

Matematikbroen: brobygning for elever gennem efteruddannelse for lærere



Britta Eyrych Jessen, IND, KU



Carl Winsløw, IND, KU

Abstract: Denne artikel præsenterer de fagdidaktiske idéer der er omdrejningspunkt for aktiviteterne i projektet "Matematikbroen – fra grundskole til gymnasium". Projektet er baseret på begreber fra den antropologiske teori for didaktik (ATD) hvor særligt begrebet matematisk "teknik" er blevet brugt til at identificere hvilke faglige elementer der volder eleverne udfordringer i overgangen. Samme begreb blev brugt i tilrettelæggelsen af efteruddannelse af lærerne med det formål at skabe en bedre overgang i matematik for eleverne. I denne artikel vil vi præsentere hvordan teknikbegrebet er blevet brugt i design af et efteruddannelsesstilbud samt undervisningsmaterialer til brug i grundskolens afsluttende klassetrin.

Introduktion

Det er velkendt at mange elever oplever faglige udfordringer i matematik ved overgangen fra folkeskole til gymnasium. Mathiasen m.fl. (2009) undersøgte overgangen på langs af uddannelsessystemet for fagene dansk, engelsk og matematik. I rapporten argumenteres der for at der er god sammenhæng mellem de rent formelle beskrivelser af matematikundervisningen (læreplaner mv.) i de forskellige institutionelle rammer (grundskole, gymnasium og universitet), fx at der ikke er store spring i kompetencebeskrivelserne af matematik på de forskellige uddannelsesstrin (Mathiasen et al., s. 128). Men en anden af rapportens delundersøgelser viser at de nystartede gymnasieelever og deres lærere har helt forskellige opfattelser af hvor godt fagligt forberedte eleverne er på at starte i gymnasiet. Eleverne har således et betydelig mere positivt indtryk af egne færdigheder i at anvende simple statistiske modeller, at anvende variabelsammenhænge/funktionsudtryk, at gennemføre matematiske ræsonnementer og at demonstrere viden om matematikkens udvikling. En undtagelse fra dette billede er at lærerne i højere grad end eleverne vurderer at

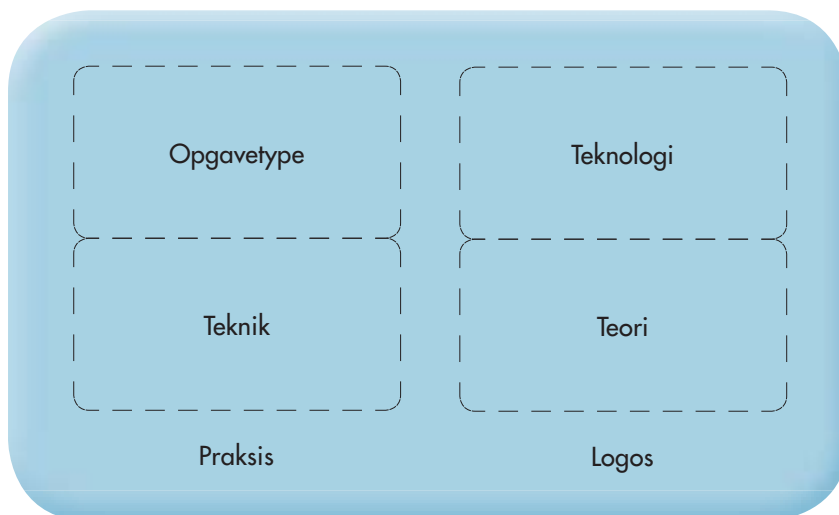
eleverne er gode til at anvende IT-værktøjer i matematik (Mathiasen et al., s. 77). Denne undersøgelse blev fulgt op af en rapport af Ebbensgaard, Jacobsen og Ulriksen (2014) der undersøgte elevperspektivet på vanskelighederne ved overgangen fra grundskole til gymnasium. Her skiller matematik sig ud som et fag der i høj grad opleves som sværere og anderledes i gymnasiet ift. faget i folkeskolen. For en del elever forekommer matematikfaget i gymnasiet uoverskueligt; nogle kommer med udsagn som at “alt er svært”, og at lærerne i gymnasiet ikke er gode til at forklare det som eleverne finder svært. Rapporten udkaster den formodning at disse oplevelser kan skyldes forskelle i hvordan styringsdokumenterne i de to skoleformer forvaltes (Ebbensgaard et al, 2014) eftersom der som sagt synes at være en god formel sammenhæng i fagbeskrivelserne, og at disse forskelle kan henføres til skolekulturer og lærernes uddannelsesmæssige baggrund. Begge rapporter peger også på at eleverne mangler sikkerhed i visse basale færdigheder – specielt i basal algebra og anvendelse heraf i modellering og i enkle matematiske ræsonnementer. Denne viden har været med til at forme projektet Matematikbroen som drejede sig om at udvikle og afprøve bestemte initiativer mhp. at afhjælpe de nævnte forhindringer i overgangen fra skolens til gymnasiets matematik.

Inden for matematikdidaktisk forskning har overgangen fra aritmetik til skolealgebra været studeret fra forskellige teoretiske vinkler, herunder ift. de muligheder og udfordringer der knytter sig til brug af computerværktøjer (se fx Filloy & Rojano, 1989; Balacheff, 2001; Kieran, 2008). Inden for den antropologiske teori for didaktik (ATD) har der længe været forsket i historiske og kulturelle aspekter af elevvanskeligheder med skolealgebra (se fx Bosch, 2015). Der er også foretaget undersøgelser af både den aktuelle undervisningspraksis i emnet og alternative tilgange baseret på modellering i en videre forstand end simpel “ekstramatematisk anvendelse” (Ruiz-Munzón et al., 2013; García & Higuera, 2006; Bolea et al., 2004). ATD-forskningen er baseret på eksplicitte modeller af skolealgebraisk indhold. Ved brug af sådanne modeller er det muligt at identificere faglige sammenhænge der mangler i aktuel undervisningspraksis og hvordan dette kan lede til elevvanskeligheder. Modellerne er baseret på prakseologibegrebet der er en del af ATD; dette begreb er også en central del af det teoretiske grundlag for aktiviteterne i Matematikbroen. Denne artikel drejer sig om at beskrive nogle hovedtræk af dette projekts idéer og resultater.

Prakseologibegrebet og ATD

En grundantagelse i ATD er at al menneskelig aktivitet kan beskrives vha. prakseologier. Når vi mødes på gaden og hilser på en ven, kan dette gøres ved en række forskellige handlinger: fx håndtryk, nik eller kindkys (praksis). Selve handlingen kan beskrives og begrundes nærmere (logos): Valget af handling afhænger fx af

den personlige relation og af tradition og kultur hos dem der udfører handlingen. En prakseologi består altså af “praksis” (det vi gør) og “logos” (overvejelser og beskrivelser af det vi gør).



Figur 1. Figur 1 viser hvordan en matematisk prakseologi er opbygget af en handlingsdel kaldet praksis samt systematisk beskrivelse og begrundelse af handlingerne kaldet teori. Figurens øvrige ord forklares nedenfor.

Når vi taler om matematikfagets aktiviteter, deler vi yderligere de to komponenter op. Praksis består af en opgavetype og de teknikker der løser opgavetypen. En opgavetype kunne være: Find overfladearealet af en cylinder der er åben i begge ender, med længden l og diameteren d . Denne opgavetype kan løses ved at bruge formlen: πdl . Dette er en teknik til at løse alle opgaver af den nævnte type. Den er tæt relateret til to andre teknikker som bruges til at beregne arealet af et rektangel og omkredsen af en cirkel. Man kan “klippe” cylinderen op på langs og få et rektangel der har arealet $A = lb$ hvor bredden, b , er lig omkredsen af cirklen med diameter d : $O = \pi d$. I ATD vil man sige at det her skitserede argument for at formlen $A = \pi dl$ løser opgavetypen, udgør prakseologiens “teknologi”. Dette ord har altså her intet at gøre med elektronisk udstyr. Teknologi er her artikulationen af hvordan og hvorfor teknikker løser en given opgavetype. Teknologien er den ene del af prakseologiens logos. Den anden del er teorien der er et højere niveau af begrundelser som typisk er baseret på en mere formel matematisk diskurs (fx formelle definitioner, beviser mv.). I eksemplet med cylinderen kan en sådan teori handle om mere almene definitioner og resultater vedr. “mål” af plane og rumlige geometriske figurer.

Prakseologiens delelementer	
Opgavetype	Dette er en klasse af opgaver med fælles træk og metoder. Dermed kan der være flere opgaver tilhørende en opgavetype, fx at løse ligninger af formen $ax + b = cx + d$.
Teknik(ker)	Teknik er den eller de teknikker opgavetypens løsning kræver. Det kan være en formel som angivet ovenfor, en regneregul eller en sætning der tidligere er blevet begrundet i undervisningen (fx Pythagoras' sætning). Afhængigt af hvilken opgavetype der er tale om, kan der være forskellige samlinger af teknikker der løser en opgave. Nogle gange kan en opgave løses algebraisk såvel som geometrisk. Dette vil give anledning til to forskellige prakselogier forankret i to forskellige teoriblokke og med to forskellige teknologier.
Teknologi	Teknologien indeholder en direkte beskrivelse og forklaring af teknikkerne, herunder ofte sammenligning af disse (hvornår er hvilken bedst etc.). Disse vil i mange skolesammenhænge være meget uformelle og uden nærmere begrundelser. Følger eleverne blot en metode beskrevet i bogen eller givet af læreren, vil de sjældent se et behov for mere. Skal man imidlertid studere den matematiske aktivitet som elever præsenteres for, kan det være relevant at udfolde en løsningsstrategi ved at se på prakselogiens teknologi.
Teori	Teorien er en diskurs der muliggør begrundelse og sammenkædning af teknologier, herunder begreber, metoder og resultater.

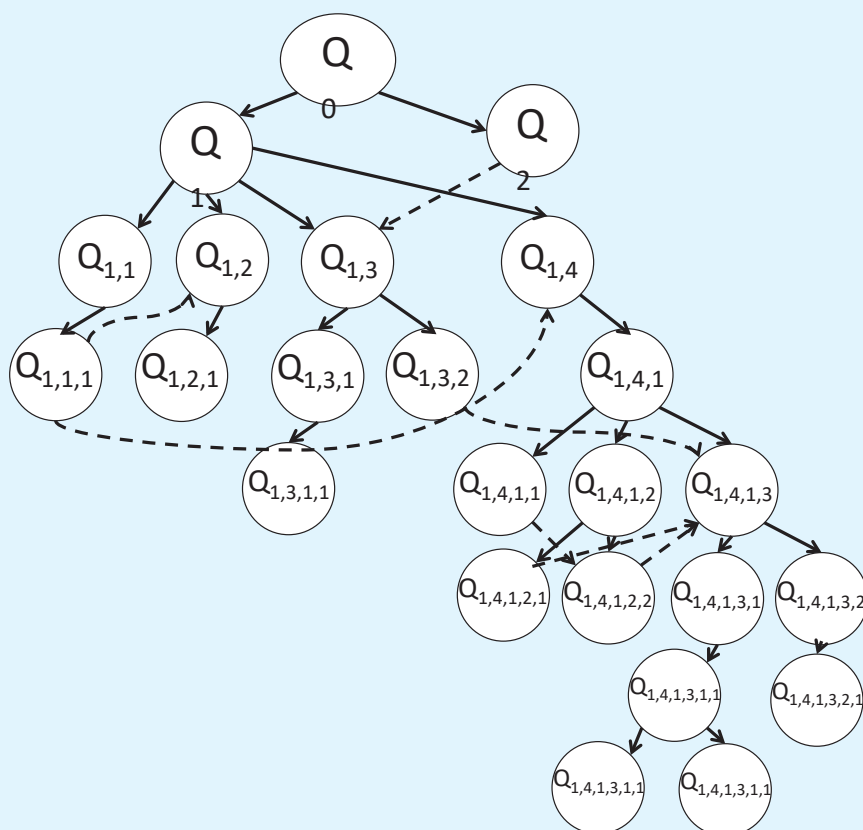
Tabel 1. Tabellen viser en mere skematisk præsentation af prakselogibegrebet.

Prakseologier er knyttet til hinanden ved at nogle prakselogier deler teknikker. Opgavetypen, "find overfladearealet af en cylinder der er lukket i begge ender", vil ligeledes kunne trække på den ovenfor beskrevne teknik. Den prakselogi der løser opgavetypen med den lukkede cylinder, vil altså dele teknik med prakselogien der løser opgavetypen med den åbne cylinder. Prakseologier kan ydermere dele teknologi eller teori. Gennem disse delte elementer er prakselogierne forbundet. Det er almindeligt at nye prakselogier dannes mhp. på at "modellere" andre prakselogier: Fx kan aritmetiske beregninger af kapitalvækst modelleres vha. algebraiske prakselogier (se García & Higuera, 2006, s. 1647). Praksisdelen af den algebraiske prakselogi vil fx her kunne bruges til at systematisere logisdelen af den aritmetiske. I ATD er modellering således en essentiel mekanik i opbygning og sammenkædning af prakselogier. Modellering i ATD-forstand handler således ikke kun om at beskrive "ekstramatematiske" fænomener vha. matematik, og teorien indeholder i øvrigt ikke antagelser om at der findes en skarp eller naturlig skillelinje mellem matematiske og ikkematematiske prakselogier – fx tages der ikke stilling til om prakselogier der

vedrører kapitalvækst, er matematiske eller fx først bliver det når der anvendes tal eller symboler. Men modellering vil alligevel ofte – også i denne artikel – indebære at fænomener gennem modellering får en beskrivelse som i højere grad kan trække på prakseologier som er centrale i matematikfaget.

I projektet Matematikbroen valgte vi primært at fokusere på niveauet “teknik” idet

Studie- og forskningsforløb (SFF)



Figur 2. Figuren viser hvordan det genererende spørgsmål, Q , giver anledning til at eleverne stiller afledte spørgsmål der gennem elevernes egen besvarelse giver anledning til udviklingen af en prakseologi. Der er et illustrerende eksempel senere i artiklen, jf. figur 6.

Et studie- og forskningsforløb igangsættes af et genererende spørgsmål som kan give anledning til at eleverne stiller yderligere spørgsmål til det genererende spørgsmål og det emne som det berører. Disse “afledte spørgsmål” rummer potentialet for at eleverne udvikler prakseologier som spørgsmålene er knyttet til. De spørgsmål som eleverne stiller, reduceres til sidst til en opgavetype (nogle i deres natur væsentlig større end eksemplet med cylinderen), og elevernes besvarelse baseres således på de teknikker der løser opgavetypen, begrundet via (dele af) teknologien. Det vil sige, med udgangspunkt i et genererende spørgsmål gives eleverne muligheden for at undres, stille spørgsmål og gennem egen besvarelse af disse konstruere ny viden.

hensigten var at give lærerne et værktøj til at analysere elevernes matematiske praksis samt til at analysere mulige forbindelser mellem forskellige opgaver og mellem forskellige løsningsstrategier. Ydermere trækker modelleringsaktiviteterne på formatet studie- og forskningsforløb (SFF) der er et designredskab baseret på praksieologibegrebet. Idéen er at man stiller eleverne et åbent spørgsmål der muliggør at eleverne udvikler mere afgrænsede faglige delspørgsmål som de selv kan besvare (Chevallard, 2015; Jessen, 2014). Hvordan disse teorier blev fortolket og udrullet i Matematikbroen, gives der et konkret eksempel på ovenfor.

Inden vi præsenterer de konkrete eksempler, vil vi give en kort præsentation af projektet og dets rammebetingelser.

Projektet og dets rammebetingelser

Matematikbroen er et efteruddannelsesprojekt for grundskolelærere i Silkeborg og Københavns Kommuner der sammen med A.P. Møller Fonden har finansieret aktiviteterne. Aktiviteterne har været målrettet at hjælpe lærerne med at forberede deres elever bedst muligt på overgangen fra grundskolens til gymnasiets matematik. Man kan argumentere for at en overgangsproblematik bør angribes fra begge ender af broen. Rammerne for fondens bevillinger tillod imidlertid kun kursusaktiviteter for grundskolelærere hvorfor gymnasiesiden ikke eksplicit berøres i denne artikel.

Projektet er blevet styret af en gruppe bestående af repræsentanter fra Silkeborg Kommune, Silkeborg Gymnasium, Københavns Kommune, Gefion Gymnasium samt Institut for Naturfagenes Didaktik (IND) på Københavns Universitet. Styregruppen udpegede en projektgruppe der bestod af undervisere fra folkeskoler i Silkeborg og Københavns Kommuner, Silkeborg og Gefion Gymnasium samt læreruddannelsen i Silkeborg, VIA, og København, UCC, og IND (Jessen et al., 2017, s. 5). Projektgruppen mødtes ved to seminarer hvor flere deltagere delte deres erfaringer med overgangsproblematikken i matematik. IND-gruppen supplerede dels med den eksisterende danskviden på området, dels med idéer til matematikdidaktiske redskaber (ATD) der kan bruges af lærerne, og eksempler på formater for deling af lærerviden. Sidstnævnte var inspireret af den japanske tradition for lektionsstudier (se yderligere Rasmussen, 2016; Østergaard, 2016; Bahn, 2015). Fokus i oplæggene lå på lærernes fælles forberedelse af materialer, fælles observation af undervisning samt fælles refleksion med henblik på videreudvikling af undervisningen (se Isoda et al., 2007).

Udformning af et efteruddannelsestilbud

På baggrund af oplæggene fra IND, deltagernes daglige arbejde og eksisterende undervisningsmaterialer blev der udviklet materialer der er frit tilgængelige på projek-

tets hjemmeside (Matematikbroen, 2015). Projektgruppen designede efteruddannelseskurset der dækkede introduktion til overgangsproblematikker, "teknikanalyse", undervisningsmaterialer og idéen om hvordan lærerne i fællesskab gennem undervisningsobservation og refleksion kunne fastholde og hjælpe hinanden med at få implementeret de udviklede undervisningsmaterialer. Undervisningsmaterialerne blev præsenteret ved at lærerne selv skulle prøve materialerne (fx et SFF om taltricks) af og derefter opskrive de mulige strategier deres elever antageligt ville gribe til når de blev stillet de enkelte opgaver. Resultaterne af øvelserne blev delt lærerne imellem så lærerne kunne dele erfaringer om hvordan man kan støtte eleverne i de mere åbne undervisningssituationer. De to første kursusdage blev fulgt op af projektgruppemedlemmers besøg på grundskolerne (i det omfang det skemateknisk lod sig gøre) hvor erfaringer og udfordringer blev delt. Efterfølgende blev der afholdt en heldags- og en halvdagsworkshop med erfaringsudveksling, udvikling og udlevering af nye undervisningsmaterialer. I alt deltog 83 lærere i de to kommuner (Jessen et al., 2017, s. 21). Evalueringen af kursusaktiviteterne var overvejende positiv, og kommunerne valgte at fortsætte med at udbyde efteruddannelsesdelen til nye hold af lærere i begge kommuner.

Effektmåling af efteruddannelsestilbuddet

IND lavede en mere formel test af indsatsens effekt. Samme efterår som kursusaktiviteten startede, testede vi 42 1. g-elever fordelt på de to gymnasier. Eleverne var tilfældigt valgt blandt 1. g'erne (Jessen et al., 2017, s. 42). Eleverne blev testet i de teknikker der er i spil i overgangen fra grundskole til gymnasium. Kun IND havde adgang til testen og kendte dens resultater. I det efterfølgende skoleår blev 42 nye 1. g-elever testet med de samme opgaver i den samme uge af skoleåret. Eleverne var tilfældigt udtrukket blandt de af kursusdeltagernes elever som var blevet optaget på de to gymnasier. De elever hvis lærere havde deltaget i Matematikbroen (altså fra det andet år), klarede sig bedre i testen på begge gymnasier. Særlig stor var fremgangen på Gefion Gymnasium hvor eleverne havde klaret sig væsentlig dårligere det første år. Der er indikationer i testresultaterne på at særligt de svage elever har haft glæde af Matematikbroens undervisningsmaterialer og har oparbejdet en større sikkerhed i basal algebra. Testen består af opgaver som systematisk tester teknikker fra den eksplicitte model af skolealgebra (Poulsen, 2015; se også nedenfor). Detaljer om testen og dens resultater findes i projektets afsluttende rapport (Jessen et al., 2017). Pointen med resten af denne artikel er at uddybe anvendelsen af teknikbegrebet i Matematikbroens efteruddannelsestilbud.

Teknikanalyse som lærerredskab

Resten af denne artikel beskriver hvordan efteruddannelsesstilbuddet i Matematikbroen kan hjælpe lærere til at designe og analysere matematikopgaver og aktiviteter således at aktiviteterne bedst muligt støtter elever i overgangen fra grundskole til gymnasium. Mere præcist ønsker vi at adressere følgende spørgsmål:

Hvordan kan man designe matematikundervisning der støtter eleverne i at udvikle de matematiske teknikker som (når de mangler) giver vanskeligheder i overgangen fra grundskolens til gymnasiets matematik?

For at kunne besvare ovenstående spørgsmål kræves en mere præcis beskrivelse af hvad der menes med basal skolealgebra, og ikke mindst en afgrænsning af hvilke dele af dette emne der er relevant for overgangen fra grundskole til gymnasium.

Dette blev undersøgt af Poulsen (2015) i en specialerapport udført under vejledning af denne artikels forfattere. I rapporten analyseres 50 opgaver fra folkeskolens afgangsprøver for 9. klasse fra 2013 og 2014, ti opgaver fra screeningstesten som Silkeborg Gymnasium anvender i starten af 1. g, samt opgaver fra to lærebøger i matematik for 1. g. Begrundelsen for at analysere opgaver fra afgangsprøverne er at større centralt stillede afsluttende prøver har en direkte effekt på undervisningen (se fx Schoenfeld, 1988) og på en måde giver et billede af det "minimalt realiserede opgaveinventar" for matematik i 9. klasse. De mangeårige erfaringer med brobygningen i matematik i Silkeborg har bl.a. ført til en screeningstest der giver et billede af hvad Silkeborg Gymnasium forventer af 1. g-eleverne. Poulsen analyserede også mere end 100 opgaver fra 1. g-lærebøgerne (2015, s. 35) hvilket giver et billede af hvad der arbejdes med på dette niveau, og specielt hvad eleverne lærer ved indgangen til matematikundervisningen i gymnasiet. Analysen gav anledning til identifikation af 89 teknikker der tilsammen udgør en referencemodel for skolealgebraisk praksis i overgangen fra grundskole til gymnasium (Poulsen, 2015, s. 64); nogle eksempler på teknikker som indgår, er gengivet i figur 3.

Mange af teknikkerne er regneregler, regneregler for brøker eller varianter af den distributive lov. Men en teknik kan også angå at aflæse hældningen for grafen for en lineær funktion når denne er vist i et koordinatsystem. Referencemodellen rummer desuden oplysninger om i hvilke materialer teknikken er identificeret som værende nødvendig hvilket er gengivet i søjlerne længst til højre i figur 3. Referencemodellen var med til at danne grundlaget for udviklingen af de undervisningsmaterialer som kursusdeltagerne blev introduceret til under efteruddannelsesaktiviteterne. Hensigten har været at designe opgaver hvis løsning kræver at eleverne har udviklet de teknikker som er repræsenteret i alle tre materialetyper.

Categorization	Techniques	FSA	ST	stx
Laws	τ_1 : Associative law for multiplication	X	X	X
	τ_2 : Commutative law for multiplication	X	X	X
	τ_3 : Distributive law $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	X	X	X
Hierarchy	τ_4 : $\cdot$ and $:$ before $+$ and $-$	X	X	X
	τ_5 : Roots and powers before $+$, $-$, $\cdot$, $:$	X	X	X
	τ_6 : Brackets before all other arithmetic operations	X	X	X
Equation solving	τ_7 : $+$, $-$, $\cdot$, $:$ on both sides of the equality sign	X	X	X
	τ_8 : Multiply crosswise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$			X
	τ_9 : Set two expressions equal to each other	X		X
	τ_{10} : Subtract two equations from each other	X		X
	τ_{11} : Substitution of algebraic expressions	X		X
	τ_{12} : Zero divisor law $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$			X
	τ_{13} : Take logarithm on both sides of $=$			X
	τ_{14} : Multiply crosswise reverse $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$			X
	τ_{15} : $x^n = c \Rightarrow x = \sqrt[n]{c}, n \in \mathbb{R}$	X		X

Figur 3. Figuren viser et udsnit af de 89 teknikker identificeret af Poulsen (2015) som er involveret i overgangen fra grundskole til gymnasium. De er identificeret i Afgangsprøven (FSA), Screeningstesten fra Silkeborg Gymnasium (ST) eller i en 1. g-matematikbog (stx).

Som nævnt blev kursusdeltagerne introduceret til teknikanalysen gennem eksempler – som opgaven med overfladearealet af cylinderen beskrevet tidligere. Efter introduktionen blev deltagerne delt i to grupper. Den ene arbejdede med modelleringsmaterialerne (cf. afsnittet Teknikbaserede modelleringsopgaver nedenfor), og den anden med tal og algebra. Efter en pause byttede de to grupper aktivitet. Fælles for de mindre workshops var at kursusdeltagerne blev præsenteret for de udarbejdede undervisningsmaterialer med den tidligere beskrevne afprøvning og en *a priori*-analyse af hvad deltagernes elever kan tænkes at vælge af løsningsstrategier og teknikker. Dette var med til at sikre at deltagerne var klar til at implementere undervisningen i egne klasser efterfølgende.

Eksempler på designs og analyser

I dette afsnit vil vi præsentere eksempler på materialer der er udviklet og brugt i Matematikbroens initiativer. Det første eksempel er hentet fra materialesamlingen om tal og algebra, og til sidst giver vi et eksempel på hvordan man kan tænke modelleringsopgaver ind i rammerne af teknikanalyser.

Tal og algebra

Målet med materialet om tal og algebra er at udvikle elevernes teknikker inden for regningsarternes hierarki og regneregler for parenteser. Typen af materialer er inspireret af en bestemt slags taltricks (se Brix, 2015, som udvikler idéen yderligere). I undervisningsmaterialet er de gået under navnet "taltryllerier". Pointen er at opgaven har en overraskende effekt på eleverne der vækker en nysgerrighed på at kunne forklare tricket, og at dette kan gøres nemt og effektivt vha. bogstavregning.

Kommando	Tal				Bogstavudtryk
Tænk på et tal	0				a
Læg 5 til tallet					$a + 5$
Gang resultatet med 2					
Træk nu 2 fra					
Divider med 2					
Træk 4 fra					

Figur 4. Figuren viser et eksempel på et taltrylleri (Matematikbroen, 2015). Eleven skal vælge et tal, skrive det i cirklen og følge kommandoerne i venstre søjle. Til sidst skrives operationerne som bogstavudtryk.

Figur 4 viser et eksempel på sådan en opgave. Eleverne bliver bedt om at tænke på et tal. Herefter skal de udføre de operationer som er listet i søjlen til venstre. Har eleverne regnet rigtigt, ender de med udgangspunktet. Hvis ikke de selv finder på at prøve igen med andre tal, opfordrer læreren til at de prøver med andre tal, negative, nul etc. Herefter skal eleverne formulere en hypotese om hvad der gælder når man følger rækken af kommandoer. I sidste søjle opfordres eleverne til at kalde deres valgte tal for a og udfylde søjlen med de bogstavudtryk der svarer til rækken af kommandoer. Endelig opfordres eleverne til at argumentere for deres hypotese ved at reducere det fremkomne bogstavudtryk skridt for skridt. Udtrykket er:

$$((a + 5) \cdot 2 - 2) / 2 - 4$$

Opskrivningen af det korrekte bogstavudtryk trækker på nogle af de første teknikker i figur 3 der leder til korrekt brug af parenteser. Hvis eleverne forveksler udtrykket $(a + 5) \cdot 2$ med $a + 5 \cdot 2$, fører det ikke til afsløringen af trylleriet hvilket kan give anledning til revision af eget arbejde og rettelse af en misforståelse.

Når eleverne skal reducere udtrykket $((a + 5) \cdot 2 - 2) / 2 - 4$, kræver brøkstregen ledvis division, teknik nr. 42 (Poulsen, 2015, s. 65), samt at eleverne dividerer et produkt af to størrelser hvilket er teknik nr. 38. Det leder til udtrykket: $(a + 5) - 1 - 4$. Når man herefter hæver parenteser og trækker tallene fra hinanden, ender man med begyndelsesværdien a . Alternativt kan man starte med at gange parenteser ud hvilket kræver brugen af den distributive lov fra højre side, teknik nr. 3 i figur 3. Videre arbejde med denne strategi fører til behov for andre teknikker.

Analyserne kan laves på forhånd og give læreren et overblik over præcis hvilke dele af skolealgebraen der aktiveres eller udvikles med et bestemt taltrykkeri. Hvis eleverne mangler redskaberne til at afsløre taltrykkeriet, vil fejl kunne afsløre misforståelser. Dette giver læreren viden om hvor den enkelte elev har vanskeligheder. Eleverne kan opklare misforståelserne ved at blive henvist til undervisningsmaterialer der kan hjælpe, eller gennem sparring med klassekammerater. To løsningsstrategier kan være matematisk lige korrekte, og samtale om det kan styrke elevernes ræsonnements- og kommunikationskompetence (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Interviews med deltagende lærere i Matematikbroen tyder på at disse opgaver fungerede godt for elever helt ned til 7. klassetrin.

Materialerne rummer en række varianter af denne form for opgaver. Når eleverne har prøvet den ovenfor beskrevne opgaveform, er det oplagt at arbejde videre med typer hvor eleverne får udleveret bogstavudtrykkene i den højre kolonne og gennem delopgaver når frem til at kunne formulere de enkelte "kommandoer" til venstre. Ydermere kan denne slags opgaver udvides til at omfatte trykkerier hvor eleverne skal vælge 2, 3 og måske flere tal fra starten som de så skal operere med ud fra foreskrevne kommandoer. Dette leder dem videre til at arbejde med flere variable i samme udtryk. Man kan selvfølgelig også som lærer udforme et "taltrykkeri" så den algebraiske modellering og reduktion kræver bestemte problematiske algebraiske teknikker.

I tal- og algebra materialet er andre opgaver baseret på forskellige billeder som eleverne skal finde og argumentere for en systematik i, fx talkryds i taltavler (Matematikbroen, 2015). Hvordan lærerne valgte at bruge materialerne, varierede en del. Men overordnet set fungerede dette materiale godt i praksis, og en del lærere valgte at bruge det i kortere "opvarmningssekvenser" i en længere række af lektioner (Jessen et al., 2017, s. 53).

Teknikbaserede modelleringsopgaver

Modelleringsmaterialet omfattede i højere grad aktiviteter beregnet for hele lektioner og relaterer til naturfagsundervisningen i grundskolen. Vi vil nu præsentere teknikanalysen i det ene undervisningsdesign og hvordan det var tænkt at skulle realiseres på samme undersøgelsesbaserede måde som i tal og algebra med mere eller mindre vejledning fra læreren.

På Silkeborg Gymnasium har de udviklet en øvelse hvor eleverne skal opmåle Almind Sø ved Silkeborg vha. et kort over lokalområdet og et stykke pap (Matematikbroen, 2015). Eleverne skal finde massen af en cm^2 af pappet ved lineær regression, tegne kortets billede af søen over på pap, klippe denne del ud og bestemme vægten. Ved hjælp af størrelsesforholdet mellem kortet og virkeligheden kan man så bestemme arealet af søen. Opgaven består af en hel række af delopgaver der leder eleverne til svaret. Denne opgave blev omformuleret til en opgave hvor elever skal bestemme hvor mange guldstjerner en klasse kan lave når klassen har en halv liter guldmaling til rådighed. Malingsopgaven er designet til at være undersøgelsesbaseret og forsøger at skabe et behov hos eleverne for at arbejde med lineære sammenhænge og regression. Selve opgaveformuleringen er gengivet i figur 5:

I lærervejledningen til opgaven foreslås det at eleverne arbejder med opgaven i grupper af tre i ca. 20 minutter ad gangen hvorefter der holdes en "klassekonference" hvor hver gruppe præsenterer det de har lavet, og hvad de har planlagt videre frem. Det foreslås at læreren samler op ved at stille spørgsmålene: Hvad er ens, og hvad er

Opgave: 9. B skal holde julefest og har besluttet at pynte festlokalet med irregulære guldstjerner. I får en bøtte guldmaling, og I skal finde ud af hvor mange stjerner malingen rækker til. Stjernerne skal males på begge sider.



Fakta	Velegnet til	Tekniske data
• Glans 45 • Halvblank • 0,5 l	• Karton • Møbler • Metal	• Genbehandling: 4 t. • Gennemhærdet: 48 t. • Rækker til 7 m^2 pr. ltr.

Figur 5. Figuren viser de oplysninger som eleverne fik, til "Mal en stjerne"-opgaven (Matematikbroen, 2015).

over på centimeter- eller millimeterpapir, vil formentlig afhænge af hvilke løsningsstrategier de tidligere har prøvet at bruge, $Q_{1,2}$. Denne strategi vil naturligvis heller ikke føre til et præcist svar.

Pointen med den buede side er at skabe et behov hos eleverne for at tænke i alternative strategier. I lærervejledningen bliver det foreslået at spørge klassen hvad de kunne bruge vægten til. Her kan eleverne fx foreslå at veje hvor meget maling man "mister" fra bøtten ved maling af én stjerne (såfremt klassen får malingen stillet til rådighed), $Q_{1,3}$. Her vil usikkerheder om maling i penslen og vægten af bøtten være ubekendte størrelser som eleverne skal forholde sig til. Man kan spørge klassen hvad man kan bruge viden om vægten af et bestemt stykke pap til. Det vil føre til forskellige strategier hvor eleverne måske vil mene at én måling af sammenhængen mellem areal og vægt er nok, over gennemsnit af målinger til opsamling af mere eller mindre systematiske datasæt, $Q_{1,4}$.

Designet fører altså til to runder af elevudforskning. Den første fører eleverne til at indse en begrænsning i geometriske tilgange. Disse er vigtige at få prøvet af hvis de er den naturlige tilgang til problemet for eleverne hvilket sikrer at udgangspunktet er elevernes individuelle forudsætninger. Den anden runde af udforskning med vægten af forskellige papstykker skal lede eleverne ind i en fælles diskussion af begreberne bedste rette linje og lineær regression. Når lærerne beder eleverne diskutere forskelle og ligheder i metoder, kan dette føre til en diskussion af hvad forskellen er mellem at ekstrapolere fra ét målepunkt og at bruge flere punkter. Desuden vil man kunne engagere eleverne i en diskussion af forskellen mellem at bruge lineær regression og at udregne gennemsnittet af forholdet mellem vægt og areal for flere papstykker.

I figur 6 ses sammenhængen mellem de enkelte afledte spørgsmål som eleverne potentielt kan stille. Dette er en uddybning af et *mind map* fra lærervejledningen (Matematikbroen, 2015). Pointen med at have lavet en forudgående analyse af elevopgaver som vist i figur 6 er at støtte lærerne i undervisningssituationen. Undersøgelser viser at der er en del lærere som oplever usikkerhed ift. at undervise ud fra åbne og undersøgelsesbaserede tilgange til undervisning (Barquero et al., 2015), og at diagrammer som figur 6 kan støtte lærerne i disse situationer, ligesom det kan hjælpe på forhånd at have eksplicit viden om de teknikker der kan tænkes berørt af forløbet. Diagrammet støtter således lærerne ved på forhånd at gøre dem bevidste om mulige stier i forløbet så de kan forberede åbne spørgsmål der kan guide eleverne fra vildspor til produktive ruter. Det er afgørende at eleverne selv ser et behov for "sporskift", og at det ikke bliver læreren der forklarer hvilken strategi der løser opgaven.

Matematikbroens første kursusforløb tilbød to modelleringsdesigns: *Mal en stjerne* og *Barbie Bungee Jump*, begge med lærervejledning og elevopgave. Evalueringen viste at lærerne fandt modelleringsopgaverne vanskeligere at bruge end materialet om tal og algebra. Interviews med deltagende lærere viste at de kun brugte materialerne til

de elever de forventede skulle i gymnasiet, eller alternativt omformulerede dem (Jessen et al., 2017, s. 37). Nogle lærere skriver i den elektroniske evaluering af projektet at en af udfordringerne med at bruge modelleringsmaterialerne fremadrettet er at de tager lang tid at realisere i undervisningen; andre lærere mener at remedierne får eleverne til at fjolle frem for at arbejde undersøgende (ibid., s. 31 f). Omvendt skriver en lærer at vedkommende fremadrettet vil bruge opgaverne "der har en mere praktisk og undersøgende tilgang. Det er vigtigt for mig, at undervisningen ikke kun er målrettet elever, der skal på gymnasiet" (Jessen et al., 2017, s. 30). Med den usikkerhed der ligger i fortolkningen af de fritekstsvar der er afgivet i den elektroniske spørgeskemaundersøgelse, kan det dog konkluderes at materialerne har været brugbare – omend nogle betragter dem som lidt sværttilgængelige for eleverne.

Observation af undervisningen indikerer at lærerne havde lidt svært ved at slippe styringen af aktiviteterne fra starten og foretrak at lade eleverne formulere hypoteser og i højere grad tænke end at undersøge sig ind i stofområdet (Jessen et al., 2017, s. 39). Men når lærerne i højere grad lod eleverne arbejde undersøgende med spørgsmålene, kom eleverne på sporet af opsamling af datasæt der førte videre til begrebet om lineære sammenhænge. Særligt da lærerne påtager sig en mere tilbagetrukket rolle og stiller spørgsmål til hvad eleverne tænker og gør, kommer der gang i elevernes formulering af hypoteser og idégenerering af tilgange som de prøver af (ibid., s. 40). Denne form for undervisning kræver tilvænning for både elever og lærere. Generelt var der begejstring for de udviklede forløb, og Matematikbroens løbende evalueringer pegede på ønsker om flere materialer til både modellering samt tal og algebra.

Diskussion og konkluderende bemærkninger

I designet af efteruddannelsesstilbud til lærerne er der foregået en afvejning af hvilke fagdidaktiske begreber det er ønskeligt at præsentere, og så de tidsmæssige rammer for efteruddannelsesstilbuddet. Kurset skulle stille skarpt på de matematiske udfordringer der er dokumenteret ift. eleverne i overgangen fra grundskole til gymnasium. Fra et matematikdidaktisk perspektiv gav prakseologibegrebet god mening. Prakseologibegrebet og ATD kan imidlertid forekomme sværttilgængeligt, og det tager tid at blive så fortrolig med det at det bliver operationelt ift. undervisning. Projektgruppen kunne dog se så centrale perspektiver i teknikbegrebet at dette niveau (teknikanalyser) blev omdrejningspunktet for den fagdidaktiske del af efteruddannelsen.

Analyser af de første elevbesvarelser af den tidligere omtalte test giver interessant information om hvordan elever kan bruge den distributive lov, teknik 3, figur 3. Det er fx systematisk vanskeligere for eleverne at gange ind i en parentes fra højre end fra venstre, mens elever der kunne lave den sidste beregning [$(b + c)a = ba + ca$], også kunne sætte uden for parentes "fra venstre", dvs. omskrive $ab + bc$ til $a(b + c)$

]; væsentlig færre kunne løse opgaver hvor samme type udtryk skal omskrives til $(b+c)a$. Eleverne klarede reduceringsopgaven $\frac{x}{2} + 5 \cdot (x+3)$ bedre end at reducere udtrykket $(4+x) \cdot 3 - 4x$. Altså synes den distributive lov at rumme fire “delteknikker” der er nødvendige at beherske hvis man skal kunne bruge lovmæssigheden i alle situationer. Et interessant resultat af effektmålingen er at væsentlig flere elever blev i stand til at løse opgaver der krævede ovennævnte og andre teknikker. Det kan have bidraget til den positive effekt at bevidstgøre lærerne om denne type detaljer ved at introducere dem til teknikanalyse som giver et blik for “detaljerede, implicitte læringsmål” i matematikopgaver; men det er i sagens natur vanskeligt at vurdere omfanget af dette bidrag. Det skal her erindres at kun forskerne i projektet har vidst hvilke teknikker der blev testet og hvordan i effektmålingen.

Undervisningsmaterialerne styrker desuden elevernes udvikling af mere almene kompetencer. Tal- og algebraopgaver hvor eleverne skal “afsløre” taltryllerier og overbevise deres klassekammerater om den generelle løsning, vil aktivere repræsentations-, kommunikations- samt symbol- og formalismekompetencen. Hvis opgaverne skal give mening, kræver de modellering af beregningerne – det er ikke længere tilstrækkeligt at kunne regne rigtigt. Ved at eleverne gør mere end at regne rigtigt – argumenterer for deres matematiske arbejde og sætter sig ind i andres løsninger og argumenter – får eleverne oparbejdet nogle problemløsningsstrategier som er vigtige for at kunne udøve mere avanceret matematisk aktivitet end beregning. At kunne argumentere og følge andres matematiske argumentation er ydermere med til at styrke eleverne i selvstændigt at kunne tilegne sig viden fra lærebøger, undervisningsvideoer, traditionel tavlegennemgang m.m.

Det at udvikle et argument som kan overbevise klassekammeraterne, trækker på og udvikler elevernes matematiske kompetencer til at spørge og svare i og med matematik (Niss & Jensen, 2002, s. 44), dvs. tankegangs-, problembehandlings-, modellerings- og ræsonnementskompetencen. I materialet om tal og algebra er der dog alene tale om en “intra”-matematisk modellering (jf. García & Higuera, 2006) hvilket som sagt ikke typisk forbindes med modelleringskompetencen som denne er beskrevet af Niss & Jensen (2002, s. 52). Tal- og algebra materialerne kan heller ikke siges at understøtte hjælpemiddelkompetencen da der lægges op til manuel udførelse af de teknikker der (for så vidt angår reduktion af udtryk) i gymnasiet i stigende grad overlades til CAS-værktøjer. En væsentlig del af opgaverne er imidlertid at opstille den algebraiske model for taltrylleriet hvilket CAS-værktøjet ikke kan. Det kan derved også styrke elevernes sikkerhed i algebraisk syntaks, fx brug af parenteser, der også er helt nødvendig ved brug af CAS-værktøjer.

Modelleringsmaterialerne understøtter udviklingen af modelleringskompetencen, men også hjælpemiddelkompetencen kommer i spil i diskussionen af regressionsbegrebet. Niss & Jensen (2002, s. 52) skelner i deres beskrivelse af modelleringskompe-

tencen mellem modelanalyse og modelbygning. Ved eksamen er der en tendens til at modellering hovedsageligt indgår i den forstand at det testes hvad eleverne kan sige om et problem ud fra en allerede eksisterende model (Frejd, 2013). Prøver retter sig imod modelanalysen og ikke konstruktionen af modeller hvilket giver anledning til at tro at størstedelen af matematikundervisningen ligeledes dyrker modelanalysen (jf. tidligere om realiseret pensum). For en mere dækkende undervisning i modellering bør modelbygningen derfor opprioriteres. De udviklede undervisningsmaterialer understøtter modelbygningen som en aktivitet hvor eleverne arbejder ud fra egne hypoteser der valideres gennem diskussion med klassekammerater og ved konkrete afprøvninger. Der er ikke kun én model der kan give et godt svar, men omvendt er det dog relativt begrænset hvilke (rimelige) modeller eleverne kan konstruere.

Flere af lærerne der deltog i efteruddannelsesaktiviteterne, udtrykte bekymring for fagligt svage elevers arbejde med modelleringsaktiviteterne. Enkelte lærere valgte helt at undlade at bruge dem eller at redesigne dem til mere styrede processer for at sikre at eleverne kom frem til "den rigtige model". Lærerne har givetvis haft deres grunde til denne prioritering. Lignende studier fra danske gymnasieklasser med matematik på C-niveau peger dog på spændende resultater af at lade mindre fagligt stærke elever arbejde med modelbygning på baggrund af de åbne spørgsmål (Jessen, indsendt). Pointen med at lade alle elever arbejde med de åbne spørgsmål er at eleverne tager udgangspunkt i deres egen faglige intuition og faglige forudsætninger, at de arbejder inden for zonen for nærmeste udvikling (Winsløw, 2006, s. 169). Skulle de indledende hypoteser lede dem til en blindgyde, skaber dette et behov hos den enkelte elev for at lære nye matematiske teknikker. Disse teknikker kan til dels være inspireret af klassekammeraters arbejde, lærerens vejledning eller informationssøgning i lærebøger, på nettet etc. At eleverne fx opdager at stjernen i figur 5 ikke kan deles op i figurer som eleverne kan beregne arealet af, kan være med til at hjælpe eleven videre med oplevelsen af at de første hypoteser var utilstrækkelige, og at de derfor må se på andre mulige idéer. Dette har vist sig at skabe en motivation og nysgerrighed for et højere fagligt niveau blandt eleverne (Jessen, u. udg.; Jessen, 2014).

En sidste væsentlig pointe med efteruddannelsesaktiviteterne og teknikanalyserne er deres relation til *Forenklede Fælles Mål* (Undervisningsministeriet, 2014) som er de overordnede krav til lærerens undervisning. Det har været vigtigt for projektgruppen at undervisningsmaterialerne blev designet så de adresserer det som lærerne skal undervise i, og ikke bliver et ekstra element der skal presses ind. Foruden de ovenfor nævnte argumenter for hvordan materialerne understøtter udviklingen af matematiske kompetencer, fremhæves det i Matematikbroens undervisningsmaterialer hvilke konkrete færdigheds- og vidensmål de enkelte aktiviteter adresserer. For lærere der ikke er bekendt med ATD og teknikanalyser, vil det formentlig fortsat

være en udfordring selv at designe og analysere undervisning på baggrund af disse begreber. Ikke desto mindre har Matematikbroens aktiviteter vist gode resultater, og det ville være interessant at gennemføre opfølgende studier af hvordan man kan gøre teknikanalysen så operationel for lærerne at de kunne bruge det til selvstændig, systematisk variation af materialernes aktiviteter.

Referencer

- Bahn, J.F. (2015). *Undersøgelsesbaseret matematikundervisning og lektionsstudier*. Ph.d.-projekt, Københavns Universitet. <http://www.ind.ku.dk/projekter/undersogelsesbaseret-matematikundervisning-og-lektionsstudier/>.
- Balacheff, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs Algebra the Core of a Didactical Dilemma. I: *Perspectives on School Algebra* (s. 249-260). Springer Netherlands.
- Barquero, B., Bosch, M. & Romo, A. (2015). A Study and Research Path on Mathematical Modelling for Teacher Education. I: K. Krainer & N. Vondrová (red.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Prague, Czech Republic (s. 809-815).
- Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is Modelling Not Included in the Teaching of Algebra at Secondary School. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14 (s. 125-133).
- Bosch, M. (2015). Doing Research in the Anthropological Theory of the Didactic: The Case of School Algebra. I: Cho, S.J. (red.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematics Education* (s. 235-268). Springer.
- Brix, A. (2015). *Number Tricks as a Didactical Tool for Teaching Elementary Algebra*. Specialerapport: København, Københavns Universitet. <http://www.ind.ku.dk/publikationer/studentererien/studenterserie41/Thesis.Asger.Brix.pdf>.
- Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Ed.) *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 173-187. Springer International Publishing.
- Ebbensgaard, Aa. B., Jacobsen, J.C. og Ulriksen, L. (2014). Overgangsproblemer mellem grundskole og gymnasium i fagene Dansk, Matematik og Engelsk, *IND's skriftserie nr. 37*, http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/2014-37
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2), s. 19-25.
- Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment – a literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 413-438. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs10649-013-9491-5.pdf>
- García, F. & Higuera, L. (2006). Mathematical Praxeologies of Increasing Complexity: Variation Systems Modelling in Secondary Educations. I: Bosch, M. (red.), *Proceedings of the Fourth Congress of Research in Mathematics Education* (s. 1645-1654).

- Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y. & Miyakawa, T. (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics: Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement*. World Scientific Publishing, Singapore.
- Jessen, B.E., Holm, C. & Winsløw, C. (2017). MatematikBroen – Fra grundskole til gymnasium. *IND's Skriftserie*, nr. 49. http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/nr.-492017-matematikbroen/.
- Jessen, B.E. (indsendt). *How to Generate Autonomous Questioning in Secondary Mathematics Teaching?*
- Jessen, B.E. (2014). How Can Study and Research Paths Contribute to the Teaching of Mathematics in an Interdisciplinary Setting? *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 19, s. 199-224.
- Kieran, C. (2008). Conceptualizing the Learning of Algebraic Technique: Role of Tasks and Technology. *Regular Lecture, ICME*, 11.
- MatematikBroen (2015) Projekthjemmeside. <http://www.gymnasiet.dk/om-sg/samarbejde-med-grundskolen/matematikbroen/>.
- Mathiasen, H. (2009). *Overgangsproblemer som udfordring i uddannelsessystemet*. Forskningsrapport, Aarhus Universitet. http://pure.au.dk/portal/files/41902239/Udfordringer_rapport_17_06_2009.pdf
- Niss, M. og Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.
- Poulsen, C.S. (2015). *Basic Algebra in the Transition from Lower Secondary School to High School*. Specialerapport, Københavns Universitet. <http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie44/CP-Speciale.pdf>.
- Rasmussen, K. (2016). *Praxeologies and Institutional Interactions in the Advanced Science Teacher Education*. Ph.d.-afhandling, København: Københavns Universitet. http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/44/44-Klaus_Rasmussen.pdf.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). Comparing Approaches through a Reference Epistemological Model: The Case of School Algebra. I: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2870-2879).
- Schoenfeld, A. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23(2), s. 145-166.
- Undervisningsministeriet (2014). *Forenklede Fælles Mål for faget matematik*. <http://www.emu.dk/sites/default/files/Matematik%20-%20januar%202016.pdf>.
- Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer – en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Biofolia, Frederiksberg.
- Østergaard, K. (2016). *Teori-praksis-problematikken i matematiklæreruddannelsen – belyst gennem lektionsstudier*. Ph.d.-afhandling, Roskilde: Roskilde Universitet. https://rucforsk.ruc.dk/ws/files/57258425/Teori_praksis_problematikken_i_matematikl_reruddannelse_Kaj_stergaard_Ph_d_afhandling_RUC.pdf.

Bilag A

Nummer	Spørgsmål	Teknik/løsning
Q_0	Hvor mange stjerner kan man male med en $\frac{1}{2}$ L guldmaling, når denne dækker 7 m^2 pr. L?	
Q_1	Hvor stor er en enkelt stjerne?	
$Q_{1,1}$	Hvilke figurer kan man dele figuren op i vha. velkendte geometriske figurer?	Genkende geometriske figurer som trekanter, trapez etc.
$Q_{1,1,1}$	Hvad er arealet af disse figurer?	Areal af trapez og trekant.
$Q_{1,2}$	Hvor mange tern dækker figuren hvis den tegnes over på kvadratnet?	Afkalkering.
$Q_{1,2,1}$	Hvordan "tælle tern"?	Tælle, summe, gange.
$Q_{1,3}$	Hvor meget maling bruges på én stjerne?	Male.
$Q_{1,3,1}$	Hvor stor volumen af den halve liter er tilbage efter at man har malet en eller flere stjerner?	Måle højde og diameter.
$Q_{1,3,1,1}$	Hvad er volumen af en cylinder med given diameter og højde?	$V = h \cdot \pi \cdot r^2$
$Q_{1,3,2}$	Hvor stor en masse af den halve liter er tilbage efter at man har malet en eller flere stjerner?	Veje gentagne gange.
$Q_{1,4}$	Hvordan finder man vægten pr. areal af stjernen så vi kan finde arealet af stjernen?	Veje en stjerne.
$Q_{1,4,1}$	Hvor meget vejer fx én cm^2 pap?	
$Q_{1,4,1,1}$	Hvor meget vejer et stykke pap med en given vægt?	Veje figur med kendt areal.
$Q_{1,4,1,2}$	Hvor meget vejer to forskellige stykker pap ift. deres areal?	Veje figurer med kendte arealer.
$Q_{1,4,1,2,1}$	Hvad er så gennemsnitsvægten pr. cm^2 ?	Masse divideret med arealet. Summe de to resultater og dividere med to (finde gennemsnit).

Nummer	Spørgsmål	Teknik/løsning
Q _{1,4,1,2,2}	Hvilken sammenhæng får man mellem masse og vægt ved at taste de to målinger ind i Excel og få programmet til at generere flere datapunkter og lave lineær regression?	Autogenerering af data, lineær regression.
Q _{1,4,1,3}	Hvad er sammenhængen mellem en række forskellige papstykkers areal og deres vægt?	Lav flere sammenhængende målinger af areal og vægt.
Q _{1,4,1,3,1}	Hvis det er på papir?	Indtegn datapunkter, og tegn bedste rette linje blandt disse.
Q _{1,4,1,3,1,1}	Hvad er hældningskoefficienten?	Aflæs hældningskoefficienten.
Q _{1,4,1,3,1,1,1}	Hvordan aflæses hældningen?	“Gå en hen og a op”.
Q _{1,4,1,3,1,1,2}	Hvordan aflæses hældningen ved to punkter?	$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Q _{1,4,1,3,2}	Hvis det er med et computerprogram?	Kommando for udførelse af lineær regression.
Q _{1,4,1,3,2,1}	Hvad siger koefficienterne om sammenhængen?	Fortolkning ift. akseenheder og vægt/areal.

English abstract

This paper presents the core didactical elements of the activities in “The Math Bridge – transition from lower to upper secondary school”. The project is based on notions from the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In particular, a test on “mathematical techniques” has been employed to identify what mathematical contents represent special challenges for the students in the transition. Likewise, the notion of technique was a core element in the design of in-service teacher course activities aiming at easing the students’ transition from mathematics in lower secondary to mathematics in high school. We explain how the notion was employed in the course activities as well as in teaching materials for lower secondary mathematics.