGPT.

Layout og tryk: Narayana Press

ISSN: 1604-8628.

Udledningen af drivhusgasser fra fremstillingen af denne tryksag er beregnet til: 0,22 kg CO2eq
i henhold til www.climatecalc.eu
Cert.nr. CC-000159/DK
www.narayana.dk

Indhold

Fra redaktionen

Nyt fra MONA

MONA kom til verden i september 2005 hvor uddannelsessektoren stod over for en række udfordringer. I folkeskolen baksede mange med implikationerne af to skuffende PISA-undersøgelser. På ungdomsuddannelserne stillede en ny gymnasiereform store krav til lærere. Og på læreruddannelsen så man ind i en lovændring der skar ned i antallet af linjefag. Disse generelle problemer slog hårdt igennem i matematik og naturfagene.

Til næste år fylder *MONA* 20 år. Uddannelsessystemet står stadig over for store udfordringer. Og *MONAs* formål har ikke ændret sig. *MONA* blev skabt med målet om at styrke matematik- og naturfagsundervisningen, og det er fortsat vores opgave. Vi arbejder for at udbrede den nyeste didaktiske viden og skabe et forum for den konstruktive dialog i feltet. Og det er langt hen ad vejen lykkedes – *MONA* har etableret sig som en vigtig partner i formidlingen af en forskningsbaseret, dansk matematik- og naturfagsdidaktik!

Men meget andet har ændret sig over de sidste to årtier. Og derfor må *MONA* nu ændre udtryk. De seneste års stigende priser på tryk og distribution har gjort det økonomisk uholdbart at fortsætte med at producere det fysiske *MONA*. Som så mange andre tidsskrifter for længst har gjort, vil *MONA* fra 2025 derfor overgå til at være 100 procent digitalt.

Dette er ikke kun en spareøvelse. De penge som i dag går til papir, blæk og porto, vil blive investeret i indholdet, og vi glæder os derfor til at kunne tilbyde den viden der deles i *MONA*, til flere og på flere måder. Vi ved at mange – også her på redaktionen – vil savne den taktile fornemmelse af et nyt tidsskrift. Men vi er også overbeviste om at det vigtige ved *MONA* ikke er formatet, som tidsskriftet udkommer i. Det vigtige er at *MONA* har et relevant indhold som bliver læst, diskuteret og brugt. Som altid findes *MONA* på tidsskrift.dk/mona.

2024 blev også året hvor *MONA* måtte sige farvel til Sebastian Horst, der efter et jobskifte er trådt ud af *MONAs* redaktion. Sebastian har været en vigtig drivkraft i *MONA* siden allerførste nummer. Derfor lyder her en stor tak til Sebastian for den store indsats for tidsskriftet.

MONA i matematikkens tegn

I denne udgave af MONA er der fokus på matematikken. Du får fire artikler samt en kommentar og en boganmeldelse.

Det er et centralt element i matematikundervisning at give elever kendskab til flere regnestrategier så de kan vælge den mest hensigtsmæssige til opgaven. Men i praksis har elever tendens til at holde fast i de samme strategier, viser Lóa Björk Jóelsdóttir og Pernille Bødtker Sunde i artiklen "Adaptivitet og fleksibilitet – addition og subtraktion med flercifrede tal". Selvom lærere og skoler i disse år har et større fokus på adaptiv fleksibilitet, er der stadig et stykke vej igen, vurderer forfatterne.

Strategiske brætspil som Othello kan bruges til at udvikle og styrke elevers matematiske ræsonnementskompetence. Det skriver Emilie Madeline Hersaa Nehammer, Anna Louise Eriksen og Erik Ottar Jensen i artiklen "Udvikling af matematisk ræsonnementskompetence gennem brætspillet Othello". Aktiviteter omkring spillet kan skabe en platform der giver elever mulighed for at øve sig i at fremsætte argumenter, som er karakteriseret ved en logisk progression, indeholder matematiske aspekter og er baseret på geometriske mønstre.

Hvordan bruger gymnasiets matematiklærere deres uddannelse? Det undersøger Carl Winsløw og Katrine Fredensborg Dedenroth i artiklen af samme navn. Ca. 1/4 af lærerne angiver at bruge viden fra universitetet i forbindelse med undervisningen i høj eller meget høj grad, mens godt halvdelen angiver nogen grad af brug. Resultaterne viser at både international forskning og danske læreres erfaringer bør inddrages systematisk i overvejelser af hvordan universitetsuddannelsen kan bidrage til at styrke matematikundervisningen i gymnasiet, skriver forfatterne.

I artiklen "Matematisk argumentation, geometri, gamle tekster og GeoGebra" argumenterer Marianne Thomsen for at arbejde med samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og digitale teknologier. Artiklen lægger op til at arbejde aktivt med logbøger hvis og når man vil skabe situationer der understøtter elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

Andelen af lærerstuderende der vælger Geografi som fag er katastrofalt lave. Det skriver Keld Conradsen, Poul Kristensen og Jette Reuss Schmidt i en kommentar til Brian Krog Christensens "Hvad får eleverne til at vælge de naturvidenskabelige studieretninger i gymnasiet?", fra *MONA 2024(2)*. Udfordringen skyldes blandt andet forældede og fejlagtige idéer om at geografi handler om at kende lande, byer, hovedstæder, floder og bjerge, skriver forfatterne der vil bryde fagets negative arv.

STEM er på den uddannelsespolitiske dagsorden i hele verden. Men det er stadig uklart hvordan STEM-undervisning skal operationaliseres i en dansk kontekst. Det kommer der nu et bud på i bogen *STEM-didaktik* af Connie Svabo, Dorte Moeskær Larsen, Katrine Bergkvist Borch, Maiken Westen Holm Svendsen og Mette Als Kristensen. Sidst i dette nummer giver Maria Møller sit bud på fem særligt relevante nedslag fra bogen.

God læsning.

Artikler

I denne sektion bringes artikler der er vurderet i henhold til MONA's reviewprocedure og derefter blevet accepteret til publikation.

Adaptivitet og fleksibilitet – addition og subtraktion med flercifrede tal

Lóa Björk Jóelsdóttir, VIA University College & TrygFondens Børneforskningscenter, Aarhus Universitet

Pernille Bødtker Sunde, VIA University College & KU Leuven

Abstract: *Internationalt er der enighed om at fleksibilitet og adaptivitet, dvs. at kende til flere strategier og at kunne vælge den mest hensigtsmæssige, er centrale elementer i matematikundervisning. Vi har undersøgt 2.298 danske 3.-, 6.- og 8.-klasseelevers brug af regnestrategier til trecifrede additions- og subtraktionsopgaver designet til at fremme brug af talbaserede metoder, fx 199 + 323. På tværs af klassetrin viste eleverne lav grad af adaptivitet. Eleverne anvendte sjældent de talbaserede metoder selvom disse havde højere rigtighedsprocent end standardalgoritmen. Brug af standardalgoritmen var størst i 8. klasse hvor eleverne samtidig gjorde mindst brug af talbaserede metoder.*

Indledning

Siden 1990'ernes reformorienterede matematikundervisning har der været bred enighed blandt eksperter om at adaptivitet og fleksibilitet er et centralt mål for matematikundervisningen (Baroody, 2003; Hickendorff et al., 2018; Xu et al., 2017). I lande som USA, Australien, Singapore (Rittle-Johnson et al., 2012), Holland (Hickendorff, 2018), Belgien (Torbeyns et al., 2018) og også Danmark (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a) er fleksibilitet således skrevet ind i læseplanerne for matematik.

Forskning i fleksibilitet og adaptivitet i relation til regning med både etcifrede og flercifrede tal har vist at der er god grund til at have fokus på børns udvikling og brug af regnestrategier da dette ser ud til at hænge sammen med matematikvanskeligheder (fx Ostad, 1997; Vanbinst et al., 2014) og udvikling af matematiske færdigheder mere generelt (Dowker, 2014; Jóelsdóttir, 2023; Sunde et al., 2023).

I dette studie vil vi undersøge danske elevers brug af forskellige strategier i arbejdet med flercifrede tal og om der er forskel på strategibrug på forskellige klassetrin.

Regnestrategier og cifferbaserede metoder

En metode til flercifrede beregninger vedrører den måde hvorpå man håndterer de tal der indgår i beregningen, med henblik på at finde frem til resultatet. Det kalder Hickendorff et al. (2019) en (løsnings)strategi. Vi har dog valgt at anvende begrebet metode som det overordnede generelle begreb da strategi i en dansk kontekst primært knytter sig til de talbaserede regnestrategier (se også Sunde, 2022). Regnemetoder kan dermed være både talbaserede regnestrategier og cifferbaserede metoder eller algoritmer, bl.a. standardalgoritmer. I det følgende uddyber vi hvordan vi anvender begreberne strategi og algoritme, hvilket også er beskrevet i Sunde (2022). Med en strategi eller regnestrategi forstår vi en metode som består af en række mulige handlinger som kan ændres og tilpasses den enkelte regnesituation (fx Ostad, 1997; Siegler & Jenkins, 1989; Verschaffel et al., 2007). En algoritme består derimod af fastlåste og ufravigelige trin for trin-handlinger (Siegler & Jenkins, 1989). Heri ligger at den er fastlagt på forhånd og kan bruges til alle typer opgaver, altså generelt, inden for en regningsart.

De talbaserede strategier har det tilfælles at de bygger på talforståelse samt forståelse af regneoperationernes egenskaber. De kræver forståelse for hvordan tallene kan deles op, ofte i enere, tiere, hundreder osv., fx at 384 = 300 + 80 + 4, og tallenes størrelse, fx at 199 er en mindre end 200, dvs. 199 = 200 − 1. De cifferbaserede metoder inkluderer bl.a. standardalgoritmen. Metoderne kan gennemføres som en udenadlært regneproces hvor forståelse ikke er nødvendig for at gennemføre de enkelte trin, men metoderne er nemme at generalisere for alle tal. Eksempler på tal- og cifferbaserede metoder kan ses i tabel 1.

At kunne anvende de talbaserede strategier forudsætter således at eleven har en god talforståelse og kan kombinere det med forståelse af de fire regningsarter (Yang et al., 2009). Dette er helt parallelt med udvikling af regnestrategier til etcifret regning, som beskrevet i Sunde (2022).

Tabel 1. *Eksempler på regnestrategier til flercifret addition og subtraktion.*

<table>
<tr><th colspan="3">Talbaserede strategier</th></tr>
<tr><td>Dekomposition (split)</td><td>Sekventielle strategier (lægge til – trin for trin)</td><td>Kompensation</td></tr>
<tr><td>384 + 216</td><td>199 + 323</td><td>199 + 323</td></tr>
<tr><td>300 80 4
200 10 6
500 + 200 = 500
80 + 10 = 90
4 + 6 = 10
500 + 90 + 10 = 600</td><td>300 + 199 = 499
499 + 23 = 522</td><td>200 + 323 = 523
523 - 1 = 522</td></tr>
<tr><td>704 – 17</td><td>704 – 17</td><td>673 – 199</td></tr>
<tr><td rowspan="3">700 - 0 = 700
0 - 10 = -10
4 - 7 = -3
700 + (-10) + (-3) = 687</td><td>704 - 7 = 697
697 - 10 = 687</td><td rowspan="3">673 + 1
199 + 1
674 - 200 = 474</td></tr>
<tr><td>Indirekte addition/fylde op
504 – 476</td></tr>
<tr><td>476 + 24 = 500
500 + 4 = 504
24 + 4 = 28</td></tr>
<tr><th colspan="3">Cifferbaserede metoder</th></tr>
<tr><td colspan="2">Standardalgoritme</td><td>Regning med cifre</td></tr>
<tr><td>482 + 218</td><td>504 – 476</td><td>384 + 216</td></tr>
<tr><td>1 1
482
218
700</td><td>4 10 9 10
504 –
476
028</td><td>4+6 = 10
8+1 = 9 sæt 0 bag på = 90
3+2 = 5 sæt 00 bag på = 500
10 + 90 = 100 + 500 = 600</td></tr>
</table>

Adaptivitet og fleksibilitet

I litteraturen anvendes forskellige definitioner af begreberne adaptivitet og fleksibilitet, og i flere tilfælde bruges fleksibilitet som synonym for begge (Verschaffel et al., 2009). Verschaffel et al. (2009) konkluderer at begrebet fleksibilitet oftest defineres som viden om forskellige strategier til løsning af et givent problem samt evnen til at anvende og skifte imellem disse strategier, og at begrebet adaptivitet oftest defineres som evnen til at vælge hensigtsmæssige strategier til løsning af et givent problem. I denne artikel følger vi disse definitioner.

Hvis vi ser lidt nærmere på adaptivitet, altså valg af hensigtsmæssige strategier, kan dette anskues fra tre forskellige perspektiver (Verschaffel et al., 2009). Det første perspektiv, som er hovedfokus i denne artikel, er opgaverelateret adaptivitet. Her er de mest hensigtsmæssige strategier de strategier hvor udregningsprocessen er gjort mere simpel i form af færre trin og simple beregninger, dvs. ved brug af en såkaldt shortcut-strategi (Torbeyns et al., 2009; Xu et al., 2017). Et eksempel er brugen af kompensation i opgaver som har 9 enere, fx $199 + 323 = 200 + 323 - 1 = 522$, eller indirekte addition (fylde op) til subtraktion med to tal med lille forskel, fx $103 - 98 = 2 + 3 = 5$. De øvrige to perspektiver på adaptivitet er det individuelt kognitive, dvs. når strategivalg er relateret til hvad der er hurtigst og mest sikkert for den enkelte person, og til sidst det kulturelle perspektiv, dvs. hvad der er anerkendt i det (klasse)miljø eleven er i (Verschaffel et al., 2007). Se også Sunde (2022) for eksempler.

Regnestrategier i en dansk kontekst

Diskussionen om fleksibilitet er ikke ny i dansk sammenhæng. Udvikling af regnestrategier og talbaserede regnemetoder har været en del af de officielle mål siden *Klare mål* fra 2001 (Undervisningsministeriet, 2001). I den danske læseplan fra 2019 står der bl.a.:

> "Det er centralt, at læreren udfordrer og støtter de enkelte elever på en måde, så eleverne udvikler deres regnestrategier på baggrund af deres talforståelse frem for at lære procedurer for opstilling og udregning. Der sigtes ikke mod opøvelsen af standardiserede algoritmer" (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a, s. 37).

I Undervisningsvejledningen fremhæves det desuden at arbejdet med regnestrategier skal bygge på udvikling af tal- og regneforståelse:

> "ambitionen er noget andet og mere, end at eleverne får præsenteret beregningsmetoder, som de efterfølgende øver sig på. Formuleringen hænger sammen med, at eleverne skal lære med forståelse. Det er med andre ord ikke hensigten, at eleverne reproducerer bereg-

ningsmetoder, men at de udvikler metoder, fordi en sådan udvikling kun kan foregå, når den er forbundet med forståelse af tallenes og regningsarternes egenskaber" (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a, s. 93).

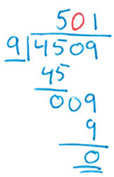
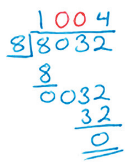
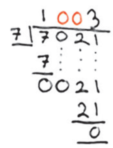
Der er således ingen tvivl om at anbefalingen de sidste årtier har været at arbejde med talbaserede regnestrategier frem for algoritmer i selve matematikundervisningen. Selvom begrebet fleksibilitet ikke anvendes direkte i beskrivelsen i læseplanen, svarer beskrivelsen af udviklingen af regnestrategier på baggrund af elevernes talforståelse netop til definitionen af fleksibilitet, og dermed kan anbefalingerne i Fælles Mål siges at sigte mod opnåelse af fleksibilitet.

Men hvordan ser det så ud med elevernes valg af løsningsstrategier i regneopgaver? Ser vi på de fire klassiske opgaver i regning med positive heltal i de fire regningsarter i folkeskolens prøve i matematik efter 9. klasse, færdighedsdelen fra maj 2019, kan vi se at 30 % af eleverne svarer forkert på subtraktionsopgaven 701 – 149 og 31 % svarer forkert på divisionsopgaven 7021: 7 (Undervisningsministeriet, 2019b). Begge opgaver har den egenskab at de understøtter anvendelse af talbaserede metoder (se tabel 1), her med særligt fokus på shortcut-strategier der har det tilfælles at være talbaserede metoder hvor antallet af step i udregningen reduceres (se tabel 2). Ser vi nærmere på de typiske fejlsvar, viser der sig et mønster. For opgaven 701 – 149 udgør fire af de fem mest hyppige fejlsvar, 462, 562, 648 og 652, tilsammen knap halvdelen af alle fejlsvar (8.750 elevsvar) og 13,6 % af alle elevsvar (Undervisningsministeriet, 2019b). Disse fejlsvar har det tilfælles at de kan være resultat af typiske fejl ved brug af standardalgoritmen (tabel 2). Resultater som disse understøtter en hypotese om at danske elever, trods anbefalingerne i Fælles Mål, prioriterer cifferbaserede metoder som fx algoritmer og i mindre grad arbejder med talbaserede metoder. Ud over de viste eksempler i figur 1 kan noget lignende ses ved analyse af fejlsvar af divisionsopgaver. I tabel 3 vises tre eksempler fra hhv. 2011, 2016 og 2019, hvor en algoritme sammenlignes med en talbaseret metode. Eksemplerne i tabel 3 viser hvordan en simpel fejl kan opstå når eleverne ikke husker processen i algoritmen når 0 er en af cifrene. Opgavens egenskaber understøtter samtidig muligheden for at løsningsprocessen kan simplificeres med en talbaseret metode, her ved opdeling af tallet på en hensigtsmæssig måde, fx 700 – 150 = 550, 550 + 2 = 552.

Tabel 2. *Mulige fejlmetoder til de hyppigste fejlsvar fra folkeskolens prøve uden hjælpemidler i maj 2019. N = 64.331, fejlsvar: 30 % af alle svar (Undervisningsministeriet, 2019b).*

Hyppigste fejlsvar til 701 – 149	Antal fejlsvar	Mulig løsningsmetode
462	2.656	5 ~~6~~ 10 11 ~~7~~01 − 149 462
550	2.245	701 − 149 −1 +1 700 − 150 = 550
562	2.221	6 10 11 701 − 149 562
648	2.101	701 − 149 648
652	1.772	9 11 7~~0~~1 − 149 652

Tabel 3. *Eksempler på division fra prøven uden hjælpemidler i 2011, 2016 og 2019, fejlprocent, hyppige fejlsvar (Hansen, 2011; Undervisningsministeriet, 2019b), og eksempler på løsningsmetoder med hhv. standardalgoritme og shortcut-strategi.*

	2011	2016	2019
Opgave	4509: 9	8032: 8	7021: 7
Fejlprocent	30 %	45 %	31 %
Hyppige fejlsvar	51	104	103
Standardalgoritme			
Shortcut-strategi	4500: 9 = 500 9: 9 = 1 500 + 1 = 501	8000: 8 = 1000 32: 8 = 4 1000 + 4 = 1004	7000: 7 = 1000 21: 7 = 3 1000 + 3 = 1003

Dette indikerer at standardalgoritmen fortsat spiller en væsentlig rolle i den danske matematikundervisning på trods af anbefalingerne i læseplanen. Men analyser af fejlsvar i folkeskolens prøve giver os ikke svar på hvordan eleverne rent faktisk regner, hverken når de regner forkert eller rigtigt. Målet med denne undersøgelse er derfor at få øget indblik i de danske elevers brug af talbaserede strategier og standardalgoritmer i addition og subtraktion med flercifrede tal.

Regnestrategier, adaptivitet og generel udvikling i matematik

Både international og dansk forskning har vist en tydelig sammenhæng imellem elevers brug af talbaserede regnestrategier tidligt i skoleforløbet og deres senere udvikling i matematik (Dowker, 2014; Ostad, 1997; Sunde et al., 2023; Vanbinst et al., 2014). I en dansk kontekst har Sunde et al. (2023) fx vist at elever der i starten af 1. klasse foretrak usofistikerede tællestrategier, klarede sig dårligere i 4. klasse i både tekstopgaver, brøker og ligninger.

Selvom eksperter inden for området er enige om vigtigheden af udvikling af variation af strategier, strategi-fleksibilitet og evnen til at vælge optimale strategier til forskellige situationer i form af adaptivitet, er der begrænset forskning inden for området. Derudover påpeger Verschaffel (2023) at resultater vedrørende sammenhæng mellem elevers fleksibilitet og præstation i matematik ikke er entydige. For over 30 år siden præsenterede Hatano & Inagaki (1984) begreberne adaptiv ekspertise og rutineekspertise. De påpegede at målet for matematikundervisningen må være udvikling af adaptiv ekspertise som indebærer at elever på baggrund af deres forståelse kan tilpasse deres strategivalg til forskellige og vekslende situationer. Selvom rutineeksperter på baggrund af god træning har færdigheder til at løse bestemte opgaver både hurtigt og sikkert, mangler de kompetencer til fleksibelt at kunne tilpasse sig til nye situationer (Hatano & Inagaki, 1984). I dansk sammenhæng viser resultater fra Jóelsdóttir (2023) at adaptive eksperter, defineret som elever som viser effektivitet (regner korrekt) med shortcut-strategier, klarer sig signifikant bedre i nationale tests i matematik end rutineeksperter, defineret som de elever som regner de samme opgaver med tilsvarende effektivitet, men som ikke anvender shortcut-strategier til nogen af opgaverne.

I dansk såvel som international sammenhæng mangler der forskning i elevers brug og udvikling af regnestrategier med flercifrede tal, både i forhold til forskellige aldersgrupper, køn og andre individuelle karakteristika, og sammenhænge mellem adaptiv fleksibilitet og elevernes generelle udvikling i matematik, og i forhold til hvordan undervisning bedst understøtter udvikling af elevers adaptivitet og fleksibilitet (Verschaffel, 2023).

Dette studie

Vi indledte artiklen med en kort analyse af afgangselevernes fejlsvar i de fire regningsarter. Analyser af fejlsvar ved folkeskolens prøver kan ikke give os indsigt i hvordan eleverne egentlig regner, eller om de faktisk godt kan bruge talbaserede strategier. Det kan kun give os en indikation af at der måske er noget der bør undersøges nærmere. Vi vil her undersøge nogle af de resultater Lóa Björk Jóelsdóttir har indsamlet i forbindelse med sit ph.d.-studie (Jóelsdóttir, 2023) hvor hun netop undersøger elevers brug af og kendskab til forskellige regnemetoder og -strategier.

Vores forskningsspørgsmål er derfor: 1) I hvilket omfang vælger elever standardalgoritmen frem for shortcut-strategier som førstevalg ved løsning af additions- og subtraktionsopgaver med flercifrede tal hvor shortcut-strategier er oplagte at anvende? Og 2) er der forskel på dette på 3., 6. og 8. klassetrin?

Elever fra 20 skoler fordelt på fem kommuner, både større og små, deltog i undersøgelsen. Skolerne blev valgt med henblik på at sikre deltagelse af både større og mindre skoler fra forskellige skoleområder. I alt har 2.298 elever fordelt på 121 klasser fra 3., 6. og 8. klasse løst – *Tri Phase Flexibility Assessment* (TriFA), med addition, subtraktion og multiplikation med flercifrede tal. Denne test er udviklet med baggrund i Xu et al. (2017) med det formål at kunne undersøge elevers strategivalg og strategirepertoire. Testen beskrives kort herunder, og en mere uddybende beskrivelse kan findes i Jóelsdóttir & Andrews (2023). I testen løser eleverne i 3. klasse 8 opgaver med flercifrede tal, i 6. klasse 9 opgaver og i 8. klasse 12 regneopgaver med selvvalgt metode, og de bliver bedt om at vise hvordan de har løst opgaven. Eleverne viser deres løsningsstrategi med matematiske symboler, tekst eller tegninger. De elever som vælger at løse opgaven med hovedregning, skriver/tegner noter til hvordan de har tænkt. Efterfølgende kodes elevernes metoder efter kategorier som eksemplificeret i tabel 1. Samtlige tests er dobbeltkodet af førsteforfatteren og en forskningsassistent trænet i kodning af TriFA, og efterfølgende er alle uenigheder identificeret og afklaret. I tilfælde af usikkerhed er afklaring søgt ved hjælp af andenforfatteren.

Testen forløber i tre faser med en fælles introduktion hvor eleverne bliver opfordret til at se på både de tal og de regneoperationer der indgår i hver opgave, før de løser opgaven. Fase 1 er elevernes første valg af metode. Elevernes valg af metode i denne fase giver et mål for opgavespecifik adaptivitet. I fase 2 starter eleverne forfra med de samme opgaver som nu løses igen, men med andre metoder. Det er et udtryk for elevernes strategirepertoire og dermed fleksibilitet. I sidste fase skal eleverne angive hvilken af alle de metoder de har angivet til hver opgave i både fase 1 og 2, som de selv mener er den bedste metode i det pågældende tilfælde. Hvis eleverne kun har fundet frem til én metode, er den markeret som den bedste. Dette giver yderligere informationer om elevernes adaptivitet, om eleverne anvender shortcut-strategier, og om de identificerer disse som de mest hensigtsmæssige.

I denne undersøgelse fokuserer vi på fase 1, elevernes adaptive strategivalg, og de to additionsopgaver og de to subtraktionsopgaver der er udviklet til at fremhæve fx kompensation som hensigtsmæssig shortcut-strategi baseret på opgavens tal og regningsart. De udvalgte opgaver og antallet af elever der har løst hver opgave, fremgår af tabel 4.

Tabel 4. *Overblik over opgaver. Antal elevbesvarelser og rigtige svar for hver opgave fordelt på klassetrin. Standard deviation (SD) er tilføjet i parentes.*

	298 + 483			199 + 323			693 – 499			673 – 199		
	N	Antal løst	Rigtig (SD)	N	Antal løst	Rigtig (SD)	N	Antal løst	Rigtig (SD)	N	Antal løst	Rigtig (SD)
3. klasse	380	312	65 % (50)	368	307	72 % (45)	174	87	20 % (40)	174	84	25 % (44)
6. klasse	365	362	90 % (30)	366	365	91 % (28)	365	340	64 % (48)	366	324	68 % (47)
8. klasse	408	405	93 % (26)	410	408	93 % (26)	408	393	82 % (39)	410	400	73 % (45)

Da fokus er på talbaserede strategier og brug af standardalgoritme til hhv. addition og subtraktion og ikke på forskelle i de enkelte opgavers egenskaber, vil vi i den efterfølgende analyse samle hhv. de to additionsopgaver og de to subtraktionsopgaver som en variabel pr. regningsart. Vi bruger en t-test for uafhængige stikprøver for de to additionsopgaver i 6. og 8. klasse for at undersøge om der er forskel på elevernes strategibrug mellem de to opgaver der har samme design mht. tal og regningsart. T-testen viser ingen signifikant forskel på brugen af standardalgoritme for addition, $t(1547) = 0{,}51$, $p = 0{,}612$, og for subtraktion, $t(1547) = -0{,}16$, $p = 0{,}872$, og det betyder at vi efterfølgende kan behandle resultaterne for de to additionsopgaver som én variabel for addition og de to subtraktionsopgaver som én variabel for subtraktion.

Danske elevers strategier til flercifret addition

Tabel 5 viser fordelingen af de forskellige metoder til flercifret addition fordelt på de tre klassetrin. Brugen af standardalgoritmen er lavest i 3. klasse med 48 % og stiger til 86 % af alle løste opgaver for elever i 8. klasse. Rigtigheden, dvs. andelen af rigtigt besvarede opgaver, stiger også fra 3. (75 %) til 6. (92 %) og 8. klasse (93 %). At rigtigheden ikke øges væsentligt fra 6. til 8. klasse, kan skyldes en loftseffekt, dvs. at når rigtigheden i 6. klasse allerede er over 90 %, er der ikke meget plads til forbedringer.

Af talbaserede strategier er dekomposition (split) den mest hyppige på alle tre klassetrin, mens kompensation, som umiddelbart er den mest hensigtsmæssige strategi fra et opgavemæssigt perspektiv, udgør hhv. 7 %, 8 % og 5 % på de tre klassetrin og altså mindst i 8. klasse. Samtidig er rigtighedsprocenten for kompensation højest eller hhv. 88 %, 96 % og 95 %.

Yderligere ses at mens der er 12 % af eleverne i 3. klasse som ikke viser hvordan de har løst opgaven, dvs. at de når frem til et svar uden at vise deres metode, er der kun 4 % af eleverne i 6. klasse og 2 % i 8. klasse som ikke viser en metode bag deres svar. Dette hænger formodentlig sammen med øgede kommunikative kompetencer. Elever i 6. og 8. klasse har mere erfaring med at kommunikere i og om matematik. På alle tre årgange er procentandelen af rigtige svar lav i forhold til andre metoder når eleverne ikke kommunikerer en metode.

Tabel 5. *Strategier anvendt til addition (298 + 483 eller 199 + 323) fordelt på klassetrin.*

	3. klasse		6. klasse		8. klasse	
	% af løste opgaver	% rigtige	% af løste opgaver	% rigtige	% af løste opgaver	% rigtige
Standardalgoritme	48 %	75 %	69 %	92 %	86 %	93 %
Dekomposition (split)	17 %	74 %	15 %	87 %	6 %	96 %
Sekventielle strategier (lægge til)	6 %	71 %	2 %	92 %	1 %	100 %
Kompensation	7 %	88 %	8 %	96 %	5 %	95 %
Ingen beskrevet metode	12 %	52 %	4 %	72 %	2 %	83 %
Fejlforståelse	1 %		0 %		0 %	
Tæller	1 %	60 %	0 %		0 %	
Cifferbaserede metoder (ikke standardalgoritme)	3 %	31 %	1 %	63 %	< 1 %	50 %
Andet	4 %	38 %	< 1 %	100 %	< 1 %	100 %

Danske elevers strategier til flercifret subtraktion

Tabel 6 viser fordelingen af strategier og rigtighed i procent for ni forskellige strategier eller metoder til flercifret subtraktion samt kategorien "andet" som dækker over metoder som ikke umiddelbart kan kategoriseres ud fra elevernes skriftlige svar, eller som er en kombination af flere strategier og dermed ikke kan kategoriseres entydigt. Standardalgoritmen er, som for addition, den hyppigst brugte metode. I 3. klasse er 33 % af de løste opgaver løst med standardalgoritmen sammenlignet med 81 % i 8. klasse. Kompensation er den mest sikre strategi, dvs. den med højest rigtighed. Her skal der dog tages det forbehold at der er ret få elever som bruger strategien (hhv. 1 %, 6 % og 3 %), men minimum 95 % af opgaver løst med kompensation er korrekte.

Tabel 6. *Strategier anvendt til subtraktion (693 – 499 eller 673 – 199) fordelt på klassetrin.*

	3. klasse		6. klasse		8. klasse	
	% af løste opgaver	% rigtige	% af løste opgaver	% rigtige	% af løste opgaver	% rigtige
Standardalgoritme	33 %	37 %	61 %	72 %	81 %	80 %
Dekomposition (split)	5 %	25 %	2 %	59 %	1 %	91 %
Sekventielle strategier (træk fra)	8 %	46 %	4 %	68 %	2 %	67 %
Sekventielle strategier (tæl op)	2 %	33 %	8 %	60 %	4 %	65 %
Kompensation	1 %	100 %	6 %	95 %	3 %	96 %
Ingen beskrevet metode	22 %	11 %	8 %	45 %	4 %	28 %
Fejlforståelse	19 %		7 %		3 %	
Tæller	1 %	0 %	0 %		0 %	
Andet	10 %	18 %	5 %	61 %	2 %	72 %

Diskussion

Resultaterne viser entydigt at danske elever i 3., 6. og 8. klasse anvender og foretrækker standardalgoritmen til løsning af flercifret addition og subtraktion, selv når opgaven vil være nemmere at løse med en talbaseret metode set ud fra opgavens karakteristika, i dette studie shortcut-strategien kompensation, og eleverne direkte bliver opfordret til at se på tallene inden de regner. Det gælder alle tre årgange der indgår i denne undersøgelse. Resultaterne er interessante, dels fordi shortcut-strategier, som kompensation, generelt er mere effektive (målt på rigtighed) (Jóelsdóttir et al., 2023), og dels set i lyset af at læseplanen i matematik har lagt op til brug af talbaserede strategier i over 20 år, som beskrevet i det indledende afsnit. Derudover har dansk forskning vist at elever der foretrækker regnemetoder der bygger på talforståelse, ser ud til at klare sig bedre i matematik end de elever der foretrækker standardalgoritmen eller simple tællestrategier (Jóelsdóttir, 2023; Sunde et al., 2023).

Talforståelse er en forudsætning for anvendelse af talbaserede strategier (se fx Sunde, 2022), og man må forvente at elever på ældre klassetrin har udviklet bedre talforståelse sammenlignet med de yngre elever. Derfor skulle de ældre elever have bedre forudsætninger for at anvende de talbaserede strategier og dermed et mere adaptivt strategivalg. Resultaterne her viser at det ikke er tilfældet. Danske elever ser altså i vid udstrækning ud til at udvikle sig mod rutineekspertise frem for adaptiv ekspertise, til trods for at Fælles Mål fremhæver adaptiv fleksibilitet som målet med undervisningen i regning.

En mulig forklaring på den udbredte brug af cifferbaserede metoder og i særdeleshed standardalgoritmen kan være de sociomatematiske normer i klasserummet (Cobb & Yackel, 1996), dvs. hvad eleverne oplever som værdsat, fx gennem typen af feedback. Dette kan også inkludere forventninger til skolematematik i hjemmet. Fra Hatano (1988) ved vi at det som hindrer udvikling af adaptiv ekspertise, er 1) mange gentagelser af samme slags opgaver, 2) at effektivitet værdsættes mere end forståelse, 3) at rigtigt svar er det som kræves, og 4) at løsningsprocessen sjældent er indholdet i den matematiske dialog. I hvor høj grad disse fire punkter kan genkendes fra danske matematikklasser, ved vi ikke, men disse punkter samt evt. manglende fokus på den basale talforståelse (Threlfall, 2002) er mulige forklaringer. Resultaterne fra dette studie giver anledning til at matematiklæreren forholder sig til de fire punkter i lyset af egen praksis. Den matematiske dialog om løsningsprocessen bør især have fokus på sammenligning af forskellige strategier. Dette vil bidrage til ikke alene elevernes fleksibilitet, men også adaptivitet hvor eleverne kan udvikle og tilpasse valg af de optimale strategier til de aktuelle situationer der indgår i en opgave.

International forskning viser at når eleverne først bliver introduceret til standardalgoritmen, så er det den de foretrækker efterfølgende (Selter, 2001). Forskningen viser ikke hvorfor, men der kan være flere faktorer i spil, fx de nævnte sociomatematiske normer i undervisningen, herunder indflydelsen af stærke traditioner og forståelse af hvad der er vigtigt i matematik, fx at målet er nået når “formlen” er på plads. En anden mulig forklaring er at der kan være tryghed i at have en formel hvor der kun arbejdes med cifre og dermed regning med etcifrede tal. Det kræver dog yderligere undersøgelser at finde de mulige årsager til at danske elever foretrækker standardalgoritmer i så høj grad som vi ser i dette studie.

Resultaterne her giver desuden anledning til yderligere undersøgelser af hvad der skal til for at elever fortsætter brugen af talbaserede strategier i de ældre klasser for at opnå målet om udvikling af adaptiv ekspertise frem for rutineekspertise. Selvom der er enighed om vigtigheden af udvikling af fleksible regnestrategier og adaptivitet, mangler der stadig forskning, både internationalt og i Danmark, som viser hvordan undervisning i højere grad kan støtte denne udvikling. Der er brug for større indsigt i hvorfor der er relativt få elever som udvikler adaptivitet, men holder fast i standardalgoritmen som deres foretrukne metode. Her vil forskning med fokus på den kultur og de sociomatematiske normer i de danske matematikklasser som relaterer sig til regnestrategier, være særlig relevant.

I tolkningen af disse resultater bør der tages det forbehold at elevernes regnestrategier er vurderet ud fra deres skriftlige kommunikation. Selvom der i instruktionen blev lagt vægt på at eleverne kunne vælge at beskrive deres løsningsmetoder med tekst, tegninger eller symboler, også hvis de først løste opgaven i hovedet, så kan manglende skriftlig kommunikationskompetence have påvirket nogle elevers valg af strategier. Resultaterne vil dog stadig vise hvilke valg eleverne har truffet i denne situation. Det er desuden en ganske lille del af besvarelserne hvor eleverne ikke har kommunikeret en løsningsmetode (fx addition: 12 % opgaver i 3. klasse og 2 % i 8. klasse), hvilket indikerer at manglende kommunikationskompetencer ikke har haft større indflydelse på de overordnede resultater.

Perspektivering

Sammenholder vi resultaterne af denne undersøgelse med vores indledende blik på folkeskolens prøve efter 9. klasse og resultaterne af de fire opgaver i heltalsregning, tyder det på at det formodentlig vil være til gavn for flere elever hvis adaptiv fleksibilitet bliver reglen snarere end undtagelsen, og at eleverne (og undervisningen) i højere grad fokuserer på anvendelse af talbaserede metoder. Det er særlig interessant at de ældste elever, efter flere år i skolens matematikundervisning, i så høj grad stoler på brugen af standardalgoritmen. Dette på trods af anbefalinger i Fælles Mål om undervisning der bygger på elevernes talforståelse. Det er vores oplevelse at flere lærere og skoler i disse år har et større fokus på adaptiv fleksibilitet, men resultaterne her viser at der stadig er et stykke vej, især i de ældre klassetrin.

For at skabe en kultur i undervisningen der er rettet mod udvikling af fleksibel matematisk tankegang og adaptiv ekspertise, kan de enkelte matematiklærere og fagteams med fordel se nærmere på hvordan skolens undervisnings- og testmateriale anvendes, og ikke mindst hvordan undervisningsmaterialet er med til at understøtte udvikling af talbaserede regnestrategier, hvilke spørgsmål der stilles i undervisningen, og hvilken feedback der gives. Ofte er det små justeringer der skal til for at tilgangen til arbejdet med tal og regning ændres i retning mod adaptiv fleksibilitet.

Referencer

Baroody, A.J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. I: A.J. Baroody & A. Dowker (red.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (s. 1-33). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Børne- og Undervisningsministeriet. (2019a). *Matematik – faghæfte 2019*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_Fagh%C3%A6fte_Matematik.pdf

Børne- og Undervisningsministeriet. (2019b). *Vejledning til folkeskolens prøver i faget matematik – 9. klasse.*

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31*(3), 175-190. https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265

Dowker, A. (2014). Young Children's Use of Derived Fact Strategies for Addition and Subtraction. *Frontiers in Human Neuroscience, 7*, 1-9. https://doi.org/10.3389/fnhum.2013.00924

Hansen, H.C. (2011). *Moderne matematiske færdigheder fra skolestart til studiestart – et udredningsarbejde finansieret af Undervisningsministeriet 2010-2011*. https://www.ucviden.dk/files/121875011/Udredning_fra_f_rdighedsudvalget_for_matematik.pdf

Hatano, G. (1988). Social and Motivational Bases for Mathematical Understanding. *New Directions for Child Development, 41*, 55-70. https://doi.org/10.1002/cd.23219884105

Hatano, G. & Inagaki, K. (1984). Two Courses of Expertise. *Research & Clinical Center for Child Development, 82-83(Ann Rpt)*, 27-36.

Hickendorff, M. (2018). Dutch Sixth Graders' Use of Shortcut-Strategies in Solving Multidigit Arithmetic Problems. *European Journal of Psychology of Education, 33*(4), 577-594. https://doi.org/10.1007/s10212-017-0357-6

Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2018). Grade-Related Differences in Strategy Use in Multidigit Division in Two Instructional Settings. *British Journal of Developmental Psychology, 36*(2), 169-187. https://doi.org/10.1111/bjdp.12223

Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2019). Multi-Digit Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Strategies. I: A. Fritz, V.G. Haase & P. Räsänen (red.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties* (s. 543-560). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_32

Jóelsdóttir, L.B. (2023). *Essays on Adaptivity and Flexibility in Multidigit Arithmetic*. Aarhus Universitet. https://pure.au.dk/portal/da/publications/essays-on-adaptivity-and-flexibility-in-multidigit-arithmetic(441b0429-68a7-45e1-ab6f-04dbddacefb6).html

Jóelsdóttir, L.B. & Andrews, P. (2023). Danish Third, Sixth and Eighth Grade Students' Strategy Adaptivity, Strategy Flexibility and Accuracy when Solving Multidigit Arithmetic Tasks. *European Journal of Psychology of Education*. https://doi.org/10.1007/s10212-023-00786-2

Jóelsdóttir, L.B., Sunde, P.B. & Andrews, P. (2023). Age- and Gender-Related Differences in Danish Students' Use of Number-Based Strategies when Solving Multidigit Addition Tasks. I: P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (red.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 433-440). European Society for Research in Mathematics Education.

Ostad, S. (1997). Developmental Differences in Addition Strategies: A Comparison of Mathematically Disabled and Mathematically Normal Children. *British Journal of Educational Psychology, 67*(3), 345-357. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1997.tb01249.x

Rittle-Johnson, B., Star, J.R. & Durkin, K. (2012). Developing Procedural Flexibility: Are Novices Prepared to Learn from Comparing Procedures? *British Journal of Educational Psychology, 82*(3), 436-455. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02037.x

Selter, C. (2001). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: German Elementary Children's Success, Methods and Strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 145-173. https://www.jstor.org/stable/3483326

Siegler, R.S. & Jenkins, E. (1989). *How Children Discover New Strategies*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Sunde, P.B. (2022). Adaptivitet og fleksibilitet – regnestrategier i de yngste klasser. *MONA, 2022*(2), 7-23. https://tidsskrift.dk/mona/article/view/132755

Sunde, P.B., De Smedt, B., Verschaffel, L. & Sunde, P. (2023). Grade One Single-Digit Addition Strategies as Predictors of Grade Four Achievement in Mathematics. *European Journal of Psychology of Education*. https://doi.org/10.1007/s10212-023-00761-x

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29-47. https://doi.org/10.1023/A:1020572803437

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and Use of Shortcut-Strategies by Traditionally Schooled Children. *Educational Studies in Mathematics, 71*(1), 1-17. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9155-z

Torbeyns, J., Peters, G., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2018). Subtraction by Addition Strategy Use in Children of Varying Mathematical Achievement Level: A Choice/No-Choice Study. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 215-234. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.77

Undervisningsministeriet. (2001). *Klare mål – matematik – faghæfte 12*.

Vanbinst, K., Ghesquière, P. & De Smedt, B. (2014). Arithmetic Strategy Development and Its Domain-Specific and Domain-General Cognitive Correlates: A Longitudinal Study in Children with Persistent Mathematical Learning Difficulties. *Research in Developmental Disabilities, 35*(11), 3001-3013. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2014.06.023

Verschaffel, L. (2023). Strategy Flexibility in Mathematics. *ZDM – Mathematics Education, 56*, 115-126. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01491-6

Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K. & Van Dooren, W. (2007). Strategy Flexibility in Children with Low Achievement in Mathematics. *Educational and Child Psychology, 24*(2), 16-27. https://doi.org/10.53841/bpsecp.2007.24.2.16

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. European Journal of Psychology of Education, 24(3), 335-359. https://doi.org/10.1007/BF03174765

Xu, L., Liu, R.D., Star, J.R., Wang, J., Liu, Y. & Zhen, R. (2017). Measures of Potential Flexibility and Practical Flexibility in Equation Solving. *Frontiers in Psychology, 8*, 1368. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01368

Yang, D.-C., Reyes, R.E. & Reyes, B.J. (2009). Number Sense Strategies Used by Pre-Service Teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 7, 383-403. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9124-5

English abstract

Internationally, there is a consensus that flexibility and adaptivity, i.e. knowing multiple strategies and being able to choose the most appropriate, are key elements in mathematics education. We investigated 2298 Danish 3rd, 6th and 8th grade students' use of arithmetic strategies for 3-digit addition and subtraction designed to promote use of number-based strategies such as 199 + 323. Across grade levels, students showed low levels of adaptivity. Students rarely used number-based strategies even though they had higher accuracy than the standard algorithm. Use of the standard algorithm was highest in 8th grade, where students also used number-based strategies the least.

Udvikling af matematisk ræsonnementskompetence gennem brætspillet Othello

Emilie Madeline Hersaa Nehammer, Virum Skole

Anna Louise Eriksen, Lindevangskolen

Erik Ottar Jensen, Aalborg Universitet

Abstract: *Denne artikel undersøger integrationen af strategiske og kombinatoriske brætspil, såsom Othello, i matematikundervisningen ved anvendelse af fire designprincipper som sigter mod at styrke mellemtrinselevers matematiske ræsonnementskompetence. Artiklen fokuserer på en intervention i en 5. klasse. Det beskrives hvordan elevernes engagement i "undersøgende dialog" under Othello-relaterede aktiviteter kan skabe en platform der giver dem mulighed for at øve sig i at fremsætte matematiske ræsonnementer af både processuel og strukturel karakter. Artiklen konkluderer at sådanne aktiviteter kan bidrage positivt til udviklingen af elevers ræsonnementskompetence.*

Indledning

Matematiklærere i grundskolen finder det både udfordrende og tidskrævende at tilrettelægge matematikundervisning som er kompetenceorienteret (Højgaard & Arnt, 2021). I forlængelse heraf peger forskningsresultater på at arbejdet med matematisk ræsonnementskompetence kan være vanskeligt for både lærere og elever (Stylianides & Stylianides, 2008; Hansen et al., 2020). Larsen (2019) forklarer at vanskelighederne med at udvikle ræsonnementskompetence i skolen hovedsageligt skyldes en for sen introduktion til ræsonnementsfremmende undervisning for eleverne. Dette problem forstærkes af lærernes begrænsede viden om matematisk ræsonnering, hvilket resulterer i at elevernes ræsonnementsfærdigheder ofte reduceres til udenadslære.

Gennem et designeksperiment med brætspillet Othello præsenterer artiklen et praksisorienteret perspektiv på hvordan lærere i grundskolen kan tilrettelægge kompetencemålsstyret matematikundervisning der har til hensigt at udvikle mellemtrinselevers matematiske ræsonnementskompetence. Artiklen har således til hensigt at give et bud på hvordan elever i folkeskolen kan arbejde med ræsonnementskompetence i matematikundervisningen.

Fælles Mål for matematik (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019) placerer ræsonnementskompetencen og de resterende syv matematiske kompetencer centralt i nutidens matematikundervisning. Efter 6. klasse skal eleverne "[...] kunne anvende ræsonnementer i undersøgende arbejde", og de skal "[...] kunne anvende ræsonnementer til at udvikle og efterprøve hypoteser" (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019, s. 7). Både Mosimege (1998), McFeetors & Palfy (2018) og Jensen & Skott (2022) beskriver hvordan spil ofte forbindes med forskellige former for matematiske og logiske tankeprocesser samt ræsonnementer. I overensstemmelse hermed fremhæver Berkman (2004), Schoenfeld (2016), Mechner (2010), Day (2014) og Houssart & Sams (2008) at særligt kombinatoriske strategispil har potentiale til at styrke matematisk ræsonnementskompetence hos elever på mellemtrinnet. Det skyldes at disse spil motiverer eleverne til at reflektere på en måde der gør dem i stand til at forudse kommende træk og spilsituationer. I undersøgende arbejde med ræsonnementer beskriver Berthold et al. (2020) hvordan strategiske brætspil som fx Othello er et fordelagtigt redskab til netop dette, da eleverne her har mulighed for at udvikle, undersøge og afprøve strategier for at vinde.

Der er dermed indikationer på at anvendelse af strategiske brætspil kan bidrage til at eleverne både arbejder med ræsonnementskompetencen i undersøgende arbejde og anvender ræsonnementer i udvikling og efterprøvning af hypoteser som Fælles Mål beskriver (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019). Dog erkender vi at matematisk ræsonnering ikke kan simplificeres til en generel øvelse der er uafhængig af det konkrete matematiske indhold (Dawkins & Karunakaran, 2016). Elevers måde at ræsonnere på påvirkes i høj grad af det matematiske indhold der er genstand for ræsonnementet.

Gennem ovenstående positive resultater præsenterer denne artikel et konkret bud på hvordan grundskolelæreres udfordringer med organisering og implementering af kompetencebaseret undervisning kan adresseres. Artiklen introducerer et undervisningsforløb designet til at fremme mellemtrinselevers matematiske ræsonnementskompetence ved brug af det strategiske brætspil Othello.

Matematiske ræsonnementer og ræsonnementskompetence hos elever på mellemtrinnet

Ifølge Jeannotte & Kieran (2017) betoner forskellige typer af definitioner af et matematisk ræsonnement hhv. det strukturelle og det processuelle aspekt af et ræsonnement. Definitioner der vægter strukturelle aspekter, indbefatter beskrivelser som fx "et godt argument" eller "et logisk gyldigt argument" (Lindhart et al., 2010), "en kæde af både formelle og informelle argumenter" (Niss & Jensen, 2002) samt "et ræsonnement der involverer mønstre" (delMas, 2004). Definitioner der vægter den processuelle struktur, inkluderer beskrivelser som fx "at forklare", "at begrunde", "at modificere" og "at vurdere" (Whitenack & Yackel, 2002; McFeetors & Palfy, 2018; Lindhart et al., 2010). Selvom forskellige typer af definitioner lægger vægt på de to aspekter, bør de ikke opfattes som værende uafhængige af hinanden. Tværtimod er de i nogen grad afhængige af hinanden idet det strukturelle aspekt af matematisk ræsonnement kan betragtes som resultatet af den proces der beskrives af det processuelle aspekt.

Et konsekvent karaktertræk ved de definitioner af et matematisk ræsonnement der vægter de processuelle aspekter, er et udpræget fokus på kommunikation. Desuden involverer matematisk ræsonnering kommunikation med sig selv eller med andre. Fx beskriver Whitenack & Yackel (2002) at matematisk ræsonnering særligt handler om at argumentere for en påstand ved at forklare og begrunde sine idéer og derved at tydeliggøre dem over for andre. I tråd hermed udtrykker McFeetors & Palfy (2018) hvordan et matematisk ræsonnement refererer til et systematisk og logisk adfærdsmønster som er karakteriseret ved såkaldte "verber for matematisk ræsonnering" (McFeetors & Palfy, 2018, s. 106). Disse verber udgør bl.a. generalisere, undersøge, forklare, begrunde, modificere og overbevise. KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002) har ligeledes fokus på kommunikation. Her defineres et matematisk ræsonnement som værende "en kæde af argumenter fremsat på skrift eller i tale til støtte for en påstand" (Niss & Jensen, 2002, s. 209). I overensstemmelse med disse beskrivelser omtaler Mercer & Wegerif (1999) og Houssart & Sams (2008) denne type kommunikation som "exploratory talk", hvilket vi fremadrettet i denne artikel betegner "undersøgende dialog". Denne kommunikationsform er kendetegnet ved at eleverne i en fælles diskussion forklarer og begrunder deres ræsonnementer, lytter til hinanden samt positivt imødekommer udfordringer fra både lærere og elever (Mercer & Wegerif, 1999; Houssart & Sams, 2008). "Undersøgende dialog" i klasseværelset kan have til formål at skabe en platform hvor eleverne kan øve sig i at fremsætte matematiske ræsonnementer.

Matematisk ræsonnementskompetence

Ligesom "undersøgende dialog" beskrives matematisk ræsonnementskompetence som at kunne følge og bedømme holdbarheden af et matematisk ræsonnement samt at kunne stille opklarende spørgsmål der eventuelt forbedrer det fremsatte ræsonnement (Niss & Jensen, 2002; NGA Center & CCSSO, 2010). Derudover handler kompetencen om at kunne fremsætte informelle ræsonnementer der, på trods af deres karakter, er meningsfulde og korrekte, samt at kunne formulere formelle ræsonnementer på basis af intuition. Lindhart et al. (2010) understreger at når mellemtrinselever arbejder på at udvikle deres ræsonnementskompetencer, bør matematiske ræsonnementer ses i relation til den enkelte elevs matematiske formåen, hvilket vil sige at et ræsonnements validitet og kompleksitet skal vurderes i forhold til elevens udviklingsmæssige kontekst. I samme spor bruger Stylianides (2007) begrebet "intellectual-honesty principle" til at argumentere for at elevers ræsonnementer ikke bør sammenlignes med ræsonnementer der er udført af personer med et højere matematisk niveau.

For mellemtrinselever kan ræsonnementskompetence komme til udtryk ved at eleverne kan fremsætte påstande om matematiske sammenhænge i relation til det faglige indhold som de beskæftiger sig med. Desuden kan de undersøge påstande og præsentere modeksempler (Ferrini-Mundy, 2000). I en undervisningssituation der fx fokuserer på multiplikationsstrategier og talforståelse, vil en elev på mellemtrinnet forventeligt kunne ræsonnere sig frem til at ved at udelade et-tabellen vil resultatet i tabellerne for de lige tal altid være lige, idet et lige tal ganget med et andet lige tal giver et lige resultat, og et lige tal ganget med et ulige tal ligeledes giver et lige tal.

Udvikling af matematisk ræsonnementskompetence gennem Othello

Othello er et topersoners kombinatorisk strategispil (Fraenkel, 2012) der spilles på et bræt med 8 x 8 felter. Spillebrikkerne er identiske og kan vendes så en hvid eller en sort side vender opad. På skift placerer spillerne en brik på brættet og vender de af modstanderens brikker der placerer sig mellem denne og andre af denne spillers brikker. Spillet vindes ved at have flest brikker af sin egen farve til slut (Berthold et al., 2020; Bjarning et al., 2020). Reglerne i Othello er lige så enkle som i dam, mens strategierne er lige så komplekse som i skak (Dansk Othello Forbund, 2018). Der er ingen tilfældigheder, som fx med terninger eller spillekort, ligesom der ingen skjulte informationer er undervejs. Begge spillere har derfor viden om alle forudgående træk. Det betyder at der er mulighed for at spillerne vil få erfaringer med og kunne genkende geometriske mønstre i spillets gang i form af en forståelse for sammenhængen mellem de to variable sort og hvid. Othello fordrer, ligesom det er tilfældet for fx skak, at spillerne tænker strategisk og ræsonnerer med udgangspunkt i de geometriske mønstre som spillerne bliver bekendte med efterhånden som de gør sig erfaringer med spillet (Mechner, 2010; Schoenfeld, 2016). På den måde kan Othello, ligesom skak, forstås gennem forskellige matematiske emner fra grundskolen, herunder numeriske og rumlige sammenhænge, samt strategier til problemløsning som fx fokusering og fortolkning af spil-/problemsituationer og udvælgelse af relevant information (Sala & Gobet, 2015).

Othellos potentiale til at udvikle mellemtrinselevers ræsonnementskompetence

Da Othello er et kombinatorisk strategispil, kan det potentielt bidrage til at styrke både de strukturelle og de processuelle aspekter af et matematisk ræsonnement. Mere nøjagtigt får mellemtrinselever ved at spille brætspillet mulighed for at øve sig i at fremsætte matematiske ræsonnementer i form af "et godt argument", "et logisk gyldigt argument" eller "en kæde af informelle argumenter" for en påstand ved at "forklare" og "begrunde" deres idéer. Desuden kan Othello lægge op til at eleverne følger og bedømmer hinandens ræsonnementer, ligesom ræsonnementerne kan forventes at opnå en vis grad af progression efterhånden som eleverne får flere erfaringer med spillet. At Othello i en undervisningssituation har potentiale til at motivere eleverne til at udtænke, fremsætte, forklare, begrunde og bedømme deres ræsonnementer, betyder samtidig at en undervisning der har Othello som omdrejningspunkt, kan opmuntre eleverne til at kommunikere med "undersøgende dialog". (Mercer & Wegerif, 1999). Dette betyder endvidere at eleverne potentielt kan udvikle matematisk ræsonnementskompetence ved at spille brætspillet.

Studiets kontekst

Studiet præsenteret i artiklen her er udarbejdet i forbindelse med et kandidatspeciale på DPU der i samarbejde med Greve Othello Forening undersøger analoge spil i matematikundervisningen. Som led i en større kommunal satsning på ungdomsområdet har foreningen skabt et tilbud hvor den besøger skoleklasser og gennemfører et matematikundervisningsforløb med udgangspunkt i brætspillet Othello. Forløbet har til hensigt at udvikle elevernes matematiske og logiske tænkning gennem anvendelse af Othellos strategiske muligheder. Efter aftale med Jens Aagaard-Hansen (formand for Greve Othello Forening), der tilrettelægger undervisningen, fik vi mulighed for at modificere forløbet så det fik et eksplicit fokus på udvikling af mellemtrinselevers matematiske ræsonnementskompetence.

I et hermeneutisk litteraturstudie (Boell & Cecez-Kecmanovic, 2014) undersøgte vi: 1) hvordan et matematisk ræsonnement defineres i litteraturen; 2) hvilke typer af ræsonnementer det kan forventes at mellemtrinselever kan formulere; 3) hvordan matematisk ræsonnementskompetence kan komme til udtryk i en undervisningssituation; 4) hvordan ræsonnementsfremmende undervisning med fordel kan tilrettelægges. Med udgangspunkt i litteraturstudiets indledende resultater undersøgte vi hvilke potentialer Othello har i forhold til udvikling af matematisk ræsonnementskompetence. Disse potentialer omformede vi til fire "designprincipper" (Hanghøj et al., 2022) som lå til grund for det modificerede Othello-forløb. Forløbet blev afprøvet i en intervention hvor vi i et minietnografisk casestudie kunne analysere de fire designprincipper.

Interventionen

Interventionen blev indledt med at eleverne i en 5. klasse spillede Othello på traditionel vis således at vi havde et sammenligningsgrundlag. Mere præcist spillede de her én mod én og med udgangspunkt i spillets traditionelle opstilling. Herefter gennemførte to af forfatterne det modificerede Othello-forløb over tre dobbeltlektioner. En af forfatterne underviser i matematik på mellemtrinnet og stod derfor for at gennemføre undervisningen. En anden forfatter udførte deltagende observationer og nedskrev iagttagelser i form af en detaljeret logbog. Herudover blev al undervisning i plenum og to af gruppernes samtaler under spillerunderne optaget. Der blev desuden foretaget to semistrukturerede interviews med to udvalgte grupper samt indhentet elevproduceret skriftligt materiale i form af udfyldte arbejdsark. Interventionen resulterede i at vi kunne analysere hvordan vores designprincipper fungerede i praksis, og efterfølgende anlægge et kritisk perspektiv på selvsamme.

Vi er opmærksomme på at undervisningen kunne være forløbet anderledes hvis den var udført af klassens sædvanlige matematiklærer. Alligevel bidrager casestudiet til at vi opnår forståelse for elevernes ageren og oplevelse af en indsats der foregik i deres egen praksis.

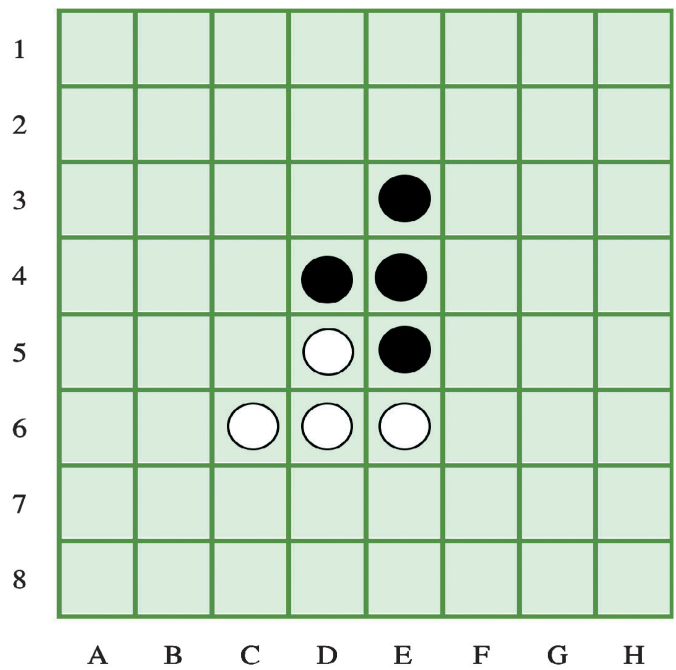
Udvikling af en taksonomi for at kategorisere og forstå progression i ræsonnementer

For at vurdere om eleverne kunne fremsætte, følge og bedømme ræsonnementer af strukturel og processuel karakter, samt for at kunne kategorisere progressionen i de forskellige interaktionstyper udarbejdede vi en taksonomi (tabel 1). Taksonomien er inspireret af Díez-Palomar & Olivés (2015) interaktionsteori og illustrerer progressionen i forskellige typer af ræsonnementer som vi forventede at eleverne ville kunne fremsætte under spilprocessen. Til taksonomien har vi tilføjet "hverdags-argumenter" som en underkategori til "interaktionstype 2: ikke-dialogisk interaktion". Valget af Díez-Palomar & Olivés (2015) teori skyldes at vi mener at "undersøgende dialog" falder under kategorien "interaktionstype 3: dialogisk interaktion" der er kendetegnet ved at elever udveksler og verificerer argumenter baseret på gyldighedskrav.

Tabel 1. *Tabellen illustrerer progression i de typer af matematiske ræsonnementer eller mangel på samme som vi forventer at eleverne vil kunne fremsætte i en spilsituation.*

Interaktionstype	Kendetegn	Ræsonnement	Eksempel
Interaktionstype 1: udveksling af information	Eleverne fremsætter påstande uden at argumentere ved at forklare og begrunde.	Intet ræsonnement	"Det er en ulempe at være den der starter" "Det er en fordel at placere en brik i et hjørnefelt"
Interaktionstype 2: ikke-dialogisk interaktion	Eleverne anvender ugyldige argumenter baseret på hverdagserfaringer til at forklare og begrunde en påstand.	Hverdagsræsonnement	"Jeg vinder Othello fordi jeg ofte spiller brætspil" "Hvis jeg starter, så vinder jeg"
	Eleverne anvender ugyldige argumenter for en påstand baseret på magt til at forklare og begrunde en påstand.	Magtræsonnement	"Jeg vinder fordi jeg er klogere end dig" "Hvis jeg placerer min farve i hjørnerne af spillebrættet, så vinder jeg, fordi min lærer siger det"
Interaktionstype 3: dialogisk interaktion	Eleverne fremsætter korrekte og meningsfulde argumenter for en påstand ved at forklare og begrunde.	Korrekt og meningsfuldt ræsonnement	Et godt eller logisk gyldigt argument "Hvis jeg placerer min brik i dette felt, så kan jeg, som følge af spillets regler, vende fem brikker" "Hvis jeg placerer min brik i dette felt, så kan jeg vende tre brikker fordi jeg lukker modstanderens brikker inde horisontalt" En kæde af informelle argumenter "Hvis jeg placerer brikker i hjørnet, kan min modstander ikke vende dem, og så får jeg mulighed for at vende modstanderens brikker både diagonalt og langs kanterne"

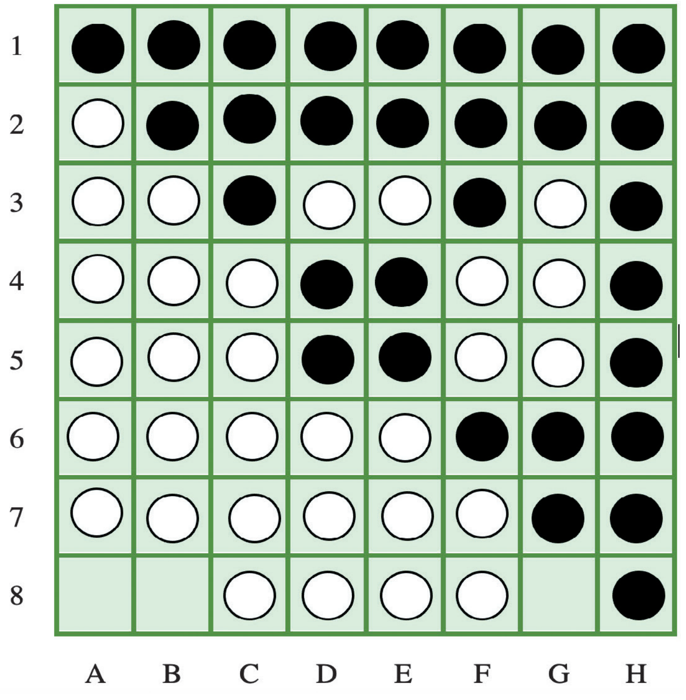
Tabel 1 illustrerer vores forventning om at en mellemtrinselev som endnu ikke har opnået tilstrækkelig erfaring med Othello, i en spilsituation vil kunne fremsætte en simpel påstand. Denne påstand vil handle om elevens kommende træk og vil derfor være et udtryk for en kortsigtet strategi. Eleven kan fx hævde at hun kan vende flest af modspillerens brikker hvis hun placerer sin brik i et givent felt. Et eksempel på denne spilsituation fremgår af figur 2.



Figur 2. *Et eksempel på en spilsituation hvor hvid har mulighed for at vende tre sorte brikker ved næste træk.*

En forklaring på en sådan påstand kunne være at eleven har talt antallet af brikker som trækket giver mulighed for at vende. Selvom denne forklaring kun involverer overvejelser angående ét træk, vil det være meningsfuldt og korrekt i den pågældende situation, så længe ræsonnementet tager afsæt i Othellos regelsæt.

I litteraturen finder vi at et matematisk ræsonnement kan komme til udtryk når eleven anvender formuleringen "hvis … så", og at denne formulering kan være en hjælp for eleven når hun skal fremsætte et ræsonnement (Mason, 2002). Herudover kan formuleringen være et udtryk for at eleven er på vej til at udvikle en strategi der giver hende fordele i spillet (Houssart & Sams, 2008). Efterhånden som eleven gør sig flere erfaringer med spillet, vil progressionen i de fremsatte ræsonnementer blive tydelig idet hun vil kunne fremsætte et ræsonnement der indeholder "hvis … så"-formuleringen, og som består af "en kæde af informelle argumenter" i form af en langsigtet strategi. Ræsonnementet kan lyde noget i retningen af: "*Hvis* jeg placerer min farve i alle fire hjørner af spillebrættet, *så* kan min modspiller ikke vende disse hjørnebrikker, og *så* vil jeg kunne vende min modstanders brikker langs kanten og diagonalt." Figur 3 viser en spilsituation hvor sort har placeret tre af sine brikker i et hjørne.



Figur 3. *Et eksempel på en spilsituation hvor sort har sat sin farve i tre af spillebrættets hjørner.*

De fire designprincipper anvendt i en tredelt struktur

For at motivere eleverne til at ræsonnere gennem "undersøgende dialog" havde vi i interventionen struktureret undervisningen i en tredelt struktur som med fordel kan anvendes i en undersøgende matematikundervisning. Denne tredelte struktur udgør hhv. en iscenesættelse, en aktivitet og en fællesgørelse (Blomhøj, 2017). I et Othello- og ræsonnementsperspektiv kan strukturen indledes med en didaktisk del i form af et forberedende oplæg. Her sætter læreren rammerne og klæder eleverne på til den efterfølgende adidaktiske del (Brousseau, 1997), Othello-aktiviteten, hvor eleverne skal spille og øve sig i at ræsonnere på egen hånd, og hvor de har frihedsgrader til at handle undersøgende (Blomhøj, 2017). Den sidste del er en fælles opsamling hvor læreren gennem opklarende spørgsmål forsøger at forfine samt styrke forståelsen af de matematiske ræsonnementer som er kommet til udtryk i Othello-aktiviteten.

Nedenfor fremgår de fire designprincipper som vi anvendte i interventionen, og som tilbyder eleverne en arena hvor de kan øve sig i at fremsætte matematiske ræsonnementer ved at motivere til "undersøgende dialog" (Mercer & Wegerif, 1999). Designprincipperne blev udviklet på baggrund af resultaterne fra litteraturstudiet, der beskriver hvordan ræsonnementsfremmende undervisning med fordel kan tilrettelægges. Derudover integrerede vi viden fra litteraturstudiet om tilrettelæggelse af undervisning der fokuserer på strategispil som Othello, med det formål at fremme ræsonnementer.

Designprincipper til anvendelse af Othello i matematikundervisningen

Præsentér og repetér løbende "hvis … så"-formuleringen.
Lad ét par spille mod et andet par.
Lad eleverne spille ud fra bestemte variationer af spillet.
Stil løbende opfølgende spørgsmål til elevernes begyndende ræsonnementer.

Præsentér og repetér løbende "hvis … så"-formuleringen

En konkret måde hvorpå læreren kan lægge eksplicit op til at eleverne anvender "undersøgende dialog" i Othello-aktiviteten, er at præsentere "hvis … så"-formuleringen (Mason, 2002; Larsen & Lindhardt, 2019) under iscenesættelsen og herefter løbende huske eleverne på at anvende denne formulering. Formuleringen skaber i sin natur gunstige forudsætninger for at ræsonnementer af forskellige grader kan komme til udtryk når eleverne er i dialog med hinanden. Mere præcist kan et matematisk ræsonnement komme til udtryk når en elev anvender formuleringen "hvis … så". Denne formulering kan tilmed være en hjælp for eleven når hun skal fremsætte "et godt argument" eller "et logisk gyldigt argument" eller "en kæde af informelle argumenter" for en påstand ved at "forklare" og "begrunde" sine idéer (Mason, 2002).

Lad ét par spille mod et andet par

Ligesom med en række andre abstrakte brætspil spilles Othello i en én mod én-konstellation. Denne opstilling opfordrer ikke direkte til at spillerne kommunikerer om de træk de gør under spillet. Med henblik på at fremme "undersøgende dialog" kan læreren organisere eleverne i par så de spiller Othello ét par mod et andet. Årsagen er at eleverne naturligt vil diskutere de træk de ønsker at udføre. Mere præcist får eleverne bedre mulighed for at ræsonnere når de har både med- og modspillere, frem for når de spiller alene og mod en enkelt person (McFeetors & Palfy, 2018).

Lad eleverne spille ud fra bestemte variationer af spillet

Spil har større potentiale for at udvikle elevernes matematiske ræsonnementskompetence når spillereglerne er automatiserede (Bright et al., 1983; McFeetors & Palfy, 2018; Bjarning et al., 2020). I et spil som Othello, hvor reglerne er enkle, vil automatiseringen ske forholdsvis hurtigt, hvilket åbner op for at eleverne begynder at ræsonnere over strategier der giver dem fordele i spillet (Berthold et al., 2020). Som en integreret del af Othello-aktiviteten kan læreren, og derefter eleverne, løbende ændre spillets præmisser. Dette kan fx gøres ved at ændre på det strategiske udgangspunkt. I Othello kan læreren fx opstille specifikke spilsituationer som eleverne skal starte deres spil ud fra. Ved at introducere forskellige spilsituationer motiveres eleverne til at undersøge og ræsonnere på nye måder. Dette kan bidrage til at de ikke kun er i stand til at anvende specifikke strategier i bestemte situationer, men at de også opnår forståelse for hvorfor strategierne virker (Houssart & Sams, 2008). På denne måde undgår man det imiterende aspekt hvor eleverne blot gentager og efterligner allerede fremsatte ræsonnementer (Lithner, 2008). Når Othellos præmisser ændres, kræver det samtidig at eleverne anvender "hvis … så"-formuleringen (Mason, 2002; Larsen & Lindhardt, 2019) i nye kontekster, hvilket yderligere fremmer deres "undersøgende dialog", forudsat at udfordringerne modtages positivt (Mercer & Wegerif, 1999).

Stil løbende opfølgende spørgsmål til elevernes begyndende ræsonnementer

I den sidste del af den tredelte struktur bør læreren igangsætte en fælles opsamling og diskussion som fokuserer på elevernes begyndende matematiske ræsonnementer (Blomhøj, 2017). Her kan læreren undersøge hvordan elevernes strategier ligner hinanden, og hvordan de adskiller sig. Under denne diskussion er det vigtigt at læreren hjælper eleverne med at forstå deres ansvar for at bidrage til et klassemiljø der fremmer ræsonnement og læring. For at opmuntre til et sådant klassemiljø kan læreren ifølge Whitenack & Yackel (2002) motivere eleverne til at dele deres strategier ved at spørge ind til deres tankeprocesser. Derefter kan læreren inddrage andre elever i diskussionen ved at spørge om de præsenterede forklaringer og begrundelser giver mening for dem.

Som vi har beskrevet, kan læreren tage udgangspunkt i de fire designprincipper når hun skal tilrettelægge en Othello-baseret matematikundervisning som har til formål at fremme ræsonnementskompetence ved at motivere eleverne til at indgå i "undersøgende dialog". Samtidig kan hun organisere undervisningen efter den tredelte struktur med henblik på at sætte en ramme for hvordan de fire designprincipper kan integreres i undervisningen.

Resultaterne fra analysen af interventionen

Elevernes overvejelser vedrørende et enkelt træk i form af "et logisk gyldigt argument"

Under interventionen fandt vi at eleverne var i stand til at fremsætte et korrekt og meningsfuldt matematisk ræsonnement bestående af "et logisk gyldigt argument" for en påstand, hvilket er karakteristisk for interaktionstype 3 (Díez-Palomar & Olivé, 2015). Vi observerede at de fremsatte påstande blev forklaret og begrundet med et simpelt, men logisk gyldigt argument der tog højde for de præmisser der udgøres af Othellos simple regelsæt, og som indeholdt den førnævnte "hvis … så"-formulering. Særligt i begyndelsen af interventionen fremsatte eleverne påstande som gik på at placeringen af en brik ville resultere i muligheden for at vende et vist antal af modspillernes brikker. Som oftest maksimalt tre brikker. De simple argumenter for denne påstand gik ofte på at eleverne kunne tælle de brikker som de efter spillets regler havde mulighed for at vende, ved at pege med fingeren på brættet i én eller flere retninger. Denne gestikulering foregik samtidig med at eleverne fremsatte ræsonnementer der var enslydende med følgende påstand:

> "Hvis vi lægger en brik dér, så kan vi vende de her tre."

Ligeledes fremgik det af elevernes besvarelser af arbejdsarkene at de kunne fremsætte ræsonnementer i form at "et logisk gyldigt argument". Fx svarede et spillepar følgende på spørgsmålet "Hvilken farve mener I står bedst placeret fra spillets start? Hvorfor?":

> "Hvid står bedst fordi de kan få et hjørne."

Langt de fleste fremsatte ræsonnementer handlede om kommende træk, og de var derfor et udtryk for en kortsigtet strategi. At en stor del af eleverne kun var i stand til at tænke ét træk frem, kan skyldes at de grundet den relativt korte spilleperiode ikke havde nok erfaringer med spillet til selv at ræsonnere sig frem til en langsigtet og vindende strategi.

Elevernes overvejelser vedrørende en langsigtet strategi i form af "en kæde af informelle argumenter"

I begyndelsen af interventionen fremsatte eleverne hovedsageligt enkle, men logisk gyldige argumenter, mens de senere i forløbet blev i stand til at formulere kæder af informelle ræsonnementer som ligeledes tilhørte interaktionstype 3 (Díez-Palomar & Olivé, 2015). Særligt i den anden og tredje dobbeltlektion observerede vi en fremgang i elevernes ræsonneringsproces hvor de nu formulerede en mere langsigtet strategi ved at tage udgangspunkt i de logisk gyldige argumenter som de havde anvendt i interventionens begyndelse. Som resultat heraf lykkedes eleverne med at forudsige op til tre på hinanden følgende træk. De langsigtede strategier kom til udtryk ved at eleverne fremsatte korrekte og meningsfulde matematiske ræsonnementer i form af en "kæde af informelle argumenter", hvor ét argument byggede på det foregående. Eleverne fremsatte bl.a. følgende ræsonnementer:

> "[...] hvis vi havde lagt den der, så forsvandt vores hvide. Så kunne I have taget vores hvide, og så kunne vi ikke lægge der."

I det pågældende udsagn konkluderede eleven indledningsvis at modspillerne, der spillede sort, ville have haft mulighed for at vende en hvid brik hvis hvid havde placeret en brik i et givent felt. Mere præcist konkluderede hun at modspillerne havde mulighed for at udføre et fordelagtigt træk, hvilket følger af den præmis der udgøres af spillets regler og den placering brikkerne havde på brættet i forvejen. Som følge af konklusionen, der lød på at modspillerne kunne have haft mulighed for at vende en hvid, fortsatte hun sin argumentation, idet denne konklusion blev et tredje udsagn der ledte til at eleven endeligt kunne konkludere at hvids fordelagtige træk kunne havde været forhindret.

Elevernes tilbøjelighed til at følge og bedømme hinandens ræsonnementer

Under interventionen oplevede vi ligeledes at eleverne var i stand til at følge og bedømme hinandens ræsonnementer. Et spillepar havde fx en korrespondance hvor de diskuterede deres kommende træk. Udgangspunktet for korrespondancen var den ene spillers ræsonnement som gik på at de kunne vende to brikker hvis de placerede en brik i et givent felt. Spillemakkeren fulgte dette ræsonnement og påpegede at dette træk ville give modstanderen en fordel i spillet:

> E_1: "Jo, vi kan lægge den der for at få de to."
> E_2: "Hvor? Den der?"
> E_1: "Ja, for at få de der to."
> E_2: "Nej, det skal vi ikke, for så får vi den der, og så kan de tage allesammen der, og så får de også dem der. Vi kan lægge den der, så får vi de der to tilbage. Skal vi gøre det?"
> E_1: "Ja."

Ligeledes viser korrespondancen at eleverne var i stand til at stille "opklarende spørgsmål" (Olson, 2007) og forholde sig konstruktivt til disse, hvilket ifølge Mercer & Wegerif (1999) er karakteristisk for "undersøgende dialog". Mere præcist stillede den ene elev et opklarende spørgsmål om hvor spillemakkeren mente et fordelagtigt træk kunne foretages. Herefter forholdt eleven sig kritisk idet hun argumenterede for hvorfor dette træk ikke gav spilleparret en fordel.

Med udgangspunkt i de iagttagelser som vi har beskrevet i de tre foregående afsnit, kan det siges at vi gennem anvendelse af designprincipperne i vores undervisning havde held med at fremme begge aspekter af et matematisk ræsonnement. Det strukturelle aspekt optrådte i form af logisk gyldige argumenter eller en kæde af informelle argumenter, og det processuelle aspekt optrådte i form af forklaringer og begrundelser for de fremsatte påstande. Dette kom til udtryk ved at eleverne var i stand til at indgå i “undersøgende dialog”, som falder under kategorien interaktionstype 3 (Díez-Palomar & Olivé, 2015). Det undersøgende aspekt kom til udtryk ved at eleverne fremsatte påstande og argumenterede for disse ved at forklare og begrunde med udgangspunkt i spillets præmisser og samtidig verificerede hinandens ræsonnementer gennem en indbyrdes interaktionsproces. Herudover kom det undersøgende aspekt til udtryk ved at eleverne stillede opklarende spørgsmål, lyttede til og satte sig ind i hinandens ræsonnementer og som resultat af et mere fordelagtigt fremført argument omformulerede deres ræsonnementer.

Elevernes anvendelse af interaktionstype 1 og 2

Selvom vi mener at eleverne under interventionen indgik i “undersøgende dialog”, er vi også opmærksomme på at de i en spilsituation vil fremsætte påstande uden at argumentere. Fx fremgår det af vores data at mængden af påstande som eleverne fremsatte uden argumentation, og som hører under interaktionstype 1 (Díez-Palomar & Olivé, 2015), ikke ændrede sig nævneværdigt over de seks spillerunder. Mere konkret finder vi bl.a. følgende uafhængige påstande i vores data:

> “Sort har en masse fordele.”
> “Vi tror at hvid vinder.”

Ligeledes ændrede mængden af “magt-ræsonnementer”, hvilket hører under interaktionstype 2 (Díez-Palomar & Olivé, 2015), sig ikke særligt over de seks spillerunder. Fx finder vi følgende samtale i vores data:

> E_1: “Ja, vi er så kloge, folkens.”
> E_2: “Det er derfor vi fører.”

Diskussion

Elevernes brug af ubegrundede påstande og magt-ræsonnementer

En central udfordring ved vores undervisningsdesign er elevernes anvendelse af interaktionstype 1 og 2 under Othello-aktiviteten. Når eleverne fortsat benyttede disse interaktionstyper, kan det ifølge Jensen (2022) skyldes at deres engagement ikke kun var rettet mod at udtænke og fremsætte ræsonnementer i form af strategier, men også mod at deltage i spillet som en form for social interaktion (Goffman, 1961). De ubegrundede påstande og “magt-ræsonnementer” kan således være et udtryk for at eleverne også var optaget af spillets sociale og underholdningsmæssige aspekter og ikke kun optaget af at følge lærerens instruktioner for at forbedre deres vinderchancer. Da elever opfatter spil som både en form for socialt samvær og i undervisningssituationen også et matematisk værktøj, kan læreren ikke forvente at elevernes interaktioner alene vil kunne kategoriseres som type 3. Derimod vil det være et åbent spørgsmål hvordan balancen mellem de tre interaktionstyper vil være. Her bør læreren især være opmærksom på hvornår eleverne på den ene side sigter mod at indgå i "undersøgende dialog" og forbedre deres vinderstrategier og på den anden side sigter mod at indgå i sociale praksisser omkring spillet.

En udfordring der vedrører dette, blev tydelig i undervisningens tredje fase. Her stillede læreren et opklarende spørgsmål som gik på hvorvidt eleverne havde været i stand til at gøre sig overvejelser om mere end blot deres eget kommende træk, hvortil en elev svarede:

> "Vi brugte kodeord så de andre ikke hørte hvad vi tænkte. Salat, remoulade og sådan."

Denne påstand illustrerer hvordan eleverne ikke altid ville dele deres ræsonnementer i form af strategier. Ifølge Jensen (2022) kan dette forklares ved at læreren og eleverne oplevede spilsituationen fra forskellige perspektiver. Mens læreren sigtede mod at fremme matematiske diskussioner hvor ræsonnementer blev udvekslet, udviklet og overvejet i hele klassen, prioriterede eleverne at hemmeligholde fordelagtige strategier for deres modstandere

En kompleks sammensætning af designprincipper

En anden central udfordring ved vores design er den komplekse sammenfletning af designprincipperne (Hanghøj et al., 2022) som betyder at det er svært for os at fastslå præcis hvordan kombinationen af principperne fungerede i forhold til at opmuntre eleverne til at producere ræsonnementer. Fx præsenterede arbejdsarkene eleverne for en ændring af spillets præmis i form af forskellige spilopstillinger samtidig med at arket blev anvendt i en spillerunde hvor eleverne spillede ét par mod et andet. Herudover inkluderede flere af arbejdsarkene "hvis … så"-formuleringen. Ud fra vores data kan vi se at eleverne kommunikerede mere når de spillede ét par mod et andet par, sammenlignet med når de spillede én mod én. Samtidig kan vi se at arbejdsarkene opmuntrede eleverne til at diskutere forskellige strategier ved at anvende "hvis … så" i deres argumentation. Hvilke af de tre designprincipper der virkede mest i forhold til at opmuntre eleverne til "undersøgende dialog", er dog svært at vurdere. I den afsluttende fase af hver dobbeltlektion gennemgik læreren arbejdsarkene i plenum med fokus på at stille opfølgende spørgsmål til elevernes begyndende ræsonnementer. Af vores data fremgår det at lærerens opfølgende spørgsmål til arbejdsarkene ofte resulterede i at eleverne forstærkede deres argumenter. Dog er det vanskeligt at pege på om det var arbejdsarkene der ansporede eleverne til at ræsonnere om nyttige Othello-strategier, eller om det var de opfølgende spørgsmål der virkede mest i forhold til at opmuntre til "undersøgende dialog". Som beskrevet er det svært at bedømme hvert designprincip for sig selv når de vikles ind i hinanden. Vi foreslår derfor at det er den samlede effekt af principperne der bidrager positivt til udviklingen af elevernes matematiske ræsonnementskompetence.

Matematiske ræsonnementer eller ej?

Når læreren vælger at lade kombinatoriske strategispil træde i forgrunden for en ræsonnementsfremmende undervisning, er det nærliggende at spørge om de ræsonnementer eleverne fremsætter, er matematiske eller ej. Vores perspektiv på dette spørgsmål handler om hvilken definition af et matematisk ræsonnement man vælger at tage udgangspunkt i. Inspireret af McFeetors & Palfy (2018) og med udgangspunkt i både Jeannotte & Kierans (2017) definition af et matematisk ræsonnement – som lyder "as a process of communication with others or with oneself that allows for inferring mathematical utterances from other mathematical utterances" – og delMas' (2004) beskrivelse af et matematisk ræsonnement, som indebærer "[...] reasoning about patterns", vil vi i det følgende afsnit diskutere hvorvidt der forekommer matematiske ræsonnementer når eleverne kommunikerer under interventionen.

For det første brugte eleverne i interventionen matematiske aspekter i deres argumenter, hvilket kom til udtryk ved deres overvejelser over de strategier de undervejs blev introduceret for. Vi opdagede at eleverne anvendte matematiske aspekter i deres argumenter på to forskellige måder: dels ved at anvende matematisk viden de allerede havde tilegnet sig tidligere i deres skoleforløb, og dels ved at stifte bekendtskab med matematiske aspekter de kun lejlighedsvis var stødt på i undervisningen. Fx brugte eleverne deres allerede tilegnede viden om simpel aritmetik ved at tælle antallet af brikker de kunne vende, samt antallet af brikker de forestillede sig at modstanderen kunne vende. Et eksempel herpå er denne dialog mellem elev og lærer:

> E: "Hvis du får alle fire hjørner, så er du sikret 28 gratis brikker."
> L: "Hvorfor?"
> E: "Fordi de ikke kan tage dine sidebrikker ud. Så lige meget hvad så bliver de (red. brikkerne) derude, og så kan du også begynde at tage dem i midten."

Eleverne anvendte også deres viden om symmetriakser da de arbejdede med arbejdsarkene, idet en af spillets strategier går på at det giver en fordel i spillet at placere brikker symmetrisk omkring midten med to brikker på hver side. Dernæst indgik eleverne i en kommunikationsproces i en engagerende kontekst hvor de tilbød hinanden argumenter der bl.a. indeholdt de nævnte matematiske aspekter. At der er tale om en kommunikationsproces, kan begrundes med at eleverne under interventionen opnåede en følelse af kontinuerlig progression og sammenhæng mellem deres fremsatte ræsonnementer i form af strategier, hvilket netop kom til udtryk ved at eleverne lod ét argument udspringe fra et andet. I forlængelse heraf kan det siges at de strategier eleverne efterhånden blev bekendte med, udgjorde en form for abstraktion over de geometriske mønstre de gradvist lærte at genkende gennem spilprocessen, og som kom til udtryk ved brikkernes skiftende placeringer på brættet. I overensstemmelse med Jeannotte & Kieran (2017) samt delMas' (2004) definitioner og med Stylianides' (2007) "intellectual-honesty principle" in mente mener vi således at vi er lykkedes med at motivere mellemtrinselever til at deltage i en kommunikationsproces hvor de præsenterer informelle argumenter for hinanden på et niveau der er svarende til deres faglige kunnen. De fremførte argumenter, som er karakteriseret ved en logisk progression, indeholder matematiske aspekter og er baseret på geometriske mønstre. Rosholm et al. (2017) antyder at ræsonnementsfærdigheder der er tilegnet gennem spil, kan overføres til andre matematiske områder. Dette kunne være oplagt at undersøge i en ny intervention for at forstå hvordan forløbet kan integreres i undervisningens progression.

Konklusion

Denne artikel er udarbejdet med henblik på at give matematikdidaktikere og -undervisere et praksisorienteret perspektiv på hvordan kompetencemålsstyret matematikundervisning kan organiseres. Vi finder at tilrettelæggelse og implementering af undervisning der sigter mod at styrke elevers matematiske ræsonnementskompetence, ofte er forbundet med udfordringer for underviseren. Det viser sig dog at inddragelsen af strategiske og kombinatoriske brætspil som Othello, kombineret med et velovervejet undervisningsdesign som det vi har præsenteret her, kan lægge nogle betydningsfulde trædesten for elevernes arbejde med ræsonnementskompetencen. Specifikt har vores undersøgelse vist at anvendelsen af fire designprincipper i en undervisningskontekst som ved brug af Othello fokuserer på at fremme elevernes matematiske ræsonnementskompetence, opmuntrer elever til at indgå i "undersøgende dialog". Dertil viser vores undersøgelse at elevers deltagelse i "undersøgende dialog" under Othello-baserede aktiviteter potentielt kan skabe en platform der giver dem mulighed for at øve sig i og fremsætte matematiske ræsonnementer af både processuel og strukturel karakter, hvilket igen kan bidrage til udviklingen af deres matematiske ræsonnementskompetence.

Perspektivering og begrænsninger

Vi forestiller os at de præsenterede designprincipper har potentialet til at blive anvendt mere generelt i en undervisning der har til hensigt at udvikle mellemtrinselevers matematiske ræsonnementskompetence gennem brætspil – særligt hvis de anvendte spil besidder samme karakteristiske egenskaber som Othello. Vores undersøgelse rækker dog ikke til at vise en bred generaliserbarhed. Hvis vi skal kunne generalisere bredere, vil det være nærliggende at undersøge designprincippernes virkning i en undervisning der centreres omkring et andet kombinatorisk strategispil.

Referencer

Berkman, R.M. (2004). The Chess and Mathematics Connection: More Than Just a Game. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(5), 246-250. https://doi.org/10.5951/MTMS.9.5.0246

Berthold, V., Aagaard-Hansen, J., Gadegaard, I. & Bjarning, M. (2020). Brug af spil i matematikundervisningen 2. *Matematik, 48*(5), 28-33.

Bjarning, M., Gadegaard, I., Berthold, V. & Aagaard-Hansen, J. (2020). Brug af spil i matematikundervisningen 1 – brætspillet, Othello, som praksiseksempel. *Matematik, 48*(4), 22-26.

Blomhøj, M. (2017). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund.

Boell, S.K. & Cecez-Kecmanovic, D. (2014). A Hermeneutic Approach for Conducting Literature Reviews and Literature Searches. *Communications of the Association for Information Systems, 34*(1), 257-286. https://doi.org/10.17705/1CAIS.03412

Bright, G.W., Harvey, J.G & Wheeler, M.M. (1983). Use of a Game to Instruct on Logical Reasoning. *School Science and Mathematics, 83*(5), 396-405. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1983.tb15526.x

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Børne- og Undervisningsministeriet. (2019). *Matematik – Fælles Mål*. Børne- og Undervisningsministeriet.

Dansk Othello Forbund. (2018). *Greve Othello Forening*. http://www.othello.dk/index.php/klubber/8-greve-othello-forening

Dawkins, P.C. & Karunakaran, S.S. (2016). Why Research on Proof-Oriented Mathematical Behavior Should Attend to the Role of Particular Mathematical Content. *The Journal of Mathematical Behavior, 44*, 65-75. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.10.003

Day, L. (2014). Australian Curriculum Linked Lessons: Reasoning in Number and Algebra. *Australian Primary Mathematics Classroom, 19*(3), 16-19. https://researchonline.nd.edu.au/edu_article/151/

delMas, R.C. (2004). A Comparison of Mathematical and Statistical Reasoning. I: D. Ben-Zvi & J. Garfield (red.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (s. 79-96). Kluwer Academic Publishers.

Díez-Palomar, J. & Olivé, J.C. (2015). Using Dialogic Talk to Teach Mathematics: The Case of Interactive Groups. *ZDM, 47*(7), 1299-1312. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0728-x

Ferrini-Mundy, J. (2000). Principles and Standards for School Mathematics: A Guide for Mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society, 47*(8), 868-876. https://www.ams.org/notices/200008/comm-ferrini.pdf

Fraenkel, A.S. (2012). Combinatorial Games: Selected Bibliography with a Succinct Gourmet Introduction. *The Electronic Journal of Combinatorics*. https://www.wisdom.weizmann.ac.il/~fraenkel/Papers/gb.pdf

Goffman, E. (1961). *Encounters: Two Studies in the Sociology of Interaction*. Ravenio Books.

Hanghøj, T., Händel, V.D., Duedahl, T.V. & Gundersen, P.B. (2022). Exploring the Messiness of Design Principles in Design-Based Research. *Nordic Journal of Digital Literacy, 17*(4), 222-233. https://doi.org/10.18261/njdl.17.4.3

Hansen, T.I., Elf, N.F., Misfeldt, M., Gissel, S.T. & Lindhardt, B.K. (2020). *Kvalitet i dansk og matematik – et lodtrækningsforsøg med fokus på undersøgelsesorienteret dansk- og matematikundervisning*. https://laeremiddel.dk/wp-content/uploads/2020/01/Slutrapport-Kvalitet-i-dansk-og-matematik.pdf

Houssart, J. & Sams, C. (2008). Developing Mathematical Reasoning through Games of Strategy Played against the Computer. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 15*(2), 59-71. https://eric.ed.gov/?id=EJ837647

Højgaard, T. & Arnt, N.W. (2021). Facilitering af kompetenceorienteret matematikundervisning – erfaringer med kommunalt forankret, skolebaseret udvikling af lærerkompetencer. *MONA, 2021*(1), 50-68. https://tidsskrift.dk/mona/article/view/125072/171872

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A Conceptual Model of Mathematical Reasoning for School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Jensen, E.O. (2022). Brætspil i matematikundervisningen. I: S.S. Fougt, J. Bundsgaard, T. Hanghøj & M. Misfeldt (red.), *Håndbog i Scenariedidaktik* (s. 190-202). Aarhus Universitetsforlag.

Jensen, E.O. & Skott, C.K. (2022). How Can the Use of Digital Games in Mathematics Education Promote Students' Mathematical Reasoning? A Qualitative Systematic Review. *Digital Experiences in Mathematics Education, 8*(2), 183-212. https://doi.org/10.1007/s40751-022-00100-7

Larsen, D.M. (2019). *Developing Reasoning Competence in Inquiry-Based Mathematics Teaching*. Syddansk Universitetsforlag.

Larsen, D.M. & Lindhardt, B.K. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematikundervisningen på mellemtrinnet. *MONA, 2019*(1), 7-21. https://tidsskrift.dk/mona/article/view/112811/161536

Lindhart L., Ejdrup, F. & Skipper-Jørgensen, A. (2010). Ræsonnementer i folkeskolens matematikundervisning – karakterisering, initiering, identificering og vurdering af ræsonnementskompetencen. *MONA, 2010*(4), 7-24. https://tidsskrift.dk/mona/article/download/36139/37487/81638

Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley.

Mason, J. (2002). Questions about Mathematical Reasoning and Proof in Schools. I: Abramsky, J. (red.), *Reasoning, Explanation and Proof in School Mathematics and Their Place in the Intended Curriculum*. QCA Publications.

McFeetors, P.J. & Palfy, K. (2018). Educative Experiences in a Games Context: Supporting Emerging Reasoning in Elementary School Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 50*, 103-125. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.003

Mechner, F. (2010). Chess as a Behavioral Model for Cognitive Skill Research: Review of Blindfold Chess by Eliot Hearst and John Knott. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 94*(3), 373-386. https://doi.org/10.1901/jeab.2010.94-373

Mercer, N. & Wegerif, R. (1999). Children's Talk and the Development of Reasoning in the Classroom. *British Educational Research Journal, 25*(1), 95-111. https://doi.org/10.1080/0141192990250107

Mosimege, M.D. (1998). Culture, Games and Mathematics Education: An Exploration Based on String Games. I: A. Olivier & K. Newstead (red.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 286-293). University of Stellenbosch.

NGA Center & CCSSO. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. NGA Center & CCSSO (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers).

Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.

Olson, J.C. (2007). Developing Students' Mathematical Reasoning through Games. *Teaching Children Mathematics, 13*(9), 464-471. https://doi.org/10.5951/TCM.13.9.0464

Rosholm, M., Mikkelsen, M. & Gumede, K. (2017). Your Move: The Effect of Chess on Mathematics Test Scores. *PLOS One, 12*(5), 1-18. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0177257

Sala, G. & Gobet, F. (2015). Do the Benefits of Chess Instruction Transfer to Academic and Cognitive Skills? A Meta-Analysis. *Educational Research Review, 18*, 46-57. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2016.02.002

Schoenfeld, A.H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1-38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Stylianides, A.J. (2007). The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 1-20. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0

Stylianides, G.J. & Stylianides, A.J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(2), 103-133. https://doi.org/10.1080/10986060701854425

Whitenack, J. & Yackel, E. (2002). Making Mathematical Arguments in the Primary Grades: The Importance of Explaining and Justifying Ideas. *Teaching Children Mathematics, 8*(9), 524-527. https://doi.org/10.5951/TCM.8.9.0524

English abstract

This article investigates the integration of strategic and combinatorial board games, such as Othello, into mathematics education at the intermediate level, utilizing four design principles with the aim of strengthening students' mathematical reasoning skills. The article focuses on an intervention in a 5th-grade class and describes how students' engagement in 'exploratory talk' during Othello-related activities can create a platform that enables them to practice formulating mathematical reasoning of both procedural and structural nature. The article concludes that such activities can positively contribute to the development of students' reasoning competencies.

Hvordan bruger gymnasiets matematiklærere deres uddannelse?


Carl Winsløw, Københavns Universitet


Katrine Fredensborg Dedenroth, Hvidovre Gymnasium & HF

Abstract: *I denne artikel undersøger vi hvordan danske gymnasielærere i matematik ser på deres universitetsuddannelse, særligt brugbarheden af dennes matematiske indhold i forhold til undervisning i et konkret emne, nemlig differentialregning. Studiet er baseret på en spørgeskemaundersøgelse om dette emne blandt lærere som har taget pædagogikum i perioden 2018-2022. Det overordnede resultat er at ca. 1/4 af lærerne angiver at bruge viden fra universitetet i forbindelse med undervisningen i høj eller meget høj grad, mens godt halvdelen angiver nogen grad af brug. Adspurgt om konkrete eksempler på brug af universitetsmatematik i forbindelse med deres undervisning i differentialregning giver ca. 1/3 mere generiske svar, mens godt og vel 1/3 peger på konkrete eksempler; ca. 1/4 angiver at de slet ikke oplever en sådan brug.*

Introduktion

Fastansættelse som matematiklærer i gymnasiet kræver en kandidatuddannelse som opfylder de faglige mindstekrav i matematik (Uddannelses- og Forskningsministeriet, 2018). Det sidste betyder i praksis at uddannelsen indeholder studieaktiviteter i et omfang af mindst 90 ECTS-point inden for emneområderne differential- og integralregning, analyse, geometri, lineær og abstrakt algebra, sandsynlighedsteori og statistik, diskret matematik og "breddeemner" som matematikhistorie, videnskabsteori og didaktik. De matematikfaglige kurser er *generiske*, dvs. de er ikke specielt indrettet til kommende gymnasielærere og tages af mange studerende som ikke sigter på denne profession. Den praktiske indføring i lærergerningen kommer efter endt universitetsstudie, i pædagogikum, hvor den nye lærer vejledes af en eller flere erfarne lærere; der indgår også gymnasial pædagogik og fagdidaktik.

I mange lande – fx Tyskland, Frankrig, Sverige og Norge – er denne model inden for de seneste årtier afløst af mere integrerede uddannelser hvor de generiske matematikkurser er suppleret med eller helt erstattet af professionsrettede kurser i matematik – og altså designet specifikt til kommende lærere. I Danmark findes sådanne kurser stort set ikke.

Vi har bl.a. derfor valgt at undersøge hvordan danske gymnasielærere oplever at deres matematiske studie bruges i faktisk undervisning. Den internationale baggrund og forskningslitteratur omtales i næste afsnit. Undersøgelsens spørgsmål og metode beskrives nærmere i det efterfølgende afsnit; resultaterne præsenteres og diskuteres i artiklens to sidste afsnit.

Baggrund

Spørgsmålet om hvordan man bedst indretter den matematikfaglige forberedelse af matematiklærere, er langtfra nyt. Der findes således en meget omfattende forskningslitteratur som angriber spørgsmålet fra forskellige vinkler. Man kan faktisk anse dette spørgsmål som et af de mest grundlæggende for udviklingen af matematikkens didaktik, der historisk og institutionelt opstod med henblik på at etablere en videnskabelig basis for matematiklæreruddannelse, særligt på gymnasialt niveau.

Den tyske matematiker Felix Klein (1849-1925) arbejdede gennem hele sin karriere med at udvikle både den matematiske universitetsuddannelse i almindelighed og den specifikke forberedelse af kommende matematiklærere i særdeleshed (Weigand et al., 2019). Et grundlæggende tema, som han allerede formulerede i sin tiltrædelsesforelæsning (Rowe, 1985), er at læreren skal anskue den elementære matematik "fra et højere standpunkt" – altså ikke blot have videregående matematisk viden, men også bruge den til at udvikle sin undervisning. Men Klein indså også at det ikke sker af sig selv. I et ofte citeret forord til trebindsværket *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Elementær matematik fra det højere standpunkt) fra 1908 skriver han:

> "Når [lærerkandidaten], efter endt studie, bliver lærer, forventes han pludselig at undervise i den traditionelle elementære matematik som man gør det i skolen; og da han næppe, uden hjælp, ser nogen forbindelse mellem denne opgave og hans universitetsmatematik, falder han snart tilbage på den veletablerede måde at undervise på, og hans universitetsstudier forbliver et mere eller mindre behageligt minde som ingen indflydelse har på hans undervisning." (Klein, 2016, s. 1, oversat af forfatteren)

Hovedindholdet i Kleins trebindsværk er dog ikke den slags generelle udsagn, men derimod en universitetsmatematisk perspektivering af emner fra skolematematikken – fra aritmetik over differential- og integralregning og geometri til hvad vi i dag kalder anvendt matematik. Klein fremhæver hovedtræk af emnernes historie, struktur, intuitive betydning, anvendelser og indbyrdes forbindelser som det også tænkes at de fremtidige lærere kan formidle til eleverne fra det "højere standpunkt".

Kleins bøger udgør en historisk, men fortsat indflydelsesrig model for hvad vi kalder den stofdidaktiske tyske metode: med henblik på undervisning at analysere og strukturere den elementære matematiks centrale idéer, herunder hvad man i dag betegner som matematiske *Grundvorstellungen* ("grundforestillinger"). Stofdidaktiske kurser udgør også aktuelt et centralt element i tysk matematiklæreruddannelse – med titler som *Didaktik der Analysis*. Sådanne kurser er professionsrettede matematikkurser som behandler skolematematiske emnekredse på basis af et videregående studie af den videregående matematik (se fx Buchbinder, 2017).

Ligesom Kleins øvrige reformforslag – fx indførelsen af differential- og integralregning som centralt stof i den gymnasiale matematik – har også hans idéer om læreruddannelse på forskellig måde fået indflydelse i andre lande (se fx Weigand et al., 2019, del IV). Helt frem til 1960 indeholdt danske universiteters "skoleembedseksamen" i matematik således elementer af stofdidaktik i bred forstand (Madsen, 2008, s. 792). Denne professionsrettede matematik forsvandt med reformerne omkring 1960, som bl.a. sigtede på i højere grad at basere undervisningen i matematik og naturfag på videnskabsfagenes seneste udvikling – ikke blot på universitetet, men også i gymnasieskolen.

En anden tendens trak i modsat retning. I hele den industrialiserede verden har den "videregående skole" (gymnasiet) i det 20. århundrede udviklet sig fra en elitær forberedelse af eksklusive universitetsstudier til en uddannelse som tiltrækker en bred (ofte den største) del af en ungdomsårgang. Det førte i 1970'erne til en fornyet opmærksomhed på afstanden mellem de moderne videnskabsfag og hvad det er muligt og ønskeligt at formidle i skolen og gymnasiet (fx Freudenthal, 1973). Nye reformer fulgte mange steder også af gymnasielærernes faglige uddannelse.

Reformer og udfordringer i læreruddannelserne har også vist behovet for viden på området. Allerede mod slutningen af 60'erne kom de første af en lang række af amerikanske *effektstudier*. Her forsøgte man fx at undersøge korrelationen mellem omfanget af en lærers studier i abstrakt algebra og hvor godt lærerens elever klarer sig i elementær algebra. Med sådanne primitive mål (fx antallet af videregående kurser og elevernes resultater i en test) viste det sig, til manges overraskelse, at der ikke var nogen signifikant korrelation (for en senere oversigt over både de første og senere opfølgende studier, se Eisenberg, 1977). Blandt de nuancer som tidligt blev bragt op, var at alle lærerne i de tidlige studier faktisk havde flere års videregående matematikstudier bag sig; man kunne altså tænke sig at et vist minimum af sådanne studier faktisk gør en positiv forskel. Et ofte citeret studie af Monk (1994) viste da også at når vi sammenligner lærere med ca. et års videregående studier af generel matematik med lærere der ikke har sådanne forudsætninger, så kan man faktisk finde en signifikant forskel mellem elevernes præstationer. Men om denne forskel skyldes lærernes uddannelser, er stadig svært at sige: I mange effektstudier finder man fx en klar tendens til at elever hvis lærere har mere omfattende uddannelse, også har mere privilegeret social baggrund, går på skoler som på forskellige måder har bedre forhold, osv. Det er derfor også værd at notere at adskillige kvalitative studier – måske mest berømt Liping Mas (1999) – har demonstreret at videregående universitetsstudier ikke i sig selv sikrer et solidt greb om mere elementære emner såsom brøkregning.

Senere har mere subtile mål for lærerens professionsrettede viden om matematik (*mathematical knowledge for teaching*, se fx Ball et al., 2008) gjort det muligt at gennemføre kvantitative effektstudier med signifikante og kontrollerede korrelationer mellem sådanne mål – og tilsvarende mål for elevernes resultater. Det gælder også nyere internationale studier som TEDS-M (se fx Schmidt et al., 2011; Tatto et al., 2018). Det vil her føre for vidt at give en nærmere gennemgang af denne type forskning; men det er klart at kvantitative effektstudier har tilført området nye og tankevækkende metoder og resultater.

Samtidig har der i de senere år været en fornyet interesse for kvalitative studier – fx af hvordan og i hvilket omfang universitetsstuderende kan gøres i stand til at mobilisere universitetsmatematisk viden når de skal løse udfordrende opgaver om gymnasial matematik (fx Winsløw & Grønbæk, 2014; Wasserman et al., 2023), og af hvordan og i hvilket omfang lærerne selv oplever at de bruger deres videregående studie af generisk matematik når de underviser (fx Zazkis & Leikin, 2010; Even, 2011). Nærværende artikel tager det sidste synspunkt, idet vi spørger danske gymnasielærere der har taget pædagogikum inden for de seneste fem år.

Det kan bestemt diskuteres hvad "brug" af uddannelsesforudsætninger i en profession betyder, og hvordan den kan og bør undersøges (se fx Tatto, 2021, i forhold til læreruddannelse). Det er også klart at en professionsuddannelse i princippet skal være indrettet med henblik på fremtidig og ikke kun aktuel brug, og at nyuddannede matematiklærere ikke kan vide hvad de skal kunne undervise i om 20 år (og det kan jo ingen). Trods disse generelle indvendinger mod "brugerundersøgelser" af uddannelse kan man alligevel ikke afskrive relevansen af at undersøge hvordan professionens udøvere selv oplever brugen af deres uddannelse. Det gælder særligt i forbindelse med den profession der her spørges, givet den samfundsmæssige betydning af gymnasiets matematikundervisning og dens omfattende udfordringer (se fx Jessen et al., 2015). Man kan derfor snarest undre sig over at der ikke findes flere danske undersøgelser af hvordan universitetsuddannelserne bidrager til den gymnasiale matematikundervisning.

Spørgsmål og metode

Gymnasielærernes matematikbaggrund omfatter som nævnt overvejende generisk indhold fra universitær matematik. Som Zazkis og Leikin (2010, s. 279) skriver:

> "While undergraduate content requirements for secondary teachers exist almost everywhere, it has not been investigated *how* mathematical knowledge acquired at the undergraduate level—referred to here as AMK, 'advanced mathematical knowledge'—is manifested in teaching practice."

Vi noterer i parentes at "secondary teachers" refererer til en bredere gruppe af lærere end gymnasiets og også omfatter hvad vi i Danmark kender som 7.-9. klasse; så på dette punkt falder Danmark altså uden for "almost everywhere".

Zazkis og Leikins analyse af "how"-spørgsmålet er baseret på interviews og spørgeskemasvar fra 52 matematiklærere på "secondary" niveau som deltog i en række efteruddannelseskurser. Lærerne bliver både spurgt til i hvilket omfang de oplever at bruge videregående matematikviden i deres undervisning – det gør det store flertal – og de bliver bedt om at give konkrete eksempler på denne brug. Her er det markant at det store flertal af deltagerne hovedsageligt beskriver nytteværdien af den videregående matematik i generelle termer, ofte med henvisning til deres eget forhold til matematik som helhed (fx overblik, overskud og sikkerhed). Forfatterne konkluderer at det kan skyldes både at deltagernes konkrete brug ikke er fuldt bevidst, og at afstanden mellem indholdet i universitetsuddannelsen og den matematik lærerne underviser i, gør det vanskeligt for dem at udpege konkret brug. Det sidste kunne betyde at det er relativt underordnet præcis hvad forudsætningerne består af, og måske også at Kleins problem (mangel på reel brug) alligevel forekommer i et vist omfang.

I vores undersøgelse har vi villet se, dels om tilsvarende resultater genfindes i et mere omfattende og tilfældigt sample, dels om man ved enkle greb i spørgeteknik kan komme tættere på konkrete former for brug. Vi har derfor valgt at spørge til konkrete anvendelser i forbindelse med undervisning i et specifikt gymnasialt emne, nemlig differentialregning, hvor forbindelserne til universitære kurser i fx calculus og analyse kunne tænkes at være lettere at udpege. For at kunne håndtere et sample på flere hundrede deltagere fra hele landet valgte vi at stille vores spørgsmål via et spørgeskema som blev besvaret anonymt. Deltagerne fik dog lejlighed til at melde sig frivilligt til opfølgende og uddybende interviews som i sagens natur ikke kunne være anonyme; resultaterne herfra behandles ikke direkte i denne artikel, men har ikke desto mindre bidraget til at validere vores analyse af de anonyme besvarelser.

Spørgeskemaet indledtes med generelle spørgsmål vedr. uddannelsesinstitution, dimissionsår, antal års erfaring som gymnasielærer og om respondenten har hoved- eller sidefag i matematik. Derefter spurgte vi mere konkret til brugen af universitetsmatematik i gymnasieundervisning. De af deltagerne hvis uddannelse fandt sted på Københavns Universitet, fik også mulighed for at pege på bestemte kurser som (over en længere årrække) har været anbefalet dem som ønsker kompetence til at undervise i gymnasiet. Først derefter stillede vi to mere overordnede spørgsmål: "I hvilket omfang mener du sammenfattende at du bruger den viden du har opnået på universitetet, når du underviser i differentialregning i gymnasiet?" – og "Er der noget ved uddannelsen som gymnasielærer i matematik du mener burde være anderledes?"

Skemaet blev i efteråret 2023 sendt til personer som afsluttede pædagogikum i perioden 2018-2022 med fagdidaktisk kursus i matematik, som er obligatorisk for alle der underviser i dette fag. Det skete på basis af mailadresser fra Syddansk Universitet, som også stod for udsendelsen af skemaet i SurveyXact, og som efterfølgende tilsendte os rådata uden mailadresser på andre end dem der frivilligt meldte sig til interviews. Skemaet blev udsendt til i alt 338 personer hvoraf 103 besvarede alle lukkede spørgsmål. Herudover svarede 29 på nogle af de lukkede spørgsmål – hovedsageligt de indledende. Der er flere sandsynlige årsager til at kun ca. 30 % svarede. De anvendte mailadresser var dem som deltagerne opgav i forbindelse med pædagogikum, for nogles vedkommende altså for godt seks år siden; manglende svar kan således hænge sammen med jobskifte og andre grunde til at mailen ikke nåede modtageren. Det er også sandsynligt at en del lærere, midt i et travlt skoleår, har fundet det vanskeligt at finde tid til at besvare de hovedsageligt åbne spørgsmål fyldestgørende. Der er en oplagt risiko for skævheder i respondentgruppen: Deltagerne har næppe skiftet skole siden pædagogikum, og de kan have særlig stærk interesse eller særlig stærkt engagement i undersøgelsens emne. Blandt de 103 respondenter var der faktisk mange der gav ganske detaljerede og undertiden også lange svar på de åbne spørgsmål. Respondenternes engagement udtrykkes også ved at hele 35 meldte sig frivilligt til de opfølgende interviews.

Vi mener altså trods alt at data fra undersøgelsen udgør en rimelig basis for at belyse følgende spørgsmål:

- Hvordan beskriver gymnasiets matematiklærere deres brug af universitære matematikkurser i forbindelse med deres undervisning i differentialregning?
- Hvilket omfang angiver lærerne at denne brug har?
- Er der noget ved uddannelsen som lærerne mener burde være anderledes – og i givet fald hvad?

Det sidste spørgsmål er svært at stille neutralt. En enkelt lærer henvendte sig i forbindelse med undersøgelsen direkte til os med det synspunkt at undersøgelsens undertone skulle være at understøtte ændringsforslag. Det er dog kun det sidste spørgsmål der angår dette, og hovedparten af undersøgelsen drejer sig om at få mere information om de kvaliteter som den eksisterende danske model har, herunder om man ved at spørge specifikt til et centralt element af gymnasiestoffet kan få mere konkrete svar end i tilsvarende tidligere undersøgelser. Ved først at lade deltagerne reflektere over positive elementer af denne brug er der i hvert fald ikke tendentiøst lagt op til kritik. Man kan samtidig sige at når en del af lærerne beskriver brugen som overvejende generisk (som i den tidligere undersøgelse af Zazkis og Leikin (2010)) eller som relativt ubetydelig, så kunne det i et fremadrettet perspektiv anses som en forsømmelse ikke at stille brugerne af uddannelserne det nævnte sidste spørgsmål.

Resultater

Vi præsenterer i det følgende undersøgelsens hovedresultater. For at sammenfatte besvarelserne af de åbne spørgsmål har vi foretaget en kategorisering af svarene i hovedtyper som beskrives i gennemgangen, baseret på de definitioner som angives – svarene er altså kodet på basis af beskrivelserne af svarkategorierne.

Populationens sammensætning

Når vi ser på alle respondenter der har besvaret en del af spørgeskemaet, fordeler de sig som vist i tabel 1 på dimissionsår (det år hvor de afsluttede kandidatgraden).

Tabel 1. *Respondenternes dimissionsår.*

92-99	00-10	11-15	16-17	18-19	2020	2021	2022
6	9	22	24	30	15	10	8

At 37 respondenter har kandidatuddannelser fra før 2015, kan forklares med at de har fungeret som timelærere eller haft andre erhverv inden de fik uddannelsesstilling; 16 af disse har kun besvaret indledende spørgsmål. Blandt de 130 der har besvaret spørgsmålet om antal års undervisningserfaring, angiver ingen mere end 11 år, og kun 11 respondenter angiver mere end 8 års erfaring. Respondenterne er altså i langt overvejende grad relativt nyuddannede lærere der har undervist i 1-8 år.

Fordelingen af respondenter på tidligere studiested er vist i tabel 2.

Tabel 2. *Respondenternes studiesteder (universiteter).*

Aarhus	København	Syddansk	Aalborg	Roskilde	Andet
40	34	24	17	5	10

Blandt de 10 som angiver "andet", har 6 deres uddannelse fra Danmarks Tekniske Universitet, 2 har læst i udlandet, og 2 har suppleret en anden uddannelse ved et af de fem angivne universiteter.

Der er 51 som angiver at have hovedfag i matematik, 64 har sidefag, mens 15 har opnået undervisningskompetence på andre måder. Det vurderes at denne fordeling er nogenlunde repræsentativ for nyuddannede lærere i perioden (se fx Jessen et al., 2015, afsnit 5.2.1).

Brug af universitetsmatematik i forbindelse med undervisning i differentialregning

Et hovedspørgsmål i undersøgelsen var følgende: "Forklar med et konkret fagligt eksempel hvordan du bruger din matematikviden opnået på universitetet når du underviser i differentialregning." De fleste besvarer dette spørgsmål med få sætninger, men der er også en del længere redegørelser. I enkelte besvarelser indgår flere synspunkter, men alligevel en form for konklusion som kan henføres til flere af nedennævnte hovedkategorier:

1. *Formel* brug: Universitetsmatematikken bruges til at *formidle beviser og formelle begreber*, fx beviser baseret på "tretrinsreglen" eller forklaring af grænseværdibegrebet
2. *Eksempler*: Der bruges eksempler, anvendelser eller visualiseringer (fra universitetet) i forbindelse med fx differentialkvotient eller grænseværdi
3. *Historie*: Der nævnes mere eller mindre konkrete *historiske* perspektiver
4. *Generisk*: Der gives ikke konkrete eksempler, men henvises til *generisk udbytte*, fx overblik eller sikkerhed som er opnået på universitetet
5. *Ingen*: Det siges eksplicit at en sådan brug ikke forekommer, uden at der henvises til mere generisk brug.

En simpel optælling af besvarelsernes kategorier er vist i tabel 3.

Tabel 3. *Respondenternes faglige eksempler på brug, i brede kategorier.*

Formel brug	Eksempler	Historie	Generisk	Ingen	I alt
20	9	9	31	26	93

Hver af kategorierne dækker i sagens natur over interessante variationer i eksempler og personlige erfaringer. Kategorierne "formel" og "generisk" (brug) kan være svære at adskille, men hvis der henvises til konkrete beviser eller begreber fra differentialregning og tilhørende matematisk stof, bruges kategorien "formel", som fx i følgende besvarelser:

> "Jeg bruger bevisførelse og brækker det ned i stykker så det giver mening i forhold til sekant/tangent-beviset."

> "Når jeg underviser i kædereglen, bruger jeg tricket at lave en substitution og så skrive dy/dx = dy/du * du/dx. Ellers kan jeg ikke komme på nogle konkrete eksempler."

> "Kontinuitet og differentiabilitet af funktioner."

> "Konkret underviser jeg i partiel differentiering når jeg underviser i funktioner af to variable, hvilket jeg lærte på universitetet."

> "Jeg kan bruge mit generelle kendskab til (...) den generelle definition af differentiabilitet (for afbildninger mellem normerede vektorrum) til at finde den bedste udledning af tangentplanets ligning. I virkeligheden ligner grafen jo tangentplanet pr. definition af hvad det vil sige at en funktion af to variable er differentiabel i et punkt."

Derimod klassificeres mere generelle henvisninger til matematisk metode, herunder bevisførelse, som "generiske", fx:

> "Det bruger jeg når jeg gennemgår beviser. Her kan jeg uddybe bevisteknikker og skabe overblik."

> "Bruger jeg som sådan ikke da det jeg underviser i, også var pensum dengang jeg selv gik i gymnasium. Jeg benytter derimod mit faglige overskud til at kunne drage paralleller og se begrænsninger. Samt i den enkelte klasse at kunne bruge flere forskellige bevisformer, altså benytte den mest hensigtsmæssige i den givne sammenhæng."

I øvrigt er den store kategori "generisk" præget af mange forskellige, men ikke konkrete udtryk for at den videregående matematik faktisk betyder noget i undervisningen, fx:

> "Det er ikke så meget den konkrete viden fra differentialregning jeg bruger i min undervisning, men det ligger som et fagligt fundament der giver mig mulighed for at fokusere på det didaktiske aspekt."

> "Jeg har mere baggrundsviden, flere anvendelseseksempler i baghånden, og jeg kender flere typer definitioner og ved mere om matematikkens opbygning som også formidles – i hvert fald på A-niveau."

> "Anvender det til at hæve niveauet og give udfordringer til de dygtige elever når de skal ud over pensum og udfordres. Anvendes også når elever stiller forskellige spørgsmål."

Disse og andre udsagn ligner meget dem som blev fundet af Zazkis og Leikin (2010), selvom det generiske perspektiv – formentlig pga. spørgsmålets udformning – er langt mindre dominerende end i deres undersøgelse.

De to mindste kategorier, "eksempler" og "historie", er også interessante, sidstnævnte af den grund at der i de faglige mindstekrav indgår (typisk et enkelt) kursus i matematikkens historie, hvilket langtfra altid er tilfældet i udlandet. Henvisningen til det historiske perspektiv er dog ikke altid så konkret:

> "Historiske udvikling og oprindelsens historie."

> "Jeg anvender min viden om Newton og Leibniz til at tale om notation."

> "Jeg bruger den historiske matematik til at forklare hvordan differentialregning startede med infinitesimaler, hvordan man gik fra dette da man fandt at disse ikke passer ind i de reelle tal og man sideløbende bruger grænseværdier til at beskrive det samme. Dernæst indfører jeg de hyperreelle tal og viser sideløbende med grænseværdier hvordan beviserne og teorien kan fremkomme ved hjælp af grænseværdier og infinitesimaler. De fleste synes den infinitesimale tilgang er nemmere at forstå, da grænseværdier er en besværlig størrelse at arbejde med for gymnasieelever."

Konkrete eksempler og anvendelser nævnes ligeledes af nogle som eksempler på brug:

> "Jeg plejer at starte forløbet om differentialregning med en praktisk optimeringsopgave hvor eleverne skal prøve at optimere areal og omkreds af nogle geometriske figurer (selvfølgelig uden at nævne begrebet optimering). Øvelsen lærte jeg på didaktikkurset på mat.-studiet på KU."

> "Eksemplificeringer af hvordan vendetangenter kan benyttes til at bestemme ækvivalenspunkter under titrering."

Endelig er der den ret store kategori af svar som udtrykker at respondenten ikke kan besvare spørgsmålet; disse er ofte korte (fx "Pas"), men i nogle tilfælde mere uddybende:

> "Det gør jeg ikke. Eksemplerne fra universitetet er så esoteriske og abstrakte at de ikke kan bruges på gymnasiet."

> "(...) Universitetsmatematikken bygger på en masse bevisførelse og udenadslæren iht. at kunne bevise sætninger, og meget lidt om at bruge matematikken på konkrete eksempler – hvilket man jo gør på gymnasialt niveau. Jeg gik fra mit matematikstudie og syntes at jeg havde lært nul som kunne anvendes konkret i gymnasiet. Hverken fagligt eller pædagogisk. Den matematik jeg underviser i, er hvad jeg selv kan huske fra gymnasietiden (...) og hvad jeg genopfrisker fra lærebøgerne – ikke fra universitetet."

> "(...) Det er ikke så meget et spørgsmål om lærerens tilegnede viden fra uni, men snarere om pædagogik."

Det er naturligvis bekymrende at et stort mindretal af respondenterne direkte tager afstand fra brugbarheden af deres matematiske baggrund, eller i hvert fald synes at give Klein (2016, s. 1) ret i at en sådan brugbarhed ikke kommer af sig selv.

Respondenterne blev også stillet et opfølgende spørgsmål: "Forklar med et konkret eksempel i hvilke situationer (tavleundervisning, interaktion i klasseværelset, forberedelse til undervisning, feedback på elevers arbejde, besvarelse af elevers spørgsmål osv.) din viden bliver brugt." Svarene på dette spørgsmål omfatter alle de nævnte eksempler på situationer, og hos et betydeligt mindretal (typisk for dem hvis svar er klassificeret som "ingen") også en gentagelse af at sådanne situationer ikke forekommer eller erindres.

Brug af obligatoriske kurser fra KU

Det er også interessant at se på om respondenterne kan pege på konkrete kurser som de bruger i forbindelse med undervisningen i differentialregning. Det er i sagens natur svært at gøre for alle uddannelser. Vi valgte at præsentere de 34 respondenter som angav at have deres kandidatgrad fra Københavns Universitet, for 12 kurser som i de seneste mange år har indgået i hovedfag, sidefag eller begge ("gymnasiepakkerne").

Deltagerne blev først bedt om at angive hvilke kurser de havde fulgt; 30 besvarede dette spørgsmål. Derefter fik de spørgsmålet: "Udvælg op til tre af de valgte kurser fra sidste spørgsmål som du mener bidrager til dit virke som gymnasielærer i matematik når du underviser i differentialregning i dag." Der blev i dette spørgsmål sat i alt 75 krydser, svarende til at de 30 i gennemsnit pegede på 2,5 kurser. De kurser som mere end 5 respondenter pegede på, er: det indledende kursus matintro (14), analyse 0 (10), matematikkens historie (12) og grundkursus i de naturvidenskabelige fags didaktik (12).

Det er forventeligt at mange peger på matintro og analyse 0 som formaliserer og bygger direkte videre på gymnasiets differentialregning. Mere overraskende er det måske at matematikkens historie udpeges af lige så mange, når kun 9 fra den samlede respondentgruppe nævner historiske perspektiver som konkrete eksempler på brug (tabel 3). Vi noterer også at intet kursus udpeges af mere end halvdelen af dem der besvarer spørgsmålet.

Et sammenfattende svar

Efter på disse måder at have givet respondenterne mulighed for konkret at angive hvordan og i hvilke situationer de bruger deres universitetsmatematik når de underviser i differentialregning i gymnasiet, og (for KU-kandidaterne) at udpege særlig relevante obligatoriske kurser stillede vi et mere overordnet lukket spørgsmål: "I hvor høj grad mener du sammenfattende at du bruger den viden du har opnået på universitetet, når du underviser i differentialregning i gymnasiet?" – resultatet fremgår af tabel 4.

Tabel 4. *Grad af brug af universitær viden til undervisning i differentialregning.*

Ingen	Nogen	Høj	Meget høj	Ved ikke	I alt
16	58	12	13	4	103

Som det ofte er tilfældet, kan lukkede svar dække over mange nuancer. Vi lægger således mærke til at "ingen"-svar udgør en mindre andel her end den enslydende kategori i tabel 3. Det kan dog relativt let forklares med at man godt kan mene at udøve "nogen" brug af viden fra universitetet uden at kunne pege på et konkret eksempel, eller formulere brugen i generiske vendinger; desuden er formuleringen af de to spørgsmål forskellig ved brugen af de forskellige termer "viden" og "matematikviden", og det er muligt at nogle respondenter ikke anser viden fra de historiske, videnskabsteoretiske og didaktiske kurser som dækket af den sidste term (som tabel 3 afspejler). Det er også iøjnefaldende at kun 25 – svarende til ca. en fjerdedel af respondenterne – selv med denne bredere formulering finder at de i "høj" eller "meget høj" grad bruger viden fra universitetet, givet at den i princippet repræsenterer fem års studier, og at der peges på et af de mere avancerede emner i den gymnasiale matematik. Det dominerende svar – "nogen" – er selvfølgelig svært at fortolke. Det kan for en del respondenter have fungeret som en form for helgardering hvis præcise indhold vi dog kan få en del mere information om ved at nærstudere de svar som er opsummeret i tabel 3. "Nogen" inkluderer utvivlsomt både dele af generiske former for brug, de ofte ret uklare eksempler på mere konkret brug og (udtryk for) ingen brug.

Vi har også set på hvordan forskellige grupper af respondenter svarer på det nævnte lukkede spørgsmål. Opdeles respondenterne efter den institution de har læst ved, bliver tallene i de fem kategorier fra tabel 4 så små at man næppe kan slutte noget af forskellene. Mere tydelige er forskellene mellem kandidater med sidefag og hovedfag, særligt at ca. dobbelt så stor en andel af sidefagskandidaterne (nemlig ca. 20 %) svarer "ingen". Men også her er forskellene i absolutte antal respondenter så små at de højst befordrer en løs hypotese om at sidefaget i mindre grad opleves som brugbart.

Er der noget som burde være anderledes?

Det sidste spørgsmål på skemaet (bortset fra lejligheden til at melde sig til interview) var: "Er der noget ved uddannelsen som gymnasielærer i matematik du mener burde være anderledes?" I alt 81 besvarede spørgsmålet, og de kunne ret let kategoriseres idet svarene var ret eksplicitte. Kategorierne er følgende:

1. *Tom*: Besvarer spørgsmålet ved at begrunde hvorfor der ikke svares (to af de tre i denne kategori henviser til at de har suppleret en ingeniøruddannelse, mens den sidste anfører at uddannelsen ligger for langt tilbage til at der kan svares)
2. *Nej*: typisk begrundet i tilfredshed med uddannelsen eller en konstatering af at uddannelsen også skal forberede til andre erhverv end lærergerningen
3. *Ja*: uden nærmere angivelse af hvordan
4. *Praktik*: ja, mulighed for at stifte direkte kendskab med gymnasieundervisning i universitetsuddannelsen
5. *Anv.*: ja, mere vægt på anvendelser af matematikken
6. *Did.*: ja, mere didaktik, ofte med fokus på praktiske dele som undervisningsplanlægning, stofdidaktik m.m.
7. *Andet*: ja (peger på andre ændringsforslag: To vil have generel pædagogik i uddannelsen, en enkelt vil have mere statistik, en enkelt mere videnskabsteori og historie, en enkelt mener sidefaget er forkert struktureret, og en enkelt mener uddannelsen kunne være kortere).

I tabel 5 gives en oversigt over hvordan de 81 svar fordeler sig. Der er to som mener at der skal være både praktikmuligheder og mere didaktik; disse er anbragt i praktikkategorien. Ellers fordeler svarene sig klart på kategorierne.

Tabel 5. *Er der noget der burde være anderledes i universitetsuddannelsen?*

Tom	Nej	Ja	Praktik	Anv.	Did.	Andet	I alt
3	18	8	13	5	28	6	81

Svarene på dette spørgsmål har ikke tydelige sammenhænge med respondenternes baggrund, hverken med uddannelsesinstitution eller med hovedfag/sidefag.

Den største kategori er de 28 lærere der eksplicit peger på behov for mere fokus på didaktiske emner, inklusive stofdidaktik hvor man fordyber sig i den gymnasiale matematik med et undervisningsmæssigt sigte. Nogle typiske udsagn af denne type er:

> "Jeg mener der bør være mere didaktisk fokus. Dvs. øvelse i at udforme konkret, varieret og sjov undervisning på gymnasiet. Måske med en mere induktiv tilgang. Eksempler på

tværfaglighed. Eksempler på hvordan matematikken konkret kan anvendes – det savner jeg i min hverdag."

"Den skal være mere målrettet undervisning, med fokus på omarbejdning og formidling af egen viden fra universitetet. Mere fokus på didaktik og didaktiske udfordringer. Hvordan håndterer man de elever der enten har svært ved matematik, ikke kan lide det eller begge dele?"

"Langt mere relevant undervisning i forhold til emnerne i gymnasiet samt de problemstillinger og udfordringer man møder som gymnasielærer. Overførselsværdien fra universitetskurserne til undervisningsfaget i gymnasiet er næsten ingen."

En anden stor gruppe (18) mener ikke der skal laves noget om. Typiske udsagn er her:

"Nej, det er jo ikke som sådan en uddannelse for gymnasielærere, men en generel kandidat man har fået, og det synes jeg er fint. Det er ikke uddannelsen der er vigtig når man underviser, men interesse for elevernes bedste."

"Personligt elskede jeg at studere matematik og fandt fagene interessante. Jeg vil derfor nødig lave min uddannelse om … Men jeg kan også se at der ikke er meget sammenhæng mellem alle fagene på kandidatuddannelsen og det jeg underviser i nu. Jeg tænker at nogle af bachelorprojektemnerne kunne være relevante SRP-opgaver (dog med mindre fagligt niveau). Desuden giver mine kandidatfag mig en forståelse for matematikken og dens uendelige vidensområde som stadig i dag udforskes. Jeg er tilbøjelig til at mene at dette retfærdiggør kandidatfagene (måske også fordi jeg kan lide dem):)"

"Nej, matematik på KU er en supergod uddannelse."

Der er i og for sig helt naturligt at en del respondenter udtrykker tilfredshed med den uddannelse de selv har valgt og gennemført, og ikke mener den skal ændres. Det kan overraske at denne gruppe kun udgør ca. 1/4 af respondenterne, men samtidig er det at foreslå ændringer langtfra altid et udtryk for stor utilfredshed. De fleste af ændringsforslagene er relativt moderate ønsker, omend der også er en del som giver bastant udtryk for at den generiske matematik opleves som mindre relevant. Endelig er det klart at spørgsmålet kan opfattes sådan at ændringer er relevante, så der skal muligvis større beslutsomhed til for klart at svare nej til det.

Endelig peger 13 respondenter på et behov for at møde gymnasiets virkelighed undervejs i uddannelsen:

"Selve stoffet er langt fra det som man skal undervise i. Fx skulle jeg tage faget fourieranalyse som jeg ikke forventer at bruge i undervisningssammenhæng. En anden forbedring kunne være at indføre gymnasiepraktik for sidefag da der er helt særlige problemstillinger i undervisningen i matematik."

"Ja, der er sgu meget. Man kunne jo starte med at tilføje noget didaktik og praktik på universitetet frem for at det blot er det ene teoretiske kursus efter det andet uden nogen som helst træning i de pædagogiske kompetencer som det kræver at være gymnasielærer. Der går nok tæt på 5 år før man er tilpas i jobbet, fordi man de første år løber forvirret rundt i klasseværelserne fordi man ikke har nogen pædagogiske værktøjer med fra sin universitetsuddannelse."

"Praktikforløbet skal ligge tidligere så man kan nå at skifte retning hvis man finder ud af at det ikke var noget for en."

De adspurgte lærere tilhører selvfølgelig alle den gruppe der indtil videre har fastholdt ønsket om at være gymnasielærere. Det kan tænkes at tilbud om praktik i uddannelsen kunne tiltrække nye – og frastøde andre – og under alle omstændigheder give et bedre grundlag for valg og fravalg af professionen. Allerede i dag er der i øvrigt ikke så få matematikstuderende som selv skaffer sig praksiserfaring som timelærere uden at det er integreret i studiet.

Diskussion og konklusion

Undersøgelsens udsagn og kvantitative resultater rummer mange interessante tendenser, også enkelte som er nye i forhold til eksisterende undersøgelser af hvordan relativt klassiske matematikuddannelser bruges i forbindelse med undervisning. Metodisk nyt er at der spørges til konkrete eksempler på brug i forbindelse med undervisningen i et bestemt emne (her differentialregning). Som tabel 3 viser, får vi så tre grupper: godt og vel 1/3 som giver sådanne eksempler, lidt under 1/3 der alligevel kun beskriver generisk brug, og stort set lige så mange som giver udtryk for at de ikke bruger deres universitetsmatematik i sammenhængen. Den anden gruppe svarer til tidligere undersøgelser hvor lærerne peger på overordnede udbytter af universitetsstudiet der er svære at konkretisere. I forhold til litteraturen er det mest interessant at "konkret brug" faktisk beskrives af det største mindretal. Dette tyder på at der er både forsknings- og udviklingspotentiale i at undersøge disse former for brug nærmere. Man kunne formode at hvis en sådan brug blev udbredt og befordret, ville effekten af uddannelsen også blive styrket.

At der er et udviklingspotentiale, synes at fremgå af tabel 4 og 5: De to grupper på omkring 1/4 af respondenterne som angiver i "høj" eller "meget høj" grad at bruge viden fra universitetet i forbindelse med undervisning i differentialregning, og som ikke synes uddannelsen skal ændres, er stort set sammenfaldende, men de er altså et mindretal. At udbrede denne gruppes oplevelse af uddannelsens brugbarhed kunne tænkes at være muligt på flere måder, men for en stor del af de øvrige respondenter tyder svarene i (og bag) tabel 5 på at ændringer i selve uddannelsen er relevante. Disse lærere giver også konkrete forslag til og synspunkter om dette, fra moderate tilføjelser til total afstandtagen fra uddannelsens generiske matematikindhold. Da man i sagens natur har haft tilsvarende diskussioner i andre lande, og er nået frem til forskellige modeller, er erfaringer med forandringer dér bestemt relevante at se på. I nogle lande – fx Sverige, Norge og Tyskland – har man således udviklet en større variation af uddannelsesmuligheder for dem der vil undervise i gymnasial matematik. Det er ikke kun interessant at man hermed har mulighed for at undersøge varianternes effektivitet i forhold til undervisningen (se fx Buchbinder, 2017), men også at de i et vist omfang er opstået som forsøg på at afhjælpe problemerne med at rekruttere og fastholde uddannede lærere – et problem som også har været aktuelt i Danmark gennem adskillige årtier, og fortsat er det.

Den internationale undersøgelse TEDS-M (Tatto et al., 2018; Schmidt et al., 2013) har set nærmere på hvordan læreruddannelser (også til gymnasialt niveau) er indrettet, og i hvilket omfang de udvikler de former for matematiklærerviden som vides at korrelere med gode resultater hos lærerens elever. Når man ser på de højtpræsterende læreruddannelser, er der faktisk betydelige sammenfald i kerneindhold. Nogle af disse elementer genfindes i de aktuelle danske uddannelsers kernestof, mens andre typisk savnes og foreslås af mange respondenter i denne undersøgelse.

Sammenfattende håber vi at nærværende artikels resultater – trods alle de forbehold som er taget undervejs – kan fremme det synspunkt at både international forskning og danske læreres erfaringer bør inddrages systematisk i overvejelser af hvordan universitetsuddannelsen kan bidrage til at styrke matematikundervisningen i gymnasiet.

Referencer

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Buchbinder, N. (2017). The Acquisition of Mathematics Pedagogical Content Knowledge in University Mathematics Education Courses: Results of a Mixed Methods Study on the Effectiveness of Teacher Education in Germany. *ZDM – Mathematics Education, 49*(2), 249-264. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0849-5

Eisenberg, T. (1977). Begle Revisited: Teacher Knowledge and Student Achievement in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*(3), 216-222. https://doi.org/10.2307/748523

Even, R. (2011). The Relevance of Advanced Mathematics Studies to Expertise in Secondary School Mathematics Teaching: Practitioners' Views. *ZDM – Mathematics Education, 43*(6), 941-950. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0346-1

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company.

Jessen, B., Holm, C. & Winsløw, C. (2015). *Matematikudredningen*. Undervisningsministeriet. https://www.ind.ku.dk/projekter/matematikudredning/Matematikudredningen2015endelig.pdf

Klein, F. (2016). *Elementary Mathematics From a Higher Standpoint*. Oversat af G. Schubring (første udgave, på tysk: 1908). Springer.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum.

Madsen, T.G. (2008). Matematikundervisningen ved universiteter og højere læreanstalter. I H.C. Hansen (red.), *Matematikundervisningen i Danmark i 1900-tallet* (s. 755-920). Syddansk Universitetsforlag.

Monk, D.A. (1994). Subject Area Preparation of Secondary Mathematics and Science Teachers and Student Achievement. *Economics of Education Review, 13*(2), 125-145. https://doi.org/10.1016/0272-7757(94)90003-5

Rowe, D.E. (1985). Felix Klein's *"Erlanger Antrittsrede"*: A Transcription With English Translation and Commentary. *Historia Mathematica, 12*(2), 123-141. https://doi.org/10.1016/0315-0860(85)90003-5

Schmidt, W., Burroughs, N. & Cogan, L. (2013). *World Class Standards for Preparing Teachers of Mathematics*. Michigan State University. https://www.education.msu.edu/csc/pdf/World-Class-Standards-for-Preparing-Teachers-of-Mathematics.pdf

Schmidt, W., Houang, R. & Cogan, L. (2011). Preparing Future Math Teachers. *Science, 332*(6035), 1266-1267. https://doi.org/10.1126/science.1193855

Tatto, M.T. (2021). Professionalism in Teaching and the Role of Teacher Education. *European Journal of Teacher Education, 44*(1), 20-44. https://doi.org/10.1080/02619768.2020.1849130

Tatto, M.T., Rodriguez, M.C., Smith, W.M., Reckase, M.D. & Bankov, K. (2018). *Exploring the Mathematical Education of Teachers Using TEDS-M Data*. Springer.

Uddannelses- og Forskningsministeriet. (2018). *Retningslinjer for universitetsuddannelser rettet mod undervisning i de gymnasiale uddannelser samt undervisning i gymnasiale fag i eux-forløb*. VEJ nr. 9698 af 28/08/2018. https://www.retsinformation.dk/eli/retsinfo/2018/9698

Wasserman, N., Buchbinder, O. & Buchholtz, N. (2023). Making University Mathematics Matter for Secondary Teacher Preparation. *ZDM – Mathematics Education, 55*, 719-736. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5

Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M. & Schubring, G. (red.) (2019). *The Legacy of Felix Klein*. Springer.

Winsløw, C. & Grønbæk, N. (2014). Klein's Double Discontinuity Revisited: Contemporary Challenges for Universities Preparing Teachers to Teach Calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(1), 59-86. https://static-curis.ku.dk/portal/files/132049740/rdm14ngcw.pdf

Zazkis, R. & Leikin R. (2010). Advanced Mathematical Knowledge in Teaching Practice: Perceptions of Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 263-281. https://doi.org/10.1080/10986061003786349

English abstract

In this paper, we study how Danish high school teachers of mathematics perceive their university education, especially the usefulness of its mathematical contents in the context of teaching a concrete subject, namely differential calculus. The study is based on a survey on this topic among teachers, who completed the induction program Pædagogikum during the period 2018-2022. The general result is, that 1/4 of the teachers consider that they use knowledge from university to a high or very high degree, while about half of them say they do so to some degree. Asked for concrete examples of how they use their mathematical knowledge from university when teaching differential calculus, about 1/3 provide generic answers, while well over 1/3 provide concrete examples; about 1/4 answer more or less directly that they cannot provide such examples.

Matematisk argumentation, geometri, gamle tekster og GeoGebra

Marianne Thomsen,
Københavns
Professionshøjskole

Abstract: *Artiklen sætter begreberne dynamisk læsning og strukturopfattelse i spil når der arbejdes med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Indledningsvis gives argumenter for at arbejde med samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og digitale teknologier. Derefter udfoldes begreberne dynamisk læsning, strukturopfattelse og ræsonnementskompetence. Disse begreber bruges til at analysere et uddrag af elevsvar fra et studie afprøvet i en 7.-klasse. Afslutningsvis reflekteres der over hvordan elevsvarene med fordel kunne have været anvendt aktivt i selve undervisningsforløbet.*

Introduktion

I denne artikel er begreberne dynamisk læsning, strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984) og ræsonnementskompetence (Niss & Jensen, 2002) centrale i forhold til at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.[1] De tre begreber udfoldes yderligere senere i teksten, men kort fortalt betyder de: 1) Dynamisk læsning betyder at læserens egen fortolkning er i centrum i en læseproces, 2) strukturopfattelse er knyttet til at eleverne får en forståelse for hvorfor reglerne i matematik er som de er, og 3) ræsonnementer kan ses som en kæde af argumenter. Eksempler på originalkilder kan fx være en eller flere sætninger fra *Euklids Elementer*. Denne artikel tager afsæt i et studie i en 7.-klasse hvor der blev arbejdet med samspillet mellem GeoGebra og Euklids "fem forudsætninger" (titlen på sætning 34, bog I, samt sætning 6, bog IV).[2] Jeg vender tilbage til selve undervisningsforløbet senere i artiklen.

1 Disse begreber er delelementer af de forskellige teoretiske distinktioner og begreber der er i spil i Thomsen (2022).
2 Klassen arbejdede med Eibes (1897a, 1897b) oversættelse af *Euklids Elementer*.

Det kan være relevant at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra af flere årsager. Her vil jeg fremhæve at GeoGebra i høj grad bruges i matematikundervisningen i Danmark (Kristensen, 2017), og måden GeoGebra bliver brugt på i undervisningen, er essentiel for elevernes læringsudbytte (Højsted, 2020, med reference til Jones, 2005). Undervisningsforløb der har fokus på at eleverne får mulighed for at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra, kan være en metode til at arbejde med fx dynamiske geometriprogrammer med henblik på at støtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence (fx Thomsen, 2020).

Når elever og studerende arbejder med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier, får de bl.a. mulighed for at afprøve og validere matematiske påstande og teorier (fx Chorlay, 2015, 2016; Jankvist & Geraniou, 2021; Kidron, 2004). Der kan lægges op til at have reflekterende diskussioner om forskellige typer af beviser (fx Jankvist et al., 2019). I en dansk grundskolekontekst kan det bl.a. være interessant at inddrage arbejdet med originalkilder fordi det kan medvirke til at skærpe blikket for hhv. tankegangs- og ræsonnementskompetencen, som er slået sammen i Fælles Mål 2014/19 (Thomsen & Jankvist, 2022). Elever og studerende kan bruge GeoGebra som en "dåseåbner" til at kunne læse og forstå originalkilder (Balsløv, 2018; Jankvist & Geraniou, 2019; Olsen & Thomsen, 2017). Ligesom arbejdet med samspillet kan understøtte at nogle af de dele af matematikken der kan være skjult i digitale teknologier, kan tydeliggøres for elever og studerende (Isoda, 1998; Jankvist & Geraniou, 2021; Olsen & Thomsen, 2017) og bidrage til at de får mulighed for at udvikle forskellige former for matematisk literacy og dannelse når de arbejder i et digitalt miljø (Olsen & Thomsen, 2017, 2018; Thomsen & Olsen, 2019). Arbejdet med samspillet falder bl.a. også i tråd med nedenstående uddrag af fagformålet for matematik, stk. 3, da det også kan sætte eleverne i situationer hvor der er mulighed for at de "oplever og erkender matematikkens rolle i en historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng" (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019, Fagets formål, stk. 3).[3]

Formålet med denne artikel er 1) at give et kort indblik i hvorfor det kan være en god idé, og hvordan man kan arbejde med samspillet mellem historiske originalkilder og GeoGebra, 2) at bruge begreberne dynamisk læsning, strukturopfattelse og ræsonnementskompetence til at analysere elevers svar på spørgsmålet "Hvad har du lært?"[4] samt 3) at reflektere over hvordan elevsvarene kunne have været inddraget mere aktivt i selve undervisningsforløbet. Her er det vigtigt at pointere at sidstnævnte først er et område jeg har fået blik for efter selve undervisningsforløbet var afsluttet,

3 Sammenhængen mellem Fælles Mål og at arbejde med samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence er yderligere udfoldet i Thomsen (2022).

4 Det var et studie som var en del af et samlet ph.d.-projekt. Her blev elevsvarene på logbogsarkene blot ikke inddraget aktivt i undervisningen.

hvorfor det desværre heller ikke var en aktiv del heraf. I artiklen her er der særligt fokus på følgende spørgsmål:

> *Hvordan kan elevers egne svar på hvad de har lært, tolkes i lyset af begreberne dynamisk læsning og strukturopfattelse? Og hvordan kan en sådan tolkning bruges til at give idéer til aktivt at inddrage elevsvar i undervisningen så eleverne får mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra?*

Først vendes blikket mod de teoretiske begreber der sættes i spil i artiklen. Dernæst beskriver, analyserer og vurderer jeg uddrag af elevers svar på spørgsmålet om hvad de har lært i et undervisningsforløb hvor der blev arbejdet med samspillet mellem en originalkilde og GeoGebra. Afslutningsvis diskuterer jeg hvordan elevernes egne svar kunne have været inddraget aktivt i undervisningsforløbet og formentlig yderligere have bidraget positivt til elevernes læringsudbytte.

Centrale begreber

Mellin-Olsens (1984) beskrivelse af dynamisk læsning og strukturopfattelse er valgt fordi dynamisk læsning kan lægge op til at eleverne skal bruge både deres undersøgende og deres produktive side af ræsonnementskompetencen i deres læsning af hhv. originalkilden og GeoGebra. Dertil kommer at der synes at ligge et stort potentiale i at arbejde bevidst ud fra en strukturopfattelse for at understøtte at eleverne kan formulere en kæde af matematiske argumenter når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra (fx Thomsen, 2022). Ifølge Mellin-Olsen (1984) udfører læseren en dynamisk læsning når "Leseren bruker sin egen forståelse når han leser, og han bruker den når han oppfatter innholdet i teksten" (Mellin-Olsen, 1984, s. 86). Denne læsemåde står i modsætning til den statiske læsning der "gjør tegnet til autoritet. Det er tegnet og forfatterens bruk av det, som alene gir mening til tegnet" (Mellin-Olsen, 1984, s. 86). Originalkilder er ofte sprogligt svære at læse og forstå for både elever og lærere hvorfor det giver god mening at lægge op til at arbejde med at understøtte en forståelse samt tolkninger af ord, sætninger og notationer i teksten. På den baggrund kan man sige at der i sig selv ligger et potentiale i at arbejde med dynamisk læsning når der arbejdes med originalkilder (fx Thomsen, 2022). I forlængelse heraf kan der yderligere lægges op til at eleverne kan gå i dialog med teksten, kan forholde sig spørgende til indholdet og fx via GeoGebra være nysgerrige på om det nu kan passe, eller om man kan se på nogle af de samme matematiske problemstillinger eller konstruktioner der optræder i teksten, på andre måder i GeoGebra (Thomsen, 2021b). Den dynamiske geometridel i GeoGebra er designet ud fra den euklidiske geometri hvilket giver både muligheder og begrænsninger når elever konstruerer og på den baggrund ræsonnerer ved at bruge GeoGebras "knapper". Det er vigtigt at være bevidst om hvornår eleverne begrunder og argumenterer ud fra deres brug af knapperne, fx "regulær polygon" og "opret to på hinanden vinkelrette linjer", og hvornår de viser en forståelse for matematikken bag knapperne og bruger den aktivt i deres argumentation (fx Thomsen, 2021a). Ifølge Mellin-Olsen (1984) kan tegn forstås bredt. Derfor kan elevernes brug af GeoGebras feedback anses for at være en form for læsning der ikke i sig selv kan anses for bare at være ekspliciteret meningsskabende. Det kan kræve at eleverne fortolker herpå. Derfor kan en skelnen mellem hhv. dynamisk og statisk læsning også være brugbar når eleverne arbejder med GeoGebra (Thomsen, 2022). Det synes vigtigt at læreren giver udtryk for egne tvivlsspørgsmål i forbindelse med læsning og forståelse af originalkilden samt er bevidst om at stille spørgsmål til teksten og elevernes arbejde hermed og med GeoGebra. Så der ikke blot bliver tale om at læreren viser en forståelse af teksten og den bagvedliggende matematik i elevernes konstruktioner i GeoGebra, men lægger op til flere mulige tilgange og forståelser heraf (Thomsen, 2022). Når eleverne arbejder med en dynamisk læsning af hhv. originalkilden og GeoGebra, kan det medvirke til at understøtte at eleverne får mulighed for at gå i dialog med begge dele (fx Thomsen, 2021b).

Mellin-Olsen (1984) beskriver matematikfaget som et struktureret fag hvor "Resultatene henger sammen, det ene kan avledes av det andre, og ved hjelp av fagets slutningsregler kan en utlede nye resultater som en har brug for" (Mellin-Olsen, 1984, s. 36). Han benytter bl.a. begrebet strukturopfattelse som er karakteriseret ved "forståelsen av hvordan regelen er knyttet til sin struktur, det vil si, hvorfor regelen har blitt slikk den har blitt" (Mellin-Olsen, 1984, s. 32). Ses Mellin-Olsens begreb strukturopfattelse i forhold til at arbejde med GeoGebra, kan brug af fx dragging eller måling give anledning til at understøtte elevernes forståelse af forskellige strukturer bag forskellige matematiske sammenhænge. Brug af digitale teknologier kan understøtte at elever kan gå fra at have en forståelse af matematiske eksempler til at have en forståelse af mere generelle matematiske beviser, da dragging kan visualisere mange eksempler i et eller flere træk, men det er ikke noget der bare opstår, det kræver et bevidst arbejde hermed (fx Arzarello et al., 2002; Mariotti, 2002). Hvis dragging eller målefunktionen i GeoGebra benyttes, kan nogle af påstandene i originalkilden fx afprøves og bruges til at gå i dialog med teksten og understøtte elevernes dynamiske læsning og strukturopfattelse (Thomsen, 2022).

I KOM-rapporten definerer Niss og Jensen (2002) en matematisk kompetence på følgende måde: "*en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer*" (s. 43). Ræsonnementskompetencen består bl.a. i at kunne:

- (…) "*følge* og *bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, specielt at vide og *forstå* hvad et matematisk *bevis* er, og hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer (…)"
- "*afdække de bærende idéer i et matematisk bevis*, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter (…)"
- "*udtænke og gennemføre* informelle og *formelle ræsonnementer* (på basis af intuition), herunder omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser."

(Denne punktopstilling er et uddrag af beskrivelsen af ræsonnementskompetencen i Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Ræsonnementer ses ifølge det første punkt i ovenstående beskrivelse som en kæde af på hinanden følgende argumenter hvori der implicit synes at ligge en betragtning af et argument som noget enkeltstående. Ifølge Niss og Jensen (2002) har de otte matematiske kompetencer en dual karakter, de har både en undersøgende og en produktiv side. For ræsonnementskompetencen omhandler den undersøgende side bl.a. at kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement, mens den produktive side bl.a. handler om at kunne udtænke og gennemføre ræsonnementer. Niss og Jensen (2002) synes yderligere at graduere mellem argumenter, ræsonnementer og beviser ved at sidstnævnte er et udtryk for at "levere korrekte og fuldstændige argumenter (beviser) for at de foreslåede løsninger virkelig virker (…)" (Niss & Jensen, 2002, s. 64). Elevers og læreres brug af teksten i originalkilden kan i samspil med deres arbejde med GeoGebra medvirke til at de får blik for metoder til at opbygge argumenter og kæder heraf. De kan bruge teksten til at gå i dialog med og forstå den visuelle feedback fra GeoGebra, og på den måde kan arbejdet med samspillet understøtte at de fx går fra at "måle" forskellige matematiske objekter til at forstå og formulere deres egne argumenter og mere generelle ræsonnementer herudfra når de arbejder med GeoGebra (Thomsen, 2022).

Praksisafsættet i denne artikel er en 7.-klasses arbejde med sætning 6, bog IV, i *Euklids Elementer*: "I en Given cirkel at indskrive et Kvadrat." Her handler det altså om at se sammenhænge mellem et indskrevet kvadrat og den omskrevne cirkel for på den baggrund at overbevise om at der er tale om et kvadrat og ikke en anden type firkant. Euklids sætning 6, bog IV, er opbygget efter en struktur hvor forskellige matematiske objekter med tilhørende regler sættes i relation til hinanden så en slutning fra én regel kan ledes videre til den næste. Elevernes arbejde med sætningen i samspil med GeoGebra kan skabe rum for at de arbejder med både at forstå teksten og med selv at formulere forskellige former for argumenter, selvom det også synes at være svært for eleverne at formulere kæder af egne argumenter (fx Thomsen, 2022). Her kunne en aktiv inddragelse af elevernes logbogssvar i undervisningen måske i endnu højere grad have understøttet elevernes strukturopfattelse og dermed deres muligheder for at opbygge kæder af argumenter.

Kort beskrivelse af undervisningsforløbet

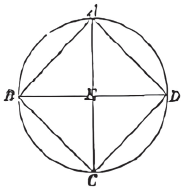
Undervisningsforløbet blev afprøvet i en 7.-klasse i en dansk folkeskole.[5] Derfor er forløbet også knyttet op på Fælles Mål 2019. I forhold til faget matematik betyder det bl.a. at folkeskolens formål skal ses i sammenhæng med fagets formål samt i relation til de seks matematiske kompetencer og de tre matematiske stofområder (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019). De matematiske kompetencer som er beskrevet i Fælles Mål, læner sig op ad de matematiske kompetencer Niss og Jensen (2002) definerer i KOM-rapporten. De afviger bl.a. herfra ved at "ræsonnement og tankegang" er slået sammen. Stofområderne i Fælles Mål er: 1) tal og algebra, 2) geometri og måling samt 3) statistik og sandsynlighed. Hensigten med Fælles Mål er bl.a. at matematiske kompetencer samtænkes med matematiske stofområder i undervisningsforløb (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019). I undervisningsforløbet blev den matematiske kompetence "ræsonnement og tankegang" samtænkt med stofområdet "geometri og måling", nærmere bestemt færdigheds- og vidensområderne "geometriske egenskaber og sammenhænge" samt "måling". Forløbet strakte sig over 11 lektioner fordelt over tre uger.

Eleverne arbejdede hovedsageligt i makkerpar eller mindre grupper, og de skulle også i parvise makkerpar overbevise hinanden om hvorfor deres argumenter og ræsonnementer gjaldt. Der var fælles lærerstyrede introduktioner, diskussioner og opsamlinger i klassen undervejs i forløbet.

I starten af forløbet blev eleverne introduceret til *Euklids Elementer*. Ligesom de også reflekterede over og diskuterede hvad der kendetegner matematiske argumentationer og beviser. Før klassen arbejdede med Euklids sætning 6, bog IV, arbejdede eleverne med titlen på Euklids sætning 34, bog I: "I et parallelogram er de modstående sider og vinkler indbyrdes lige store, og diagonalen halverer parallelogrammet." Her skulle de mundtligt prøve at argumentere for hvorfor det gælder. Parallelogrammer formodedes at være mere kendt stof for eleverne end indskrevne kvadrater, og de kunne muligvis bruge nogle beslægtede argumenter eller måder at konstruere på når de skulle arbejde med og ud fra teksten i Euklids sætning 6, bog IV. Denne opbygning var bl.a. et forsøg på at understøtte elevernes strukturforståelse. Klassen arbejdede også med Euklids fem forudsætninger, bog I. Eleverne afprøvede disse i GeoGebra. Det var tænkt som grundlag for det videre arbejde med Euklids sætning 6, bog IV: "I en Given cirkel at indskrive et Kvadrat." Eleverne arbejdede med sætningen i små tekstbidder der over-

5 En mere udførlig beskrivelse heraf kan bl.a. læses i Thomsen (2022).

ordnet var delt op i en konstruktionsdel og en bevisdel.[6] Derudover var der løbende spørgsmål til tekstbidderne. For at understøtte at eleverne kunne tage afsæt i selve teksten når de skulle konstruere figuren i GeoGebra, fik de ikke som udgangspunkt illustrationen til sætning 6, bog IV.



Figur 1. *Illustration af det indskrevne kvadrat i en cirkel fra sætning 6, bog IV (Eibe, 1897b, s. 73).*

Et eksempel på en tekstbid (Eibe, 1897b, s. 73) og de tilhørende spørgsmål eleverne fik, ses i figur 2.

3. Jeg siger
saa, at den ogsaa er ret-
vinklet. Thi da den rette Linie BD er Diameter
i Cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel.
Altsaa er ∠ BAD ret.

Undersøg i GeoGebra:

Passer det? Beskriv hvordan I vil undersøge det?

Hvorfor gælder det eller gælder det ikke?

Vil det altid være sådan i en halvcirkel? Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis.

Figur 2. *Eksempel på en delopgave eleverne blev stillet undervejs i forløbet.*

Denne tilgang til elevernes arbejde med teksten havde til hensigt at understøtte at eleverne kunne bringe deres ræsonnementskompetence i spil, udvikle en strukturopfattelse og arbejde med en dynamisk læsning af teksten. I selve teksten forklarer Euklid ikke hvorfor vinkel BAD i halvcirkel BAD er ret. Det er forklaret i en anden sætning i *Euklids Elementer* og tages på sin vis for givet her i teksten i sætning 6, bog IV. Eleverne skulle arbejde i makkerpar og afprøve det i GeoGebra for på den baggrund at formulere deres egne argumenter for hvorfor det gælder, og se om de yderligere

6 Denne måde at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på er bl.a. inspireret af Olsen og Thomsen (2017).

kunne generalisere og give argumenter for om det altid vil være sådan i en halvcirkel eller ej. På den ene side understøttede det elevernes arbejde hermed da de fx kunne inddrage deres viden om vinkler hhv. trekanter og kvadrater i deres argumentationer når de fx gjorde brug af dragging af "punkt" A langs cirkelperiferien. Men det viste sig også at den umiddelbare visuelle feedback eleverne fik fra GeoGebra, kunne blive en argumentation i sig selv fordi det jo er tydeligt på skærmen at det fx forholder sig sådan at vinkel BAD er ret, uanset hvor du trækker punkt A hen på cirkelperiferien. Hvis eleverne ikke forholder sig yderligere til GeoGebras visuelle feedback, kan det betegnes som det Misfeldt & Jankvist (2018) med inspiration fra bl.a. Harel & Sowders overbevisningsskemaer (2007) kalder et tekno-autoritært overbevisningsskema.[7]

Metode – logbogssider og "Hvad har du lært?"

Som tidligere nævnt blev forløbet denne artikel handler om, gennemført i en 7.-klasse i en dansk folkeskole. Der deltog 22 elever og en lærer i dette undervisningsforløb. Læreren havde ikke haft eleverne tidligere, og eleverne kom også fra flere forskellige klasser og var i 7. klasse blevet samlet i én ny klasse.[8] Læreren og eleverne havde ikke arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra tidligere. Eleverne svarede i ovenfor beskrevne undervisningsforløb én gang om ugen på en logbogsside, som i dette forløb var defineret ved et ark med forskellige spørgsmål til forløbet. De fik ikke særlig lang tid til at svare på hver logbogsside. I undervisningsforløbet havde logbogssiderne til formål at skabe et kort refleksionsrum for eleverne, og de blev i nogen grad brugt i den videre planlægning af forløbet. Logbogssiderne var altså ikke designet eller udfyldt med henblik på at indsamle empiri til at besvare hvordan elevernes svar aktivt kan bruges i undervisningen med henblik på at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Dertil kommer at jeg i denne artikel kun inddrager elevernes svar på hvad de har lært, og ikke sammenholder disse svar med elevernes svar på de resterende spørgsmål på logbogssiderne. Ligesom jeg i det følgende også kun bruger udvalgte elevsvar til at illustrere eller diskutere forskellige pointer i analysen af elevsvarene. Derfor følger også at der ikke kan siges noget mere generelt på baggrund af elevsvarene. Ikke desto mindre vurderer jeg at elevsvarene kan være interessante at analysere ud fra Mellin-Olsens (1984) begreber dynamisk læsning og strukturopfattelse samt Niss og Jensens (2002) definition af ræsonnementskompetencen, og at en sådan analyse kan give inspiration til hvordan man evt. kan arbejde med at inddrage elevers logbogssvar aktivt i en undervisning – også selvom de ikke blev brugt aktivt i det forløb svarene er skrevet med afsæt i.

7 Se evt. mere herom i Thomsen og Jankvist (2020).
8 I det samlede ph.d.-projekt deltog ydermere én 5.-klasse som arbejdede med *Platons Menon* (dansk oversættelse af Rangel-Nielsen, 1906). Derudover deltog én 6.-klasse hvor der var gunstige forhold.

Tabel 1 viser spørgsmålene på de tre logbogssider. De kan i nogen grad siges at falde i tråd med det Mellin-Olsen (1984) kalder dynamisk aktivitet. Dynamisk aktivitet karakteriseres ved at eleverne kan engagere sig i og få medejerskab over deres læring, bl.a. ved at de får mulighed for at forholde sig til kundskabernes[9] meningsindhold. Det kan spørgsmål som disse lægge op til:

- "Hva er kunnskapen god for?
- Hva kan den brukes til?
- Hvordan ønsker vi å bruke den?" (Mellin-Olsen, 1984, s. 87)

Det var kun på den sidste logbogsside at der var spørgsmål der rettede sig mod hvad eleverne fandt mest og mindst vigtigt, samt hvordan de troede de i fremtiden kunne bruge det de havde lært. Set ud fra Mellin-Olsens (1984) beskrivelse af dynamisk aktivitet kunne sådanne spørgsmål også være inddraget mere aktivt i udformningen af spørgsmålene på logbogssiderne undervejs i forløbet. På den måde kunne elevernes arbejde hermed måske i sig selv have bidraget yderligere til at eleverne bl.a. kunne arbejde ud fra en dynamisk læsning og strukturopfattelse med henblik på at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

Tabel 1. *De spørgsmål eleverne blev stillet på de enkelte logbogssider.*

1. logbogsside	2. logbogsside	3. logbogsside
• Hvad har vi arbejdet med i denne uge? • Hvad har du lært? • Hvad synes du om at arbejde på denne måde? Forklar hvorfor	• Hvad har vi arbejdet med i denne uge? • Hvad har du lært? • Hvad synes du om at arbejde på denne måde? Forklar hvorfor • Var der noget du syntes var særlig svært eller let? • Hvad vil du særligt gerne blive bedre til?	• Hvad har vi arbejdet med i denne uge? • Hvad har du lært? • Var der noget du syntes var særlig svært eller let? • Hvad synes du har været det vigtigste ved det her forløb? • Hvad har været det mindst vigtige? • Hvordan tror du du fremover kan bruge det du har lært?

9 Mellin-Olsens brug af begrebet "kunnskap" bevares i nærværende artikel, men heri kobles det til en dansk skolekontekst anno 2024 og bruges som dækkende for både færdigheder, viden og kompetencer. Denne brug og oversættelsen af ordet "kunskap" diskuteres ikke i teksten.

Kategorisering og analyse

I det følgende fokuserer jeg særligt på elevernes svar på spørgsmålet "Hvad har du lært?" da det kan give en indikation af hvad eleverne selv mener de har lært i forløbet. Nogle svar som jeg, som tidligere nævnt, efter forløbets afslutning syntes der lå nogle muligheder i, og som med fordel aktivt kunne have været inddraget i selve undervisningsforløbet.

Tabel 2 er min kategorisering af elevernes svar på spørgsmålet "Hvad har du lært?" Disse kategorier fandt jeg repræsentative ud fra en gennemlæsning af de forskellige elevsvar på spørgsmålet "Hvad har du lært?" på de tre logbogssider. I tabel 2 angiver antallet af elever der har svaret, det antal af elever der svarede på logbogssiderne den dag de arbejdede med dem. Nogle af elevsvarene tæller i flere kategorier, fx hvis de har svaret at de har lært noget om både gamle tekster og argumentationer. Ligesom nogle elevers svar kan tælle flere gange inden for de samme kategorier i "i alt"-kolonnen. Selvom 15 elevsvar er kategoriseret under "argumentationer og beviser", svarer det kun til halvdelen af eleverne. Der er en elev som har svaret noget om argumentation på hver uges logbogsside, og to elever har svaret det på to af logbogssiderne.

Elevsvarene tyder på at eleverne ud over at argumentere matematisk hovedsageligt

Tabel 2. *Kategorisering af elevsvar på de enkelte logbogssider på spørgsmålet "Hvad har du lært?"*

Hvad har du lært? Kategorier med udgangspunkt i elevernes svar	**Logbogsside 1: 20 elever har svaret**	**Logbogsside 2: 22 elever har svaret**	**Logbogsside 3: 20 elever har svaret**	**I alt**
Euklid	7	2	0	9
Euklids forudsætninger/påstande	2	1	0	3
GeoGebra	3	3	5	11
Geometri	4	2	7	13
Gamle tekster	2	6	4	12
Ord	4	0	0	4
Argumentationer og beviser	3	8	4	15
Program til screencast	3	1	0	4
Ikke så meget/noget	1	2	0	3
Andet	0	2	3	5
I alt	29	27	23	79

synes de har lært geometri, lært at læse gamle tekster samt er blevet bedre til at bruge GeoGebra. Her er det vigtigt at pointere at der også i svarene under disse kategorier kan ligge implicit at eleverne også synes de har lært at argumentere, eftersom det hele tiden var det overordnede mål med de forskellige undervisningsaktiviteter.

I den følgende analyse inddrager jeg også udvalgte elevsvar der illustrerer hvad svarkategorierne kan indeholde, og som kan medvirke til at underbygge analysen. Svarene er taget fra kategorierne "ord", "gamle tekster", "geometri" og "argumentationer og beviser" da de særligt knytter sig til Mellin-Olsens (1984) begreber dynamisk læsning og strukturopfattelse samt Niss og Jensens (2002) definition af ræsonnementskompetencen.

Ord og gamle tekster

Ud fra skemaet ses det at der på den første logbogsside er fire elever der har svaret at de har lært noget om ord. Svarene lyder således: "En masse ord", "En masse seje ord", "Forskellige ord som betyder noget forskelligt" og "At forstå matematiske ord på et andet niveau". Særligt de to sidste udsagn indikerer at eleverne gik i dialog med teksten i form af at være opmærksomme på ordenes betydning. Nogle af de elever som har skrevet at de har lært noget om gamle tekster, har svaret at de har lært "At bruge gamle tekster" eller "Gammelt matematik". Andre har svaret at de har lært "Næsten at forstå tekster der ikke giver mening", "At forstå svære tekster bedre" samt "At forstå svære tekster og argumentere for noget vi tror er rigtigt". Disse udsagn indikerer at eleverne har oplevet det at arbejde med at forstå og arbejde med teksterne som værende en del af deres læring i forløbet. Særligt det sidste udsagn kan ses som et udtryk for en dynamisk tilgang til læsning. Dobbeltheden i den dynamiske læsning hvor eleverne på den ene side oplever at forstå tekster bedre, samtidig med at de arbejder med at skabe deres egen forståelse og egne argumenter der passer til den kontekst eleverne arbejder med teksten i, synes at træde frem i dette udsagn.

Geometri

Når eleverne giver udtryk for at de har lært noget om geometri, er nogle af svarene meget overordnede. De lyder: "Større forståelse for geometri" og "Geometri". Andre svar giver indtryk af at eleverne har lært mere enkeltstående ting. Eksempler herpå kan være følgende elevsvar: "Jeg har lært hvad et parallelogram er", "Vinkler" og "Noget om indskrevne kvadrater og ABCD". Sidstnævnte synes at være et udtryk for at eleven også har lært noget om notationer. Nogle af elevsvarene kan måske indikere at eleverne begynder at se nogle sammenhænge og forskelle. En elev svarer "Linjer og vinkler", og en anden svarer "Euklids vinkler". Der er også en elev som svarer: "Tror faktisk jeg har lært noget nyt hver dag. Så det er lidt svært at nævne specifikke ting, men nok mest indskrevne kvadrater." Dette svar er interessant fordi det synes at vise at selvom spørgsmålet på sin vis er åbent, så synes eleven at forvente at der ønskes et mere specifikt svar, som en specifik ting, altså i dette tilfælde "indskrevne kvadrater". Umiddelbart kan man ikke tolke heraf om eleven hentyder til at have lært nogle sammenhænge mellem cirklen og de indskrevne kvadrater, eller om det blot handler om at have forstået et nyt ord, altså hvad et indskrevet kvadrat er, og ikke hvorfor det er et indskrevet kvadrat. Med andre ord er det svært at vide om det er udtryk for en strukturopfattelse af arbejdet med begrebet "et indskrevet kvadrat". I det hele taget er disse svar for korte til at sige noget om i hvor høj grad og mellem hvilke geometriske objekter eleverne begynder at se og forstå strukturer samt aktivt selv kan formulere sig heromkring. Derfor kunne det også have været relevant at have inddraget elevsvarene mere aktivt så eleverne havde fået mulighed for at udfolde disse, og de kunne bruges til at understøtte elevernes mulighed for at argumentere ud fra en strukturopfattelse.

Argumentere matematisk

En elev svarer: "Argumentere matematisk (jeg vidste ikke at det var en ting) – at skulle forstå svære tekster bedre." Det er et eksempel på et svar der tæller under både kategorien "gamle tekster" og kategorien "argumentationer". Umiddelbart er det interessant at eleven giver udtryk for ikke at have vidst at det var en ting at argumentere matematisk. Det taler for at eleven oplever at det er noget nyt. Eleven har formentlig arbejdet med matematisk argumentation tidligere, men måske ikke på en måde hvor det hele tiden var i fokus, og læreren løbende eksplicit italesatte det. Andre elever har også givet udtryk for at de har lært at argumentere matematisk. Eksempler på sådanne svar er: "Jeg har lært at argumentere for matematiske ting", "Jeg har lært om Euklids forudsætninger, bevise ting og forklare ting", "At argumentere for noget så jeg kan overbevise andre". Disse forskellige svar indikerer at eleverne selv har en opfattelse af at de har arbejdet med matematiske argumentationer på forskellig vis, og på den baggrund kan det synes som om flere elever oplever at de har fået mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Undervejs i forløbet gav læreren forskellige forklaringer på hvad argumentationer og ræsonnementer kunne være. Ligesom eleverne også selv gav input hertil. Hvilket måske forklarer at en elev svarer: "Jeg har lært om matematiske argumenter." Der er en enkelt elev der bruger ordet ræsonnementer i sit svar og skriver: "Om Euklid og om former og ræsonnementer." Her skriver eleven noget om både Euklid, geometri og ræsonnementer. Det kan måske også understøtte at eleven som skrev "Argumentere matematisk (jeg vidste ikke at det var en ting)", også forbinder det at argumentere matematisk med Euklids tekster, og derfor bliver det at arbejde med teksterne og deres opbygning også en ny måde at synliggøre matematisk argumentation og ræsonnementer på. I forløbet blev det ikke som sådan løbende eksplicit italesat at et ræsonnement kan defineres som en kæde af argumenter, hvilket der synes at have været et yderligere potentiale i i højere grad at synliggøre over for eleverne. Det kunne formentlig med fordel understøttes yderligere hvis der også var blevet arbejdet mere bevidst og eksplicit ud fra en strukturopfattelse (Thomsen, 2022).

Diskussion

Helt overordnet kan flere af elevsvarene på spørgsmålene på logbogssiderne synes lidt kortfattede, hvilket kan skyldes selve det at eleverne skulle skrive dem ned og ikke fik meget tid hertil. Det kan i hvert fald ud fra elevernes svar på disse logbogssider være svært at drage nogle konklusioner om i hvor høj grad eleverne fik understøttet deres muligheder for at udvikle en strukturopfattelse. Som tidligere nævnt synes det som om eleverne i nogen grad arbejdede ud fra en strukturopfattelse, men også at der helt klart var et yderligere potentiale til i højere grad at fokusere på det og udarbejde forskellige typer af aktiviteter der kunne understøtte det (Thomsen, 2022). Her kunne elevernes svar på logbogssiderne fx være inddraget aktivt i selve undervisningsforløbet. Hvis vi sammenholder elevsvarene inden for kategorien geometri, synes de enkeltstående svar i den grad at kunne have bidraget til at skabe rum for i klassen at diskutere de bagvedliggende strukturer. De to elevsvar "Jeg har lært hvad et parallelogram er" og "Noget om indskrevne kvadrater og ABCD" kunne fx have været bragt op i en fælles diskussion i klassen hvor elever og lærer sammen fandt forklaringer på forskelle og ligheder mellem parallelogrammer og kvadrater – kan det fx være et kvadrat hvis diagonalerne ikke er vinkelrette? Denne diskussion kunne yderligere udfoldes og sammenholdes med udvalgte "sætningsbidder" fra originalkilden. I Euklids sætning 6, bog IV, er det givet i konstruktionsdelen at diagonalerne er vinkelrette, og der står: "Lad der i Cirkel ABCD være trukket to paa hinanden vinkelrette Diametre AC og BD" (Eibe, 1897b, s. 73). Senere i sætning 6 står der: "Thi da den rette linje BD er Diameter i cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel. Altsaa er $\angle$ BAD ret." (jf. figur 2, Eibe, 1897b, s. 73). Her kunne der været blevet sat spørgsmålstegn ved om denne argumentation behøvedes i argumentationsrækken i hele sætningen, eller om denne del af sætningen kunne tages ud og blive et afsæt for at eleverne, evt. i samarbejde med læreren, kunne have formuleret og udført en argumentationsrække der ville udmønte sig i et ræsonnement for at have tegnet et indskrevet rektangel i cirklen, samt hvorfor det ville være et rektangel og ikke et kvadrat. Her kunne de i undervisningen have arbejdet med at sammenholde den del af sætning 6, bog IV, med elevernes forklaringer af hvorfor det var et rektangel, da de arbejdede med titlen på sætning 34, bog I. Derudover kunne notationsformerne fra elevkommentaren "Jeg har lært hvad et parallelogram er" og "Noget om indskrevne kvadrater og ABCD" være bragt i spil. Her kunne der i en fælles diskussion i klassen lægges op til at tale om hvilke notationer

Euklid bruger, og hvordan forskellige argumentationer ud fra elevernes arbejde med GeoGebra kunne se ud hvis de hovedsageligt måtte bruge bogstaver og symboler. Det kunne formentlig i højere grad have understøttet at eleverne 1) udvidede deres strukturforståelse med henblik på at kunne ræsonnere i form af kæder af argumenter og 2) kunne gå fra det enkelte eksempel til de mange eksempler (via fx dragging i GeoGebra) og til en større grad af generalisering. Ligesom det kunne understøtte en dynamisk læsning af originalkilden.

Elevsvarene "Vinkler" og "Euklids vinkler" kunne også have været bragt i spil i en fælles diskussion i klassen. Det kunne fx have givet anledning til i højere grad at diskutere forskelle og ligheder mellem, hvordan GeoGebras "vinkelmålerknap" kan bruges til at understøtte en formulering af kæder af argumenter for hvilke typer firkanter, der fremkommer, når der fx trækkes i den indskrevne firkants hjørner langs cirkelperiferien og så argumentationsrækken i Euklids sætning. Det skal tilføjes at overvejelser herom i nogen grad var på banen i den fælles opsamling i klassen, men det kunne måske have fremstået tydeligere hvis der var lagt op til at de tog udgangspunkt i elevsvarene på logbogssiderne "Vinkler" og "Euklids vinkler".

Selve elevernes arbejde med at skrive logbog kunne også have været stilladseret anderledes. Eleverne kunne fx have fået nogle indledende formuleringer til trin i en argumentation der tog udgangspunkt i de matematiske objekter og sammenhænge herimellem de havde arbejdet med. Logbogsarbejdet kunne også have været udvidet så der blev lagt op til at eleverne inddrog skærmbilleder eller screencast. Eleverne kunne fx have valgt et skærmbillede ud fra GeoGebra som viste noget de havde lært. Det kunne inddrages som et led i undervisningen hvor eleverne mundtligt, evt. suppleret af egne tegninger, kunne begrunde deres valg af billede samt åbne for at andre elever kunne spørge ind til det og give deres besyv med i den forbindelse. Eleverne kunne også være blevet bedt om at vælge forskellige skærmbilleder af deres arbejde i GeoGebra der illustrerede en "kæde af argumenter". På den baggrund kunne de fx fælles i klassen yderligere arbejde med et begrebskort eller en anden visualisering af deres forskellige billedvalg og evt. sammenhænge herimellem. Sådanne aktiviteter kunne muligvis i højere grad have understøttet elevernes strukturforståelse så de aktivt kunne bruge den til selv at formulere kæder af argumenter der knyttede sig til deres arbejde med GeoGebra og derfor kunne være anderledes end de argumenter og kæder heraf der står i originalkilden.

Konklusion

Umiddelbart synes det plausibelt at kunne konkludere at det kan give mening at tage afsæt i begreberne dynamisk læsning og strukturopfattelse i en fortolkning af hvordan elevsvar på "Hvad har du lært" evt. kan bruges aktivt i en undervisning hvor der er fokus på at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence.[10] I denne artikel har jeg forsøgt at give nogle bud på 1) hvordan elevernes logbogssvar kunne være inddraget mere aktivt i undervisningen end tilfældet var i det forløb elevsvarene knytter sig til, og 2) hvordan selve logbogsarbejdet kunne have været stilladseret anderledes. Begge dele med det formål at sætte større fokus på elevernes muligheder for at udvikle en/udvide deres strukturopfattelse så deres grundlag for at følge og formulere kæder af argumenter yderligere kunne skærpes. Derudover håber jeg at artiklen kan lægge op til at bringe et logbogsarbejde aktivt i spil hvis og når man som forsker, underviser eller læremiddelforfatter vil skabe undervisnings- og læringssituationer der understøtter elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

Referencer

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti. O. (2002). A Cognitive Analysis of Dragging Practices in Cabri Environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34,* 66-72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Balsløv, C.U. (2018). *Den gensidige komplementaritet af Cas og originalkilder i matematikundervisningen*. Kandidatspeciale. DPU, Aarhus Universitet.

Børne- og Undervisningsministeriet. (2019). *Matematik – faghæfte 2019*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_Fagh%C3%A6fte_Matematik.pdf

Chorlay, R. (2015). Making (More) Sense of the Derivative by Combining Historical Sources and ICT. I E. Barbin, U.T. Jankvist & T.H. Kjeldsen (red.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the Seventh European Summer University* (s. 485-498). DPU, Aarhus Universitet.

Chorlay, R. (2016). Historical Sources in the Classroom and Their Educational Effects. I L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (red.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (s. 5-23). IREM de Montpellier. https://hal.science/hal-01349227/document

Eibe, T. (oversætter) (1897a). *Euklids Elementer I-II*. [En dansk oversættelse af Euklids Elementer, bog I og II]. Gyldendal.

Eibe, T. (oversætter) (1897b). *Euklids Elementer III-IV*. [En dansk oversættelse af Euklids Elementer, bog III og IV]. Gyldendal.

10 Se fx Thomsen (2022) for at få andre perspektiver på hvordan elevers arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra kan understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, herunder et særligt fokus på den produktive side heraf.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. I F.K. Lester, Jr. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 805-842). Information Age Publishing.

Højsted, I.H. (2020). Guidelines for Utilizing Affordances of Dynamic Geometry Environments to Support Development of Reasoning Competency. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *25*(2), 71-98. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/07/25_2_071098_hojsted.pdf

Isoda, M. (1998). Developing the Curriculum for Curves Using History and Technology. I W.-C. Yang, K. Shirayanagi, S.-C. Chu & G. Fitz-Gerald (red.), *Electronic Proceedings of the 3rd Asian Technology Conference in Mathematics*. https://atcm.mathandtech.org/EP/1998/ATCMP047/paper.pdf

Jankvist, U.T. & Geraniou, E. (2019). Digital Technologies as a Way of Making Original Sources Accessible to Students. I E. Barbin, U.T. Jankvist, T.H. Kjeldsen, B. Smestad & C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (s. 107-130). OsloMet. https://skriftserien.oslomet.no/index.php/skriftserien/article/view/664/179

Jankvist, U.T. & Geraniou, E. (2021). "Whiteboxing" the Content of a Formal Mathematical Text in a Dynamic Geometry Environment. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *7*(3), 222-246. https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6

Jankvist, U.T., Misfeldt, M. & Aguilar, M.S. (2019). Tschirnhaus' Transformation: Mathematical Proof, History and CAS. I E. Barbin, U.T. Jankvist, T.H. Kjeldsen, B. Smestad & C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (s. 319-330). OsloMet. https://skriftserien.oslomet.no/index.php/skriftserien/article/view/664/179

Jones, K. (2005). Research on the Use of Dynamic Geometry Software: Implications for the Classroom. I J. Edwards & D. Wright (red.), *Integrating ICT into the Mathematics Classroom* (s. 27-29). Association of Teachers of Mathematics.

Kidron, I. (2004). Polynomial Approximation of Functions: Historical Perspective and New Tools. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*(3), 299-331. https://doi.org/10.1023/B:IJCO.0000021793.71677.cd

Kristensen, B.T. (2017). Nytårstanker i GeoGebra Instituttet. Folkeskolen.dk. https://blog.folkeskolen.dk/blog-geogebra-bloggen-it/nytarstanker-i-geogebra-instituttet/176094

Mariotti, M.A. (2002). Justifying and Proving in the Cabri Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 257-281. https://doi.org/10.1023/A:1013357611987

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet – en undervisningslære*. NKI Forlaget.

Misfeldt, M. & Jankvist, U.T. (2018). Instrumental Genesis and Proof: Understanding the Use of Computer Algebra Systems in Proofs in Textbooks. I M. Tabach, H.-S. Siller, L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel & C. Vale (red.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education: Tools, Topics and Trends* (s. 375-385). Springer. ICME-13 Monographs. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4

Niss, M. & Jensen, T.H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring – ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18.

Olsen, I. & Thomsen, M. (2017). *Matematikhistorie og it i matematikundervisningen i grundskolen*. [Upubliceret speciale]. DPU, Aarhus Universitet.

Olsen, I.M. & Thomsen, M. (2018). Matematisk literacy og IT. I K. Friis & D. Østergren-Olsen (red.), *Literacydidaktik i fagene – på mellemtrinnet* (s. 71-82). Dafolo.

Rangel-Nielsen, G. (oversætter) (1906). *Platons Menon*. Det Filologisk-Historiske Samfund.

Thomsen, M. (2020). Reasoning Competency and the Link Between GeoGebra and Original Mathematics Sources. I B. Barzel, R. Bebernik, L. Göbel, M. Pohl, H. Ruchniewicz, F. Schacht & D. Thurm (red.), *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14* (s. 338-339). https://doi.org/10.17185/duepublico/70794

Thomsen, M. (2021a). Working with Euclid's Geometry in GeoGebra: Experiencing

Embedded Discourses. I G.A. Nortvedt, N.F. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Hähkiöniemi, B.E. Jesse, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Nilsen, G. Pálsdottir, P. Portaankova-Koivisto, J. Radisic & A. Werneberg (red.), *Bringing Nordic Mathematics Education into the Future: Proceedings of Norma 20 – The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education* (s. 257-264). Svensk Förening för MatematikDidaktisk Forskning.

Thomsen, M. (2021b). Using Dynamic Reading to Support Students' Development of Mathematical Reasoning Competency [abstract til konference]. *NOFA8 – The 8th Nordic Conference on Subject Education* [abstract 20]. https://www.hvl.no/globalassets/hvl-internett/arrangement/2021/nofa-8/abstractr-book---nofa8---acceptance-type-abstract-book-14.05.pdf

Thomsen, M. (2022). *Matematikhistoriske originalkilder, ræsonnementskompetence og GeoGebra på mellemtrinnet*. DPU, Aarhus Universitet. https://doi.org/10.7146/aul.448

Thomsen, M. & Jankvist, U.T. (2020). Reasoning with Digital Technologies: Counteracting Students' Techno-Authoritarian Proof Schemes. I A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalova, Z. Lavicza, R. Weinhandl, A. Clark-Wilson & H.-G. Weigand (red.), *Proceedings of the Tenth ERME Topic Conference (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)* (s. 483-490). Johannes Kepler University. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02932218/document

Thomsen, M. & Jankvist, U.T. (2022). Mathematical Thinking in the Interplay Between Historical Original Sources and GeoGebra. I U.T. Jankvist, A. Clark-Wilson, H.-G. Weigand, R. Elicer & M. Thomsen (red.), *Proceedings of the 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching: Making and Strengthening "Connections and Connectivity" for Teaching Mathematics with Technology* (s. 189-196). DPU, Aarhus Universitet. https://doi.org/10.7146/aul.452

Thomsen, M. & Olsen, I.M. (2019). Original Sources, ICT and Mathemacy. I U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2060-2061). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University og ERME.

English abstract

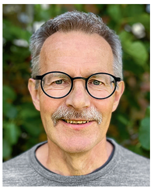
This article puts the concepts dynamic reading and structural understanding into play when it comes to working with the interplay between original sources and GeoGebra with the aim of supporting students' possibilities to develop their reasoning competency. Initially, arguments are given for working with the interplay between original sources and digital technologies. Then the concepts dynamic reading, structural understanding, and reasoning competency are unfolded. Excerpt from students' answers in a study carried out in 7th grade are analyzed with these concepts. Finally, reflections are made upon how the students' answers could have been used more actively in the teaching module.

Kommentarer

I denne sektion bringes kommentarer til tidligere bragte artikler. Kommentarerne skal være saglige, samt fagligt og analytisk funderede. Kontakt gerne redaktionen forinden indsendelse af kommentar. Indsendte kommentarer vurderes af redaktionen og er ikke genstand for peer-review.

Geografi i frit fald


Keld Conradsen, lektor ved læreruddannelsen på VIA


Poul Kristensen, lektor ved læreruddannelsen på UCL


Jette Reuss Schmidt, lektor og ph.d. ved læreruddannelsen på UCN

Kommentar til Brian Krog Christensens: "Hvad får eleverne til at vælge de naturvidenskabelige studieretninger i gymnasiet?", MONA, 2024(2).

Tak til Brian Krog Christensen for en interessant artikel om hvad der får eleverne til at vælge naturvidenskabelige studieretninger i gymnasiet (Christensen, 2024). I artiklen gøres der rede for hvordan der i disse år sker en forskydning i elevernes valg. Flere vælger studieretninger med biologi A og kemi B. Til gengæld vælger færre elever studieretninger med bioteknologi og niveauvarianter af matematik, fysik og kemi, mens næsten ingen vælger geovidenskab A hvor der undervises i højaktuelle emner som klima, energi, miljø og Jordens ressourcer.

Det sidste skyldes ikke mindst at kun få gymnasier udbyder geovidenskab A, men det giver også anledning til at reflektere over hvorfor så få vælger geovidenskab eller geografi. I gymnasiet er antallet af elever som vælger naturgeografi, under en tredjedel af antallet for de øvrige naturfag (se tabel 1).

Tabel 1. *Antal gymnasieelever i naturfag i 2021 (en årgang der må formodes at have betydning for antal geografistuderende på læreruddannelsen i 2024). Kilde: Børne- og Undervisningsministeriet, 2021.*

Fag	Antal gymnasieelever
Biologi A + B	13.198
Fysik A + B	13.345
Kemi A + B	13.699
Naturgeografi B (findes ikke på niveau A)	4.085

På læreruddannelsen er valgtallet for geografi aktuelt katastrofalt lave. Som det fremgår af tabel 2, er der store dele af landet hvor der slet ikke udbydes geografi.

Fra 2023 til 2024 faldt antallet af nyuddannede lærere med faget geografi med 30 % fra 149 til 119.

Tabel 2. *Antal studerende i geografi på UC'erne i 2024. Kilder: Censorformandskabet for Læreruddannelsen (2022, 2023) samt data fra professionshøjskolerne.*

UC – læreruddannelse	Antal geografistuderende til eksamen i 2024	Antal geografistuderende i efteråret 2024	Bemærkninger
UCL – Odense	17	12	Faget udbydes hvert andet år
UCL – Jelling	0	0	Faget udbydes hvert andet-tredje år
UC SYD – Esbjerg	0	Ikke oplyst	Faget udbydes hvert andet år
UC SYD – Haderslev	10	12	Faget udbydes hvert andet år
VIA – Aarhus	22	Ca. 75 fordelt på tre årgange	2024/25 er atypisk, og tallet falder snart drastisk[1]
VIA – Silkeborg	0	11	Faget udbydes hvert andet år
VIA – Skive	0	0	Faget har ikke været udbudt i flere år
VIA – Nr. Nissum	0	0	Faget har ikke været udbudt i flere år
UCN – Aalborg	14	0	Faget udbydes hvert andet år
UCN – Hjørring	0	0	Faget har ikke været udbudt i mange år
Professionshøj-skolen Absalon – Roskilde	0	6	Udbydes feb. 2024, feb. 2027 og feb. 2028
Professionshøj-skolen Absalon – Vordingborg	8	0	Udbydes feb. 2025 og feb. 2026, feb. 2029 og feb. 2030
KP	43	Ca. 100 fordelt på flere årgange[2]	

1 Det usædvanlig store antal geografistuderende i 2024/25 skyldes dels, at der dette år er to profilhold i naturfag, dels at der er overlappende andet og tredje undervisningsfag på to forskellige årgange.
2 Det forholdsvis høje antal skyldes muligvis en ekstraordinær rekrutteringsindsats.

Bl.a. som resultat af de få geografistuderende er kompetencedækningen i grundskolens geografi forholdsvis lav (tabel 3). Mere end hver fjerde der underviser i faget, har ikke en formel kompetence til det. Valgtallene fra de seneste års læreruddannelse viser at andelen af undervisere i geografi med kompetence formentlig vil falde betydeligt i de kommende år.

Tabel 3. *Kompetencedækning i udskolings-naturfag i grundskolen. Kilde: Børne- og Undervisningsministeriet.*

	Biologi	Fysik/kemi	Geografi
2012/13	78,2 %	93,7 %	66,3 %
2022/23	85,3 %	95,7 %	74,4 %

Det ser altså skidt ud over hele linjen. I det følgende vil vi pege på nogle af årsagerne til faldet i antal geografistuderende på læreruddannelsen. På grund af sammenhænge i uddannelsessystemets fødekæde er dette et problem som ikke kun vedkommer læreruddannelsen, men hele uddannelsessystemet og i sidste ende samfundet som sådan.

Læreruddannelsen og den generelle nedprioritering af geografi

Generelt har der været en politisk nedprioritering af geografifaget. Geografi er et lillebitte fag i Danmark: det mindste folkeskolefag af alle med blot 120 skemalagte timer fra 7. til 9. klasse. I gymnasiet bliver der i dag kun undervist i naturgeografi og ikke længere i kulturgeografi, og mange gymnasier udbyder slet ikke naturgeografi mere.

Nedprioriteringen har betydet at når de lærerstuderende skal vælge undervisningsfag, har de ikke kendskab til geografifagets kerne, som er at skabe forståelse for menneskets samspil med naturen – ifølge Stefan Hermann den ofte glemte passage i folkeskolens formålsparagraf (Hermann, 2023). De studerende ved ikke at geografi populært sagt bygger bro mellem natur og kultur, eller at geografi, når det får lov at fremstå i sin helhed, bidrager til at mindske den kløft mellem naturvidenskab og humanvidenskab som C.P. Snow skrev om i *The Two Cultures* i 1959 (Snow, 1962). For Snow var det nødvendigt at bringe de to kulturer sammen for at løse verdens problemer. Desværre inddrages kulturgeografien alt for sjældent i naturfaglige sammenhænge.

Det lave antal geografistuderende på læreruddannelsen kan ses som en umiddelbar konsekvens af at så få gymnasieelever undervises i naturgeografi på B-niveau. Derudover er der et problem med adgangskravene.

For at kunne læse geografi som undervisningsfag kræves der minimum A- eller B-niveau i ét af naturfagene biologi, fysik, kemi eller geografi. Tidligere har en del studerende med samfundsfag været tiltrukket af geografi fordi faget har god sammenhæng med kulturgeografien. Men desværre for geografi giver samfundsfag B ikke adgang til at vælge undervisningsfaget geografi på læreruddannelsen – en besynderlig politisk beslutning, ikke mindst i lyset af at elever fra HHX kan læse geografi med international økonomi på B-niveau.

HF-elever der på den toårige uddannelse har både geografi, biologi og kemi som obligatoriske fag, får ikke automatisk adgang til at læse disse fag da det kun er på C-niveau. Atter et benspænd for de elever der ønsker at studere geografi.

Hertil kan føjes at kulturgeografien ikke kun er forsvundet i gymnasiet. Da faget natur/teknik i 1993 blev indført i folkeskolens 1.-6. klasse, var det i stedet for fagene biologi og geografi. I de første fagbeskrivelser var kulturgeografien stadig en del af natur/teknik. I senere fagbeskrivelser for natur/teknologi er elementer fra kulturgeografi stort set forsvundet. I modsætning til landene omkring os møder de danske elever næsten ikke kulturgeografi før 7. klasse.

Hvorfor er faldet på læreruddannelsen så stort netop nu?

Der har gennem flere år været en tendens til at færre studerende vælger geografi på læreruddannelsen.

Tallene fra 2024 viser imidlertid en ekstraordinær nedgang, jf. tabel 2.

En vigtig årsag er formentlig at naturfagsprofilen hvor studerende kunne vælge alle tre naturfag i overbygningen, er ved at være udfaset rundtom i landet. For indeværende eksisterer den kun i Aarhus hvor den endda forsvinder med den gradvise implementering af den nye læreruddannelse og vil være væk om to år.

En anden væsentlig årsag kan være at der i den nye læreruddannelse ikke længere er naturfaglige elementer i det første studieår. Som Brian Krog Christensen (2024) har gjort rede for på gymnasieniveau, har forskellige former for introducerende naturfaglig undervisning stor betydning for elevernes/de studerendes valg. Dette gælder ikke mindst faget geografi hvor de studerendes forhåndsviden om fagets kerne, som beskrevet ovenfor, er stærkt begrænset.

Endelig har måden hvorpå fagintroduktionen fungerer, også en stor betydning. Vores erfaring er at hvis de studerende rent faktisk *bliver* orientereret om faget, hvis de møder dets mangfoldighed og muligheder og centrale placering i en bæredygtighedsdagsorden, vælger væsentlig flere det end tilfældet er nu. På KP kan man som det eneste sted spore fremgang i antal geografistuderende. Mulige årsager til det kan være en generel bevidsthed om at styrke trængte naturfag, at man har en fælles bæredygtighedsuge på første årgang, at man har lavet reklamefremstød for geografi, og endelig at man har dimensioneret antallet af studerende på de forskellige undervisningsfag så der er sat loft på de mest populære fag.

Paradoksal nedprioritering

Den ovenfor beskrevne nedprioritering af geografi er paradoksal. Hvis man bad en gruppe danskere om at pege på de største udfordringer verden står over for, ville de temmelig sikkert pege på problemer som klimaforandringer, den demografiske udvikling, migration, bæredygtighed, ressourcemangel, ulighed, mangel på interkulturel forståelse og globaliseringens øvrige udfordringer. Altså netop geografis kerneområder.

Når geografi er bedst, forstår man vores dybe afhængighed af naturen. Eksemplerne er utallige og giver sig selv: I geografi findes svaret på hvad klimaforandringerne skyldes, og hvad de kan komme til at betyde, hvordan vi håndterer den demografiske udvikling, hvordan vi bæredygtigt fanger torsk i Nordsøen og tun i verdenshavene, hvordan både naturmæssige og økonomiske interesser tilgodeses i forhold til vores sparsomme arealer, hvordan vi bedst udnytter de grønne energiressourcer, hvordan vi forebygger naturkatastrofer, osv. osv. I den antropocæne tidsalder er koblingen mellem menneske og natur forudsætningen for at forstå begrænsninger og muligheder for menneskers valg nu og i fremtiden.

Selvfølgelig kan geografi ikke alene løse verdens problemer, og der er da også overlap i det ovenstående til andre fag, og det er derfor rigtig godt med fortsat tværfagligt samarbejde. Men geografi har indhold og metoder som slet ikke udnyttes optimalt i tværfaglige sammenhænge – herunder STEM hvor kulturgeografi i høj grad kan bidrage med autentiske problemstillinger i forbindelse med inddragelse af socioscientific issues.

Vil geografi i Danmark en dag være helt væk? Vil fagets afgørende bidrag til omverdensforståelse og almendannelse snart være en saga blot? Forhåbentlig ikke, men afværgeforanstaltninger er nødvendige.

Hvad kan der gøres?

Vi argumenterer for at fagets grundlæggende problem er den manglende viden om det – som desværre ikke kun ser ud til at gå i arv, men på grund af den stadigt svagere fødekæde endda ser ud til at vokse. Politikere og beslutningstagere på ethvert niveau, undervisere, studerende og elever, i virkeligheden de fleste mennesker, ved ikke hvad faget indeholder. Alt for mange lider af den forældede og fejlagtige idé om at geografi handler om at kende lande, byer, hovedstæder, floder og bjerge. Den slags paratviden kan måske være nyttig nok og er i en eller anden grad en del af almendannelsen, men den er ikke fagets kerne.

Vi skal have brudt den negative arv i forhold til geografi, og vi skal have styrket fødekæden. Vi skal have styrket faget på alle niveauer. En start ville være at få timetallet i folkeskolen øget fra de nuværende blot 120 timer. I gymnasiet skal geografi være en obligatorisk valgmulighed på alle gymnasier og rangere på linje med de andre naturfag. På læreruddannelsen burde der indføres kvoter så der uddannes geografilærere nok, og læreruddannelserne rent faktisk leverer det skolerne har brug for. Kompetenceløftskurser i geografi er en oplagt mulighed. Og endelig kan det nævnes at samfundsfag på B-niveau bør give adgang til at læse geografi på linje med de øvrige naturfag.

Og selvfølgelig må vi som geografer blive bedre til at argumentere for fagets vigtighed, hvilket Brian Krog Christensens artikel har givet os en anledning til.

Referencer

Børne- og Undervisningsministeriet. (2021). *Studenters fagkarakterer og eksamensresultater på gymnasiale uddannelser*. https://uddannelsesstatistik.dk/Documents/Gymnasiale%20uddannelser/Registerdokumentation/KGY%20-%20Studenters%20fagkarakterer%20og%20eksamensresultater%20p%C3%A5%20gymnasiale%20uddannelser%20-%20Registerdokumentation.pdf

Børne- og Undervisningsministeriet. (U.å.). *Uddannelsesstatistik*. https://uddannelsesstatistik.dk/Pages/Topics/20.aspx?excel=2322

Censorformandskabet for Læreruddannelsen. (2022). *Censorformandskabet læreruddannelsen – årsberetning 2022*. Censorformandskabet for Læreruddannelsen. https://files.builder.nu/e6/78/e678a2ee-4a6e-430a-8a48-83bf14b4d629.pdf

Censorformandskabet for Læreruddannelsen. (2023). *Censorformandskabet for læreruddannelsen – årsberetning 2023*. Censorformandskabet for Læreruddannelsen. https://files.builder.nu/7d/f0/7df05ef1-cd1d-49f0-a9df-a136ea254095.pdf

Christensen, B.K. (2024). Hvad får eleverne til at vælge de naturvidenskabelige studieretninger i gymnasiet? *MONA, 2024*(2), 66-77. https://tidsskrift.dk/mona/article/view/144376/189722

Hermann, S. (2023). Grøn omstilling skal skrives ind i læreplanerne. *Skolemonitor*, 20. december 2023. https://skolemonitor.dk/debat/art9669479/Gr%C3%B8n-omstilling-skal-skrives-ind-i-l%C3%A6replanerne

Snow, C.P. (1962). *The Two Cultures and the Scientific Revolution*. Cambridge University Press.

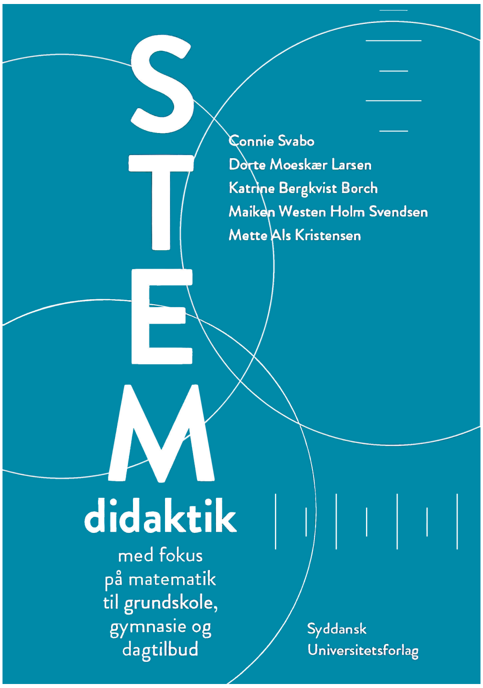
Litteratur

I denne sektion bringes anmeldelser af og notitser om nye bøger, rapporter og andre væsentlige ressourcer inden for det matematik- og naturfagsdidaktiske felt. Læsere opfordres til at kontakte redaktionen med henblik på at få bragt anmeldelser og notitser. Indlæg er ikke genstand for peer-review.

Ny bog giver et fælles sprog for og en fælles forståelse af STEM-undervisning på tværs af uddannelseskæden

Maria Møller,
Professionshøjskolen
UCN

Anmeldelse af STEM-didaktik *af Connie Svabo, Dorte Moeskær Larsen, Katrine Bergkvist Borch, Maiken Westen Holm Svendsen og Mette Als Kristensen. Udgivet af Syddansk Universitetsforlag, 2024.*



STEM er på den uddannelsespolitiske dagsorden i hele verden. Men hvordan STEM-undervisning skal operationaliseres i en dansk kontekst, er stadig uklart. Derfor er det med stor glæde at jeg har læst og forholdt mig til bogen *STEM-didaktik*. Bogen er nemlig et bud herpå.

Forfatternes formål med bogen er at samle international forskning inden for STEM-uddannelse og oversætte den til en dansk kontekst. Gennem projektet LabSTEM har forfatterne samarbejdet med pædagoger og lærere om at udvikle STEM-aktiviteter og -forløb gennem en række workshops, som de kalder laboratorier. Dermed indeholder bogen konkrete undervisningseksempler fra praksis.

Bogen indeholder en introduktion og tre dele fordelt på ti kapitler. Første del (kapitel 1 til 5) handler om STEM-didaktik med fokus på matematik. Anden del (kapitel 6 til 8) handler om anvendelse af STEM-didaktik i henholdsvis dagtilbud, grundskole og de gymnasiale uddannelser, og tredje del (kapitel 9 og 10) sætter fokus på STEM som omdrejningspunkt for faglig udvikling, herunder STEM-lærerkompetencer.

Koblingen mellem international forskning og en række konkrete eksempler på STEM-aktiviteter tiltænkt dagtilbud, grundskole og de gymnasiale uddannelser gør at bogen er et relevant bidrag til studerende, undervisere og forskere der arbejder pædagogisk og didaktisk med de faglige perspektiver der kan siges at falde ind under STEM. Det er en kvalitet at der efter hvert kapitel findes en litteraturliste med den anvendte forskningslitteratur. Det giver læseren mulighed for at dykke ned i den litteratur der understøtter bogens STEM-didaktiske pointer.

Jeg vil i det følgende lave fem nedslag hvor jeg finder bogens indhold særlig relevant. Til slut kommer jeg med forslag til hvordan pædagoger og undervisere kan anvende bogen til udvikling af egne STEM-aktiviteter.

Det første nedslag er *introduktionen*. Her gives en introduktion til STEM-dagsordenen som er til stede i den uddannelsespolitiske debat. Det er væsentligt at bemærke at forfatterne markerer relevansen af STEM både i forhold til mangel på fremtidig arbejdskraft inden for STEM-fagene og i forhold til at STEM kan være bidragsyder til børn og unges almendannelse. Fx fordi STEM byder ind med en holistisk og systematisk måde at forholde sig til verdens kompleksitet og fagoverskridende problemstillinger og kriser på (s. 23). Introduktionen giver et fint overblik over STEM og de kendetegn STEM-undervisning har. Fx fremhæver forfatterne at STEM er tværfagligt og har fokus på deltagelse, og at der skal være fokus på M'et (matematik), men samtidig være en fornuftig balance mellem de forskellige fagområder. Har man i sit team mod på at gå i gang med at udvikle STEM-aktiviteter, bør introduktionen læses som det første.

Mit andet nedslag er *kapitel 2: Hvad er STEM?* Her gives en forklaring på hvordan hovedområderne S, T, E og M kan forstås i en dansk kontekst. Kapitlet giver læseren en forståelse af at STEM-akronymet ikke er entydigt, og at det kan fortolkes forskelligt afhængigt af kontekst. Kapitlet er relevant at læse fordi det giver blik for at du som studerende, underviser eller forsker er nødt til at forholde dig til din egen forståelse af STEM før du kan udvikle og gennemføre STEM-undervisning.

Kapitel 3: Didaktiske principper for STEM-aktiviteter er mit tredje nedslag. Kapitlet er et væsentlig bidrag til praksis fordi det præsenterer fem velbegrundede principper for helhedsorienteret STEM-undervisning (s. 65-66). De fem principper er:

1. STEM-aktiviteter skal være en væsentlig bidragsyder til udvikling af almen dannelse.
2. STEM-aktiviteter skal have deltageren i centrum.
3. STEM-aktiviteter skal handle om omverdenen.
4. STEM-aktiviteter skal understøtte den læring der arbejdes med på det pågældende trin.
5. STEM-aktiviteter skal integrere to eller flere af hovedområderne i STEM på en meningsfuld måde.

På baggrund af principperne har forfatterne udviklet et STEM-rammeværk som kan anvendes i udviklingen af STEM-aktiviteter (s. 80).

Det er min vurdering at både principper og rammeværk kan virke overvældende idet der er meget at forholde sig til. Jeg vil derfor foreslå at studerende og undervisere der skal til at i gang med at udvikle STEM-aktiviteter, lader nogle principper stå i forgrunden og andre i baggrunden. Fx ved i første omgang at fokusere på princip 3, 4 og 5. Efterhånden som man får erfaringer med gennemførelsen af STEM-aktiviteter, kan flere principper inddrages.

Det fjerde nedslag er *kapitel 5: Matematikkens rolle i STEM*. Kapitlet sætter fokus på matematisk modellering som en tilgang til at øge matematiks tilstedeværelse i STEM og på hvilke forskellige roller matematik kan have i STEM-forløb. Kapitlet er særligt relevant fordi forfatterne både giver bud på hvordan matematik kan indgå i STEM-forløb, og påpeger de udfordringer der kan være derved. Fx at matematik ofte bliver anvendt som et redskab. Min anbefaling vil være at undervisere fastsætter matematisk modellering som et af de faglige mål for STEM-undervisning. Min vurdering er at dette vil gøre det meningsfuldt for undervisere i matematik at indgå i et samarbejde med naturfagslærere om at udvikle STEM-aktiviteter fordi matematikkens rolle som redskab reduceres.

I kapitel 6, 7 og 8 præsenteres STEM-rammeværket separat i relation til henholdsvis dagtilbud, grundskole og gymnasie. Flere konkrete eksempler inden for de tre uddannelsesniveauer giver et autentisk indblik i hvordan STEM-undervisning konkret kan operationaliseres. Kapitlerne er bestemt værd at læse inden du selv skal i gang med at udvikle eller gennemføre STEM-forløb på et givent uddannelsestrin.

Mit femte og sidste nedslag er *kapitel 9: Lærerkompetencer*. Kapitlet sætter fokus på hvad der skal til for at undervisere i matematik og naturfag føler sig kompetente til at undervise i integrerede STEM-aktiviteter. Herunder også de udfordringer og muligheder der altid dukker op når nye undervisningstiltag implementeres. Med afsæt i forfatternes praksissamarbejde fremkommer det at det fx kan være en udfordring for lærere at gennemføre forløb som ligger uden for deres egen faglige ekspertise, men også at det kan være svært at integrere de forskellige fagligheder i STEM. Også elementer som grader af elevfrihed og manglende tid, materialer, teknologier og rammer betegnes som udfordringer. Til sidst i kapitlet beskriver forfatterne forskellige STEM-lærerkompetencer, og disse lægger op til at der sker en ændring i fagkulturen i forbindelse med STEM-lærerudvikling. Dette kalder på at vi både på professionsuddannelserne og i efter- og videreuddannelse igangsætter initiativer som bidrager til at flere lærere føler sig kompetente til at indgå i et samarbejde om at udvikle og gennemføre STEM-aktiviteter og -forløb.

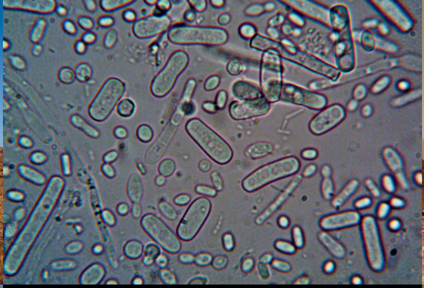
Det er min samlede vurdering at bogen *STEM-didaktik* er et relevant fagligt bidrag til at diskutere og udvikle STEM-didaktik på tværs af det danske uddannelsessystem. Og jeg vil klart anbefale bogen.

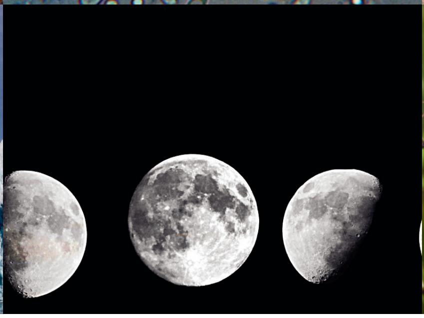
Som en afsluttende bemærkning giver jeg mit bud på hvordan studerende, pædagoger og undervisere kan inddrage bogen som afsæt til at komme i gang med at udvikle og gennemføre STEM-aktiviteter.

Aftal et teammøde (1 time) med STEM som udgangspunkt:

1. Alle har læst introduktionen + kapitel 2 og 3 forud for mødet.
2. De fem didaktiske principper (s. 65-66) samt STEM-rammeværket (s. 80) printes i A3.
3. Følgende diskussionsspørgsmål rammesætter mødet:
   - *Hvilke muligheder og udfordringer ser du ved STEM i forbindelse med din egen praksis og/eller uddannelse?*
   - *Hvordan kan du se dit fag/din faglighed komme i spil i de forskellige måder at arbejde med STEM-aktiviteter på?*
   - *Hvilke didaktiske principper er de væsentligste?*
   - *Hvordan kan STEM-rammeværket støtte os i at komme i gang med at udvikle eller afprøve STEM-aktiviteter?*
4. Planlægningsproces:

- Hvornår kan vi udvikle og planlægge forløbet sammen? (2 gange 2 lektioner).
- Hvornår kan aktiviteterne gennemføres? I en temauge? I forbindelse med udeskole? (1-6 lektioner i alt).
- Hvornår og hvordan evaluerer vi STEM-aktiviteterne? (1 lektion).
- Følgende spørgsmål kan anvendes til evalueringen:
  - *På hvilken måde arbejdede børnene/eleverne med de opstillede mål? Giv konkrete eksempler.*
  - *Hvilke af de fem didaktiske principper (s. 65-66) var i forgrunden? Hvilke var mindre synlige?*
  - *Hvilke udfordringer oplevede vi undervejs?*
  - *På hvilke punkter skal vi være særlig opmærksomme i næste STEM-forløb?*


Byg videre på din læreruddannelse

BLIV EKSPERT I STEM-UNDERVISNING

Kandidatuddannelsen i STEM-undervisning (Science, Technology, Engineering & Mathematics) giver dig nye kompetencer og nye muligheder. Du bliver ekspert i at bringe den nyeste naturvidenskabelige forskning i øjenhøjde med børn og unge – både i din undervisning som lærer og i helt nye roller.

Du kan tage uddannelsen uanset hvor i landet du bor. Uddannelsen er gratis, SU-berettiget og kan læses både som kandidat og erhvervskanditat.

Find mere information på studier.ku.dk/stem.

Er du uddannet lærer?
Tag uddannelsen som en erhvervskandidat og få fornyet din faglighed og din undervisning fra dag et. Som erhvervskandidat kan du undervise ved siden af uddannelsen og afprøve dine nye værktøjer med det samme. Du har et kursus per semester i fire år.

Er du lærerstuderende?
Byg videre på din professionsbachelor og giv dig selv flere karrieremuligheder. Hvis du læser kandidaten på fuld tid over to år, har du to kurser per semester.

Kandidaten har givet mig en helt anden åben tilgang til fagene. Jeg har lært at se ting på andre måder og prøve nye ting af.
- Simon, færdiguddannet i 2022

Det har givet mig venskaber og netværk på tværs af landet, og det kan jeg helt sikkert bruge.
- Anja, færdiguddannet i 2022

Jeg har fået rigtig meget med mig, som jeg kan bruge i praksis og som beriger min professionelle hverdag.
- Pia, færdiguddannet i 2022

AARHUS UNIVERSITET

RUC

AALBORG UNIVERSITET

DANSKE PROFESSIONS-HØJSKOLER

SDU

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Har du en ide til en artikel i MONA?

Tag med på MONAs Skriveworkshop for forfattere. Du får tre timers kickoff og individuel sparring på dine artikeludkast de næste tre måneder.

To erfarne kapaciteter inden for artikel-, opgave- og lærebogsskrivning, Lotte Rienecker og Peter Stray Jørgensen, guider dig igennem fra artikelidé til aflevering til MONA. Få redskaber til strukturering af artiklen, og få feedback på udkast - alt sammen skræddersyet til MONA's profil for udgivne artikler.

Workshop og feedback forudsætter blot at du har en idé - eller et halvt manuskript - til en artikel som du gerne vil i gang med, eller vil have afsluttet, til netop MONA.

Efter workshoppen er der mulighed for i tre måneder at få individuel feedback og vejledning på dine artikeludkast.

Tilmeld dig på
ind.ku.dk/mona/skriveworkshop

Det er gratis at deltage, men du betaler selv transport.

Skriveworkshoppen er gjort mulig via en bevilling fra Novo Nordisk Fonden til MONAs arbejde med kvalitetsudvikling.

22. oktober 2024
13:30-16:30
VIA, Campus Ceres
Ceresbyen 24, 8000 Aarhus.

INDsigt

Kom med til seminar i naturfagsdidaktik

INDsigt er en offentlig seminarrække fra Institut for Naturfagenes Didaktik.

Der afholdes 4 seminarer pr. semester med fokus på hhv. grundskole, gymnasiale uddannelser, universitet og uformelle læringsmiljøer.

Se mere her for program og tilmelding