Variabelsammenhænge i gymnasiets matematikundervisning

Niels Nørskov Laursen, Institut for Naturfagenes Didaktik og Virum Gymnasium

Abstract. *Efter gymnasiereformen skal man i matematikundervisningen på C-niveau ikke længere behandle det formelle funktionsbegreb, men i stedet arbejde med de såkaldte variabelsammenhænge. I mit speciale har jeg benyttet den valgfrihed der er opstået på grund af funktionsbegrebets fravær, til at designe et undervisningsforløb om lineære, eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge der tager udgangspunkt i simple tabeller. Ved at vente med at bruge ligninger til senere i forløbet var ambitionen at flere af de forholdsvis sprogligt orienterede elever i forsøgsklassen ville være i stand til at følge aktivt med i undervisningen end hvis man valgte at fokusere på ligninger fra starten. Denne artikel henvender sig især til matematiklærere som gerne vil forsøge sig med en alternativ tilgang til variabelsammenhænge i en sprogligt orienteret C-niveau-klasse, men artiklen vil også være af interesse for dig som generelt har interesse for funktionsbegrebet i undervisningen.*

Introduktion

Meningen med denne artikel er ikke at diskutere om det er en god idé at nedprioritere det formelle funktionsbegreb i gymnasiets matematikundervisning eller ej, men at benytte de rammer som bekendtgørelsen giver til at arbejde med funktioner, på en alternativ måde. Mens jeg skrev speciale i skoleåret 2006/2007, har jeg samtidig været årsvikar på Virum Gymnasium i en enkelt C-niveau-klasse i matematik, og denne klasse har været forsøgsklasse i mit speciale. Det skal her nævnes at på det tidspunkt hvor forløbet blev afprøvet i klassen, havde eleverne allerede lært om lineære sammenhænge, men ikke om eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge. Kendetegnende for klassen var at de færreste elever havde ambitioner inden for matematik, og at en del af eleverne havde huller i deres forudsætninger fra folkeskolen – specielt havde mange af eleverne problemer med at arbejde med ligninger. Blandt andet af denne grund valgte jeg at introducere lineære, eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge ved hjælp af tabeller. Tabel 1 til 4 er eksempler på repræsentationer for de fire nævnte typer af variabelsammenhænge.

Tabel 1. *Et eksempel på en lineær sammenhæng.*

x	0	2	4	6	*plus 2*
y	4	7	10	13	*plus 3*

Tabel 2. *Et eksempel på en eksponentiel sammenhæng.*

x	0	1	2	3	*plus 1*
y	5	10	20	40	*gange 2*

Tabel 3. *Et eksempel på en potens-sammenhæng.*

x	1	3	9	27	*gange 3*
y	1	2	4	8	*gange 2*

Tabel 4. *Et eksempel på en logaritmisk sammenhæng.* **"System"**

x	1	2	4	8	*gange 2*
y	0	1	2	3	*plus 1*

Hovedidéen i mit design var at de fire typer af variabelsammenhænge alle har meget systematiske tabeller hvis man udelukkende bruger tabeller hvor hver af variablene har den samme absolutte eller den samme relative ændring fra søjle til søjle. Disse ændringer valgte jeg at skrive ind i den søjle i tabellen der er længst til højre, og denne søjle valgte jeg at kalde for tabellens *system*.

De fire nævnte variabelsammenhænge udgør en pæn, afsluttet klasse hvilket illustreres i tabel 5. Bemærk at det også fremgår af tabellen at eksponentielle sammenhænge og logaritmiske sammenhænge opfører sig modsat.

Tabel 5. *En oversigt over de fire typer af variabelsammenhænge. Det er underforstået at den samme absolutte eller relative ændring gentages igen og igen for hver af de to variable i en tabel.*

	Absolut ændring af x	**Relativ ændring af** x
Absolut ændring af y	*Lineær*	*Logaritmisk*
Relativ ændring af y	*Eksponentiel*	*Potens*

Sammenlignet med den traditionelle matematikundervisning hvor man definerer forskellige typer af variabelsammenhænge ved hjælp af ligninger og viser deres egenskaber bagefter, har jeg altså gjort det modsatte: De forskellige typer af variabelsammenhænge defineres ved hjælp af deres egenskaber (i tabeller), og derefter udledes ligningerne (se figur 1).

Traditionel matematikundervisning: Typer af variabelsammenhænge defineres vha. ligninger	⇒	De karakteristiske egenskaber udledes
Den valgte tilgang: Typer af variabelsammenhænge defineres vha. karakteristiske egenskaber i tabeller	⇒	Ligninger udledes

Figur 1. *Karakteristiske egenskaber eller ligninger først?*

Fordelen ved den valgte tilgang er at man kan udforske de centrale egenskaber for lineære, eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge uden at blive forvirret af de symbolske udregningers tekniske detaljer. Ligninger bruges til sidst til at forbedre præcisionen af de metoder som er lært ved hjælp af tabeller og grafer, så selv om man skulle have en form for "lignings-blokering", er det muligt at følge med i den første del af forløbet.

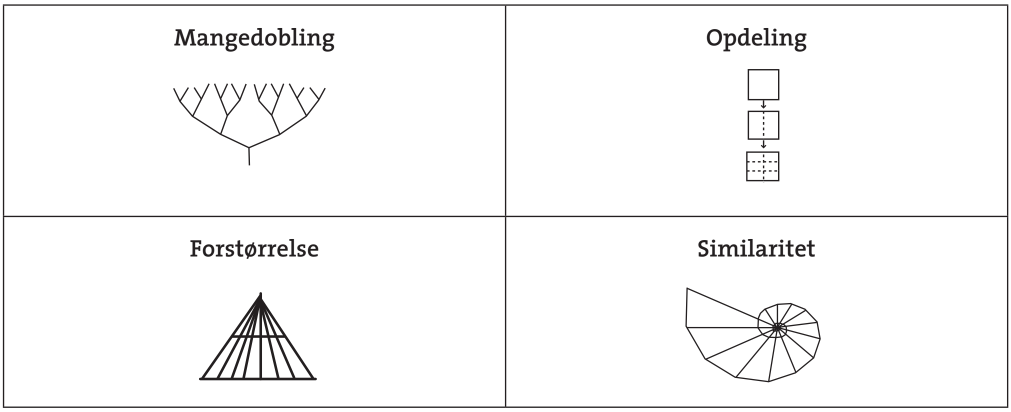
Teoretiske rammer

Jeg vil starte teoriafsnittet med at skelne mellem de to tilgange hvormed man kan undervise i funktioner eller variabelsammenhænge: *korrespondance-tilgangen* og *kovarians-tilgangen*. Korrespondance-tilgangen er statisk i sin natur – den handler om at der til enhver x-værdi *korresponderer* præcis én y-værdi, og det er denne tilgang der traditionelt bruges i gymnasiematematikken. Kovarians-tilgangen er derimod af dynamisk natur – den handler om hvad der sker med y-værdien når x-værdien *varieres* (Confrey & Smith, 1994, s. 135). Hvor korrespondance-tilgangen lægger op til en formel og abstrakt gennemgang af funktioner, lægger kovarians-tilgangen op til en mere uformel tilgang, og der er ingen officielt anerkendt opskrift på hvordan man underviser ved hjælp af kovariation.

Kovarians-tilgang af Confrey og Smith

Kovarians-tilgangen i mit speciale er inspireret af en artikel af Confrey og Smith (1994) om såkaldte additive og multiplikative ændringer. Artiklen beskriver hvordan additive og multiplikative processer er af fundamental betydning i matematikken, i vores tilegnelse af matematikken og i vores anvendelser af matematikken i den virkelige verden. Når et barn for eksempel lærer at tælle, foretager barnet en additiv proces: at lægge 1 til igen og igen. Senere kan barnet lære at tælle med andre additive ændringer, for eksempel ved hjælp af 2-tabellen. Additive ændringer er meget vigtige i matematikken, og derfor har det været nødvendigt at indføre en notation for additive ændringer, nemlig $\Delta x = x_2 - x_1$. Multiplikative ændringer har man derimod tildelt en mindre rolle i matematikken. Dette afspejles for eksempel af det faktum at der ikke findes en anerkendt notation til multiplikative ændringer. Confrey og Smith foreslår at man hjælper til med at udjævne denne uligevægt ved at indføre notationen $^{®}x = x_2/x_1$ hvor ® står for *ratio*. Et andet eksempel på at multiplikative ændringer nedtones i matematikken, er at man som regel vælger additive ændringer for x-værdierne i tabeller, så tabeller som tabel 3 ovenfor forekommer sjældent.

I den virkelige verden forekommer multiplikative processer hyppigt. Confrey og Smith giver som eksempler blandt andre mangedobling, opdeling, forstørrelse og similaritet (se figur 2), og generelt er der ingen grund til at additive ændringer skulle være vigtigere end multiplikative ændringer.



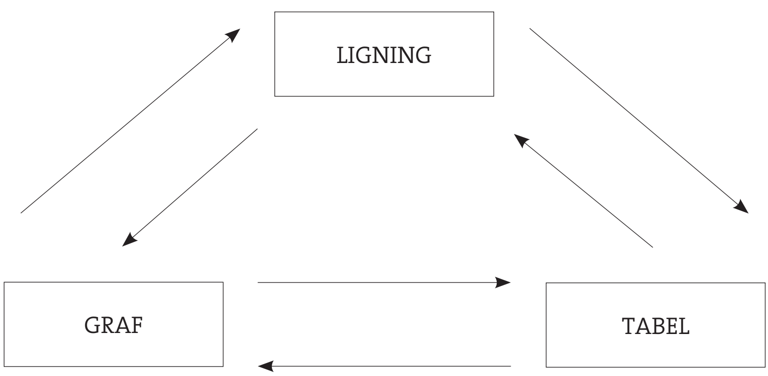
Figur 2. *Eksempler på multiplikative processer.*

En af grundene til at en kovarians-tilgang til funktioner skulle være intuitivt nem at forstå for eleverne, er at børn på et tidligt stadie har en fornemmelse for ændringer både i matematikken og i det virkelige liv. Ud over den dimension af ændringsbegrebet som omhandler gentagne numeriske ændringer med en fast størrelse af ændringerne, findes der ifølge Confrey og Smith to andre dimensioner: *den grafiske dimension* og *den komparative dimension*. Den grafiske dimension handler om relationen mellem grafens hældning og ændringer af de to koordinater, mens den komparative dimension handler om at vi alle har en fornemmelse for ændringsmekanismer i den virkelige verden. For eksempel mærkes vindmodstanden tydeligere jo hurtigere man kører på sin cykel. Hvis alle tre dimensioner af ændringsbegrebet bruges i undervisningen, får eleverne et intuitivt grundlag for at arbejde med funktioner, og man kan senere formalisere funktionsbegrebet hvis der bliver brug for det.

Duval om repræsentationer

Når en elev har problemer med at løse en opgave om funktioner, er det ikke sikkert at kilden til problemet skal søges i elevens manglende viden om den konkrete type af funktion som der arbejdes med, men derimod i elevens grundlæggende forudsætninger for at bruge tabeller, grafer og ligninger. For at kunne diskutere disse problemstillinger i en teoretisk sammenhæng har jeg valgt at inddrage Duvals teori om repræsentationer.

Duval (2006) definerer en *repræsentation* som “noget, som står for noget andet”. Eksempler på repræsentationer i matematikken er brøker som repræsenterer tal, eller grafer som repræsenterer funktioner. Et *register* defineres som et system af repræsentationer hvor der kan udøves matematiske processer; for eksempel hører en graf til i det *grafiske register*, en ligning hører til i det *symbolske register*, og en tabel hører til i det *numeriske register*. Duval skelner mellem to slags grundlæggende matematiske processer: *operationer* og *konversioner*. En operation er en proces der foregår i et enkelt register mens en konversion er en proces som starter i ét register og ender i et andet register. Et eksempel på en operation er løsningen af en ligning i det symbolske register, og et eksempel på en konversion er tegningen af en graf ud fra en tabel. I denne artikel er alle de seks konversioner mellem tabel, graf og ligning relevante, se figur 3.



Figur 3. *Oversigt over konversioner mellem tabel, graf og ligning.*

En af Duvals hovedpointer er at man for at forbedre undervisningen først må undersøge hvordan eleverne bruger og opfatter repræsentationer. Fra et matematisk synspunkt er det ofte sådan at valget af register og notation er arbitrært, og den trænede matematiker vil nemt kunne skifte notation inden for det samme register eller foretage konversioner mellem to registre. Men fra elevernes synspunkt er enhver ændring af de tegn der står på tavlen, en potentiel kilde til misforståelser, og det kan være svært at se hvilke ændringer i notationen der er matematisk relevante. Ethvert register har ifølge Duval sine egne muligheder og begrænsninger – dette vil jeg følge op på i det næste afsnit.

Elevernes brug af tabeller, grafer og ligninger

Før jeg kastede mig over det egentlige design af undervisningsforløbet i mit speciale, fordybede jeg mig i de tre registre der var relevante, nemlig det numeriske, det grafiske og det symbolske register. Jeg undersøgte litteraturen om de enkelte registres begrænsninger og om elevernes misforståelser af registrene, jeg testede elevernes forudsætninger for brug af disse tre registre, og jeg udarbejdede en serie opgaver der havde til formål at rette op på nogle af elevernes svagheder i forbindelse med de enkelte registre.

Muligheder og begrænsninger for tabeller, grafer og ligninger

Schwarz og Dreyfuss (1995) præsenterer nogle interessante overordnede betragtninger om tabeller, grafer og ligninger. For det første bemærkes det at det traditionelt kun er det symbolske register der bruges aktivt i undervisningen. Fokus er på at foretage operationer i det symbolske register, mens de to andre registre bruges til at give en slags statiske billeder af de matematiske objekter. Med min kovarians-tilgang forsøger jeg at ændre på dette og gøre især tabeller til mere dynamiske repræsentationer end normalt. For det andet skelner Schwarz og Dreyfuss mellem to slags operationer:

1. Det matematiske objekt bevares.
2. Det matematiske objekt bevares ikke.

Et eksempel på en operation som bevarer det matematiske objekt, er en omskrivning af ligningen for en variabelsammenhæng hvor x isoleres i stedet for y. Fra et matematisk synspunkt har man at gøre med den samme variabelsammenhæng før og efter omskrivningen, men i elevernes øjne ser ligningerne vidt forskellige ud. Et andet eksempel på denne type operation er en omskalering af akserne i et koordinatsystem. Grafens udseende ændres tilsyneladende, men det matematiske indhold er det samme. Endelig er en parallelforskydning af en graf et eksempel på en operation som *ikke* bevarer det matematiske objekt. Grunden til at disse betragtninger er vigtige, er at uanset om man arbejder med den ene type operation eller den anden, så vil den konkrete repræsentation ændre sig, men kun i det ene tilfælde vil den matematiske betydning ændre sig, og dette er ikke nødvendigvis nemt at gennemskue for eleverne.

Den tredje og sidste af Schwarz og Dreyfuss' pointer som bringes her, er at repræsentationer sjældent indeholder den fulde information om det matematiske objekt. For eksempel indeholder en tabel kun information om et endeligt antal punkter, og en graf indeholder kun en begrænset definitionsmængde. Igen er der tale om simple observationer der ikke volder problemer for det trænede øje, men som kan give anledning til misforståelser i undervisningen.

Elevernes misforståelser om tabeller, grafer og ligninger

Som det efterhånden fremgår, er det en vigtig pointe i mit speciale at eleverne ikke nødvendigvis forstår de matematiske repræsentationer på samme måde som lærerne. I en artikel af Kieran (1981) behandles elevernes opfattelse af lighedstegnet, og pointen er at eleverne fra de første klassetrin lærer at bruge lighedstegnet som noget der adskiller udregningen (som står til venstre) fra svaret (som står til højre), og at mange elever aldrig slipper denne opfattelse af lighedstegnet som et *do something-signal* på de højere klassetrin. Det fremgår af artiklen at mange skoleelever på de første klassetrin har svært ved at forklare ligninger som for eksempel $4 + 5 = 3 + 6$ eller (*ingenting*) $= 4 + 3$. "Efter lighedstegnet skal svaret stå" var en hyppig kommentar, og til den sidste ligning bemærkede en elev: "Læser du baglæns?" Når disse elever skal lære at arbejde med ligninger, skal man pludselig bruge lighedstegnet som et *ækvivalenssymbol*, og der skal regnes på begge sider af lighedstegnet hvilket strider mod elevernes procesopfattelse af lighedstegnet, og eleverne kan komme i vanskeligheder. Denne artikel førte mig til at foretage forsøg i min klasse med ækvivalens af ligninger hvilket jeg vender tilbage til i det næste afsnit.

Litteraturen behandler en lang række af potentielle misforståelser af grafer. Jeg vil her nøjes med at referere til Duval (2002, s. 324) som ud fra sine undersøgelser konkluderer at de fleste elever sagtens kan aflæse enkelte koordinatsæt på en graf, og de kan også opfatte grafens overordnede form, men de kan ikke skelne hvad der er matematisk relevant, og hvad der ikke er, på en graf, og de kan heller ikke forbinde egenskaber på grafen med informationer i andre registre. Det betyder at de fleste elever godt nok har nemt ved at konstruere en graf, men har svært ved at koordinere grafer og ligninger.

Diagnostisk test

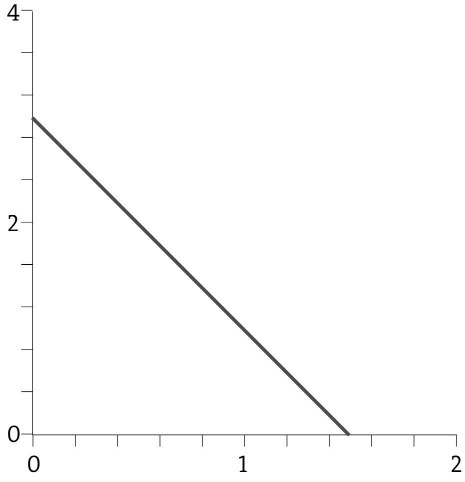
For at undersøge hvordan eleverne i forsøgsklassen behandlede de 6 konversioner mellem tabel, ligning og graf, og for at bringe eventuelle misforståelser frem i lyset lavede jeg en multiple-choice-test med 10 spørgsmål til hver af de 6 konversioner. Her er et uddrag af de opgaver som gav de mest opsigtsvækkende resultater (se figur 4):

$x = -y$	**OPGAVE 4.3** Find (ved hjælp af ligningen) den y-værdi der hører til hver af de givne x-værdier.		
	x-værdi: $x = -2$	*x-værdi:* $x = 0$	*x-værdi:* $x = 2$
	y-værdi: *a)* $y = -4$ *b)* $y = 2$ *c)* $y = 0$ *d)* $y = -2$	*y-værdi:* *a)* $y = -4$ *b)* $y = 2$ *c)* $y = 0$ *d)* $y = -2$	*y-værdi:* *a)* $y = 4$ *b)* $y = 2$ *c)* $y = 0$ *d)* $y = -2$

Figur 4. *Opgave om konversion fra ligning til tabel.*

Det svære ved denne opgave er at det er *x* og ikke *y* der er isoleret i ligningen. En enkelt elev rakte hånden op under testen og sagde at der var en fejl i opgaven! Dette viser sammen med en succesrate på 36 % at eleverne er så vant til at *y* er isoleret, at de ikke umiddelbart omskriver ligningen og løser spørgsmålet som sædvanligt. Dette antyder at eleverne i høj grad ser lighedstegnet som et *do something-signal* og ikke et *ækvivalenssymbol* i overensstemmelse med den nævnte artikel af Kieran.

Den vanskeligste opgave (18 % rigtige) viste sig at være følgende (se figur 5), og det skal her nævnes at den diagnostiske test blev givet til eleverne umiddelbart før de lærte om lineære sammenhænge, således at konklusionerne fra testen omhandler elevernes forudsætninger fra folkeskolen.



OPGAVE 3.1
Sæt en ring om den ligning som svarer til grafen.

a) $y = 3 - x$

b) $x = \frac{2}{3}$

c) $y = 3$

d) $y = 3 - 2x$

Figur 5. *Opgave om konversion fra graf til ligning.*

Elevernes besvarelse af denne opgave bekræfter Duvals påstand om at eleverne har svært ved at afgøre hvad der er matematisk relevant på en graf. Eleverne ved at en ret linjes skæring med den ene af akserne er vigtig, men de kan måske ikke huske om det er y-aksen eller x-aksen, og de kan måske også huske at hældningen af linjen spiller en rolle. Med mine tre forkerte svarmuligheder har jeg givet plausible forslag til forbindelser mellem ligningens koefficienter og grafens udseende. De forkerte svarmuligheder b) og c) lægger op til at det kun er skæringspunktet med den ene akse der bestemmer ligningen, og for at gøre disse svarmuligheder visuelt mere tiltalende har jeg placeret x'et og y'et på akserne ud for skæringspunkterne.

Det virker måske lidt plat at forsøge at snyde eleverne på denne måde, men jeg kan konstatere at det virker, og det viser hvor usikre eleverne i en C-niveau-klasse er inden for et emne som de ellers har brugt lang tid på i folkeskolen. Eleverne kan huske nogle af de vigtige ingredienser, men kan ikke ræsonnere sig frem til de præcise forbindelser. Den forkerte svarmulighed a) er baseret på den potentielle misforståelse at hældningen af en linje kun afhænger af hvor stejl den er på papiret, det vil sige af vinklen med x-aksen. Mange elever tænker ikke over at operationen "skalering af akser" ikke ændrer på det matematiske objekt, men ændrer på linjens vinkel til x-aksen. Hvis man tæller streger på akserne, kan man se at linjen går en enkelt streg hen og en enkelt streg ned, og derfor kunne man tro at linjens hældning er minus 1, hvilket forklarer svarmulighed a).

Alt i alt viste den diagnostiske test at en del af eleverne havde alvorlige mangler i deres forudsætninger for overhovedet at bruge grafer og ligninger. Inspireret heraf valgte jeg at bruge tid på at undervise i egenskaberne ved de enkelte registre – for eksempel fokuserede jeg på skalering af grafer og ækvivalens af ligninger, men det vil jeg ikke gå i dybden med her.

Design af undervisningsforløb

I det undervisningsforløb som var resultatet af mit speciale, valgte jeg en kovarianstilgang baseret på tabeller som jeg har behandlet i introduktionen til denne artikel. Fordelen ved at tage udgangspunkt i tabeller er at man starter i det mindst komplicerede register og derved i første omgang undgår de typer af misforståelser som jeg har været inde på i forbindelse med grafer og ligninger. Dermed vil en større andel af klassen være i stand til at følge med i starten af forløbet. Ulempen er at man samtidig starter i det register som indeholder mindst information. Dette kan føre til at eleverne får et ufuldstændigt billede af hvad variabelsammenhænge er, og man kan spørge sig selv om man overhovedet kan behandle de centrale egenskaber for variabelsammenhænge uden at bruge ligninger.

I mit speciale har jeg vist hvordan man ved at gøre tabellerne til dynamiske repræsentationer ved hjælp af de såkaldte "systemer" faktisk kan behandle halverings-/

fordoblingstid, monotoniforhold, omvendte sammenhænge og de karakteristiske egenskaber uden at bruge ligninger. Dette vil jeg uddybe om lidt, men først vil jeg behandle de regneteknikker i tabeller som det hele bygger på, nemlig udvidelse af tabeller.

Grundlæggende teknik: udvidelse af tabeller

En tabel kan i mit setup udvides på to forskellige måder. Enten bruges det givne system til at udvide tabellen for større og større (eller mindre og mindre) *x*-værdier, eller man kan interpolere og finde nye x-værdier mellem de eksisterende *x*-værdier (se figur 6).

Gentagen brug af eksisterende system:

x	*0*	*2*	*4*	*plus 2*
y	*1*	*5*	*9*	*plus 4*

→

x	*0*	*2*	*4*	*6*	*8*	*plus 2*
y	*1*	*5*	*9*	*13*	*17*	*plus 4*

Interpolation:

x	*0*	*2*	*4*	*plus 2*
y	*1*	*5*	*9*	*plus 4*

→

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*plus 1*
y	*1*	*3*	*5*	*7*	*9*	*plus 2*

Figur 6. *To måder at udvide en tabel på: gentagen brug af eksisterende system eller interpolation.*

Læg mærke til at interpolation er en ændring af systemet i en tabel til et system som er ækvivalent med det oprindelige system. For lineære sammenhænge er det særlig nemt at interpolere fordi ændringerne for begge variable er additive, men for eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge skal man også kunne opdele multiplikative ændringer (se figur 7).

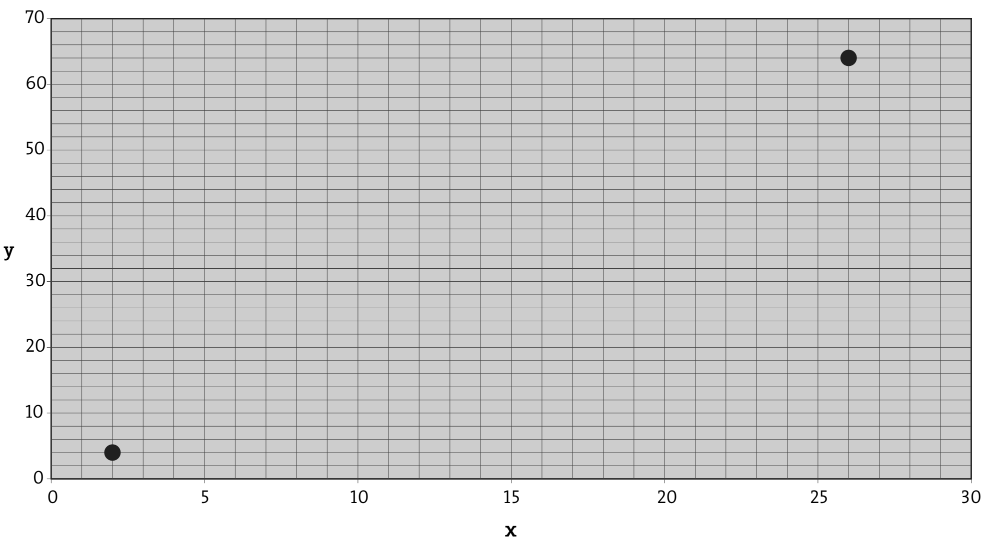
x	0	2	4	plus 2
y	1	9	81	gange 9

→

x	0	1	2	3	4	plus 1
y	1	3	9	27	81	gange 3

Figur 7. *Udvidelse af tabel: eksponentiel interpolation.*

Når en additiv ændring halveres for *x*, skal man altså tage kvadratroden af den tilhørende multiplikative ændring for *y* når man har at gøre med en eksponentiel sammenhæng. De viste teknikker er nyttige når man skal tegne en graf hørende til en tabel som kun indeholder få punkter, idet man ikke har ligninger til rådighed til at finde flere punkter til tabellen. Her er et eksempel på en opgave hvor tabeller og grafer på denne måde skal koordineres (se figur 8).



Figur 8. *Teknikker til udvidelse af tabeller bruges til at konstruere grafer.*

Opgaven løses ved at opstille en tabel med de to punkter, finde et system i tabellen, udvide tabellen ved interpolation og til sidst overføre de nye punkter til grafen.

Fordoblingstid, monotoniforhold og omvendte sammenhænge

I dette afsnit vil jeg beskrive hvordan jeg i mit speciale brugte systemer i tabeller og udvidelse af tabeller til at arbejde med fordoblingstid, monotoniforhold og omvendte sammenhænge uden at bruge ligninger. For det første er fordoblingstid meget nemt at indføre i mit setup. Fordoblingstiden T_2 for en eksponentiel sammenhæng er simpelthen den additive ændring for x som giver en multiplikativ ændring af y på 2. Jeg vil her gå mere i dybden med monotoniforhold (se tabellen i figur 9).

x	*1*	*gange 2*
y	*1*	*gange 3*

Figur 9. *En tabel for en voksende potens-sammenhæng.*

Man kan se at tabellen i figur 9 er en potens-sammenhæng da ændringerne for både *x* og *y* er multiplikative, og man kan se at sammenhængen er voksende da *y* bliver større når *x* bliver større. Hvad sker der når *x* går mod henholdsvis *0* og uendelig? For at besvare spørgsmålet udvides tabellen i begge retninger (se figur 10).

x	1/8	1/4	1/2	*1*	*2*	*4*	*8*	*gange 2*
y	1/27	1/9	1/3	*1*	*3*	*9*	*27*	*gange 3*

Figur 10. *Tabellen udvides.*

Udvidelse af tabeller giver på denne måde en introduktion til grænseværdier, og man kan udtale sig kvalitativt om grafernes udseende på denne baggrund. Grafen til ovenstående tabel nærmer sig for eksempel koordinatsystemets begyndelsespunkt. Generelt kan man se at man med gentagen brug af en fast, multiplikativ ændring af positiv størrelse aldrig kan skifte fortegn af variablen, mens man med gentagen brug af en additiv ændring altid vil kunne skifte fortegn. Derfor vil for eksempel grafen for en logaritmisk sammenhæng altid skære *x*-aksen, og grafen for en eksponentiel sammenhæng vil aldrig skære *x*-aksen.

Endelig vil jeg komme ind på hvordan det er naturligt at arbejde med omvendte sammenhænge i mit setup. I tabel 5 kan man se at da lineære sammenhænge og potens-sammenhænge befinder sig i skemaets diagonal, er den omvendte sammenhæng til en lineær sammenhæng også lineær, mens den omvendte sammenhæng til en potens-sammenhæng også er en potens-sammenhæng. De to resterende typer af sammenhænge er omvendte sammenhænge til hinanden. En omvendt sammenhæng defineres simpelthen som en omvendt tabel (se figur 11).

x	*0*	*2*	*4*	*plus 2*
y	*1*	*9*	*81*	*gange 9*

x	*1*	*9*	*81*	*gange 9*
y	*0*	*2*	*4*	*plus 2*

Figur 11. *Eksempel på to omvendte tabeller, svarende til omvendte sammenhænge. Det er nemt at se at logaritmiske og eksponentielle sammenhænge opfører sig modsat.*

Jeg håber at jeg med mine eksempler har givet et indblik i hvor meget matematik man faktisk kan lave ved hjælp af de såkaldte systemer i tabeller. Nu vil jeg gå over til at behandle anvendelserne af de viste metoder til modellering.

Modellering og overgangen til brug af ligninger

I mit speciale var modellering af tidsmæssige hensyn ikke i fokus, men for at undersøge om man kan lave meningsfulde modelleringsopgaver *uden* brug af ligninger, valgte jeg at lade et enkelt sæt hjemmeopgaver handle om modellering ved hjælp af tabeller og grafer. Opgaverne blev designet på baggrund af de tre dimensioner af ændringsbegrebet som jeg nævnte i teoriafsnittet om ændringer af Confrey og Smith: den numeriske dimension, den grafiske dimension og den komparative dimension. Jeg skulle finde en situation i det virkelige liv hvor eleverne havde nemt ved at forholde sig til ændringerne af de to variable, og hvor sammenhængen var en af de fire udvalgte typer. Valget faldt på bremselængdens afhængighed af hastigheden som er en velkendt kvadratisk sammenhæng, og på internetadressen www.doctordriver.dk/05ddnew/play/brems/brems.html fandt jeg et interaktivt program kaldet *doctordriver* hvor man med en bjælke kunne udvælge en hastighed hvorefter bremselængden blev udregnet. Det er velkendt at en fordobling af hastigheden giver en firedobling af bremselængden, og dette kan med vores notation udtrykkes således (se figur 12):

x	*gange 2*
y	*gange 4*

Figur 12. *Eksempel på et muligt system til en kvadratisk sammenhæng.*

Eksperimenterne med doctordriver skulle lede eleverne til at finde andre ækvivalente systemer til den samme sammenhæng (se figur 13).

x	*gange 2*
y	*gange 4*

x	*gange 3*
y	*gange 9*

x	*gange 4*
y	*gange 16*

Figur 13. *Eksempler på andre mulige systemer til en kvadratisk sammenhæng.*

Det er nemt at se at det første og det sidste system er ækvivalente da det sidste system fremkommer ved at bruge det første system to gange. Det er derimod ikke med de givne forudsætninger nemt at se at det midterste system er ækvivalent med de to andre. Jeg vil ikke gå mere i detaljer med dette, men blot konstatere at dette blev brugt som en overgang til at arbejde med ligninger for potens-sammenhænge på formen $y = b \cdot x^a$ hvor det kom frem at koefficienten a kan fortolkes på følgende vis: a er den potens som den multiplikative ændring for x skal opløftes i for at man kommer frem til den multiplikative ændring for y.

Generelt opstillede jeg formler for hver af de fire typer af sammenhænge hvor koefficienten a kun afhænger af tabellens system, og koordinerede på denne måde det numeriske og symbolske register. I den forbindelse er det vigtigt at bemærke at koefficienten a (hvis ligningerne for de fire typer af sammenhænge opskrives på standardform) netop fortæller noget om *ændringerne* for en variabelsammenhæng mens koefficienten b er mere statisk $- b$ angiver et fikspunkt. Resultatet blev på denne måde et afrundet forløb hvor ligningerne for de fire typer af sammenhænge til sidst kunne udledes og fortolkes på baggrund af den viden eleverne havde fra det numeriske og det grafiske register.

Evaluering af undervisningsforløbet

Som ønsket betød den valgte rækkefølge hvor vi tog udgangspunkt i tabeller, at alle elever havde større mulighed for at deltage i undervisningen end normalt. I evalueringen af forløbet var der flere elever der fremhævede den stigende sværhedsgrad:

- (Om sværhedsgraden) “Passende. Startede nemt og blev gradvist sværere.”
- “Det var ret nemt i starten og så blev det lidt udfordrende til sidst.”

Som lærer var det en fornøjelse at se *alle* elever række hånden op når man spurgte om noget i starten af forløbet, hvilket var et stort plus ved den valgte tilgang. Der var en helt anden stemning i klassen end i en normal matematiktime hvor mange af eleverne ikke ville være i stand til at følge med, så der er ingen tvivl om at vi fik en god start på forløbet. Til gengæld vendte normaltilstanden tilbage da vi begyndte at arbejde med ligninger sidst i forløbet. Der var ikke noget der tydede på at eleverne havde nemmere ved at bruge ligninger efter at have arbejdet intenst med tabeller og grafer først.

Et relevant spørgsmål er om eleverne lærte noget matematik de kunne bruge til noget, eller var det matematiske indhold blevet så fortyndet at det slet ikke var på gymnasieniveau? Min konklusion er at man med fordel kan introducere de fire typer af variabelsammenhænge ved hjælp af tabeller fordi man hurtigt får de karakteristiske egenskaber frem i lyset, men at man meget tidligere end jeg gjorde, bør inddrage modelleringsopgaver for at vise hvordan disse karakteristiske egenskaber kommer til udtryk i den virkelige verden. Der skal altså lægges vægt på *den komparative dimension* af ændringsbegrebet noget tidligere, jævnfør teorien om ændringer af Confrey og Smith. Ellers er der en fare for at det eneste eleverne lærer, er at lege med nogle “kunstigt udseende” tabeller. Dette bygger jeg på at mange af eleverne aldrig lærte at bruge tabellerne fleksibelt til at løse ukendte opgavetyper selv om de nemt kunne udvide tabeller og tegne grafer.

Konklusion

Jeg har i denne artikel fremlagt et udpluk fra mit speciale (Laursen, 2007) med titlen *"En Covarians-tilgang til Variabelsammenhænge i Gymnasiet – i et semiotisk perspektiv"*. Formålet er at give et bud på en alternativ tilgang til undervisningen i variabelsammenhænge i matematik på C-niveau i gymnasiet, og resultatet blev et undervisningsforløb der tog udgangspunkt i de karakteristiske egenskaber for lineære, eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge udtrykt ved hjælp af tabeller.

Derudover har jeg analyseret brugen af tabeller, grafer og ligninger i undervisningen i funktioner og er efter empiriske undersøgelser kommet frem til at mange af eleverne i forsøgsklassen havde alvorlige huller i deres forudsætninger for overhovedet at arbejde fleksibelt med disse repræsentationer. Det skal nævnes at jeg efterfølgende har haft mulighed for at afprøve min diagnostiske test på en 2. g-klasse med matematik på højt niveau, og at mange elever også her falder i fælderne med et brag! Man burde efter min mening bruge længere tid på generelle egenskaber for ligninger og grafer før man kører derudad med en lang række typer af variabelsammenhænge.

Min samlede vurdering er at det undervisningsforløb som jeg designede, giver en lettilgængelig introduktion til de fire nævnte typer af variabelsammenhænge og tilhørende begreber som halveringstid, monotoniforhold og omvendte funktioner. Forløbet kan sagtens genbruges i fremtiden, men modellering skal inddrages fra starten – ellers risikerer forløbet at blive en leg med "kunstige tabeller".

Referencer

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, s. 135-164.

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. I: F. Hitt (red.), *Representation, vision and visualization* (s. 311-335). Lokaliseret den 3. November 2008 på:
www.emis.de/cgi-bin/mathdien/MATH/DI/en/quick.html?first=1&maxdocs=100&type=html&an=2003b.01690&format=complete.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, s. 103-131.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality-symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12(3)*, s. 317-326.

Laursen, N. (2007). *En Covarians-tilgang til Variabelsammenhænge i Gymnasiet – I et semiotisk perspektiv*. Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet. Speciale som endnu ikke er publiceret.

Schwarz, B. & Dreyfuss, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics, 29*, s. 259-291.