

# Introduktion til Paul Cobbs matematikdidaktiske arbejde

*Jeppe Skott, DPU, Aarhus Universitet og MSI, Växjö Universitet, Sverige*

**Abstract** Paul Cobb fik i sommer overrakt ICMI's Freudenthalmedalje for sin matematikdidaktiske forskning. Hensigten med denne artikel er at introducere Cobbs forfatterskab. Hovedvægten er på den socialkonstruktivistiske forståelse af undervisning og læring fra 1990'erne, men der knyttes an til tidligere og senere arbejder. Pointen er at nok er der teoretiske skift i Cobbs arbejder over de seneste tre årtier, men der er også en rød tråd i form af en dobbeltinteresse i at teoretisere over praksis og bidrage til dens videreudvikling. Sammen med en teoretisk pragmatisme peger det mere på gradvis, kontinuert udvikling i Cobbs tilgang end på fundamentale brud i den.

Ved ICMI-11<sup>1</sup> konferencen i Mexico i sommer modtog Paul Cobb Freudenthalmedaljen for sin matematikdidaktiske forskning. Cobb som er professor ved Vanderbilt University i Nashville, er den anden modtager af medaljen. Freudenthalmedaljen uddeles af Den Internationale Matematikundervisningskommission, ICMI, for fremragende matematikdidaktisk forskning og mere præcist for "et større kumulativt forskningsprogram"<sup>2</sup> (ICMI, 2008a). Jeg skal i denne korte introduktion til Cobbs arbejde argumentere for at den karakteristisk er særdeles velvalgt i netop hans tilfælde.

Cobbs videnskabelige produktion er en af de mest omfattende og også en af de mest indflydelsesrige på hans felt. Han har således i løbet af de sidste godt 25 år alene eller sammen med andre skrevet ca. 140 artikler til velrenommerede tidsskrifter og bøger og derudover skrevet og redigeret bøger, conferencebidrag, udviklingsrapporter m.m. Det der gør Cobbs produktion interessant, er imidlertid ikke alene dens omfang og den ubestridelige kvalitet af mange af de enkelte arbejder. Det er også at forfatterskabet som helhed afspejler væsentlige og mere generelle udviklingstendenser i matematikens didaktik. Cobb har altså i høj grad været toneangivende på den fagdidaktiske scene. En læsning af hans arbejder er derfor en indgang ikke alene til et akademisk

1 The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) afholder hvert fjerde år en verdenskonference. Se mere på [www.mathunion.org/ICMI](http://www.mathunion.org/ICMI).

2 Denne og alle senere oversættelser i artiklen er foretaget af forfatteren.

forfatterskab, men også til en væsentlig del af matematikdidaktikkens historie siden 1980.

Omfanget og karakteren af Cobbs produktion gør det til noget af en udfordring at introducere hans arbejde på få sider. Jeg har valgt ikke at referere til de dele der næsten udelukkende har teoretisk interesse. I stedet vil jeg tegne en skitse af den (store) del af hans produktion der nok er teoretisk orienteret, men som mere umiddelbart handler om at bidrage til undervisningens praksis. Jeg vil referere til både ældre og nyere udgivelser. Idéen hermed er dobbelt.

For det første vil jeg identificere tre faser i Cobbs arbejde. Den første fase er karakteriseret ved en stærk tilknytning til den radikale konstruktivisme. I den periode arbejder Cobb sammen med bl.a. von Glasersfeld og Les Steffe for fx at karakterisere stadier i udviklingen af små skolebørns tællestrategier og talforståelser. Den anden fase kendetegnes ved en stadig stærkere inddragelse af mikrosociale perspektiver på læring, dvs. sociale perspektiver knyttet til det enkelte klasserum. I denne periode fokuserer Cobb i højere grad på sprogets og kommunikationens rolle og formulerer en socialkonstruktivistisk tilgang til læring der videreudvikler den oprindelige konstruktivistiske inspiration. Og i den tredje fase er interessen forskudt i retning af det der omtales som 'design research'. Her er hovedinteressen at planlægge og videreudvikle forskningsbaserede og teoriudviklende undervisningsforløb der har et stærkt fagligt fokus, og som medtænker både sociale og individuelle aspekter af læring og undervisning. Samtidig med at indholdet i forskningsindsatsen skifter fra den ene fase til den anden, gør den forskningsmetodiske tilgang det også. Jeg skal præsentere såvel de indholdsmæssige som de metodiske ændringer.

Imidlertid – og for det andet – vil jeg ikke betragte disse delvise skift i fokus som brud eller diskontinuiteter i Cobbs arbejde. Indholdsmæssigt bygger de hver for sig på det tidligere arbejde som de videreudvikler og anlægger nye perspektiver på. I den forstand er der netop tale om et 'kumulativt' forskningsarbejde (jf. ICMI-citatet ovenfor). Desuden er der en rød tråd igennem det meste af Cobbs videnskabelige produktion som binder den sammen på trods af de delvist forskellige teoretiske referencerammer. Det er således et gennemgående træk i Cobbs arbejde at ville udvikle teoretiske forståelser på baggrund af omhyggelige empiriske analyser af elevers læring og at benytte de teoretiske forståelser til at støtte undervisningens praksis. Der er i hele perioden tale om det han selv kalder et refleksivt teori-praksis-forhold (fx Cobb et al., 2001). Forståelsen af hvad praksis er, og af hvilke teoretiske perspektiver der med rette kan lægges på den, har ændret sig, men den underliggende bestræbelse er i høj grad den samme: at teoretisere over praksis og at bidrage til dens videre udvikling.

Cobb har et pragmatisk forhold til teori. Det betyder ikke at han mangler teoretisk orientering eller stringens i sin teoretiske tænkning. Tværtimod trækker hans arbejder på omfattende teoretiske referencerammer som han selv videreudvikler med

stor omhyggelighed. Imidlertid, siger Cobb, er diskussionen mellem tilhængere af forskellige overordnede teoretiske perspektiver – den radikale konstruktivisme, den kulturhistoriske skole, symbolsk interaktionisme, kritisk teori m.fl. – ofte båret af en næsten ideologisk overbevisning der ikke bidrager til at kaste lys over de problemer der behandles (Cobb, 2007). I modsætning hertil må valget af teoretisk ståsted være pragmatisk betinget. Det betyder at valget ikke afhænger af hvilken teoretisk tilgang der er “den rigtige”, men af hvilke formål tilgangene hver for sig kan tjene. Cobb holder sig således ikke tilbage fra at benytte forskellige teoretiske perspektiver der har et problematisk forhold til hinanden, og som på centrale punkter endda er i indbyrdes modstrid. Fx anvender han såvel den radikale konstruktivisme som den kulturhistoriske skole. Når jeg ovenfor beskriver udviklingen i Cobbs arbejde som kontinuert, betyder det ikke at de forskellige teoretiske referencerammer han benytter, let lader sig forene. Derimod betyder det at han koordinerer anvendelsen af forskellige teoretiske positioner som han benytter til hver deres formål. Spørgsmålet er for ham om og hvordan de hver for sig er anvendelige i den forstand at de kan bidrage med værdifulde perspektiver på det der undersøges. For Cobb er “anvendelighed” dog ikke alene et spørgsmål om umiddelbart at kunne løse praktiske undervisningsproblemer. Det drejer sig også om i hvilken udstrækning et teoretisk perspektiv kan bidrage til udviklingen af større indsigt og forståelse i de problemer der behandles. Der er altså (også) tale om en form for teoretisk anvendelighed.

Som sagt vil jeg i det følgende skitsere aspekter af Cobbs produktion fra hele hans karriere for at pege på såvel kontinuitet som forandring i hans arbejde. Jeg vil dog lægge hovedvægten på formuleringen af den socialkonstruktivistiske position, dvs. på Cobbs arbejder fra 1990’erne, idet den kan ses som et omdrejningspunkt for hans øvrige produktion. Desuden har Cobb og hans kollegaer i forbindelse med formuleringen af (deres version af) socialkonstruktivismen udviklet begreber og analysetilgange der har fået stor gennemslagskraft i matematikkens didaktik mere generelt.

Jeg har fundet det nødvendigt at gå forholdsvis konkret til værks i fremstillingen. Jeg refererer således ganske nøje til specifikke forskningsresultater fx om udviklingen i børns tællestrategier. Hovedidéen er dog ikke at dokumentere hvilke tællestrategier Cobb var med til at identificere. Det er at bruge Cobbs forskning om fx tællestrategier til at illustrere såvel hans empiriske omhyggelighed som historien om de længere og mere overordnede linjer i hans arbejde.

## **En tidlig inspiration: den radikale konstruktivisme**

Fra begyndelsen af 1980’erne arbejdede Cobb med nogle af den radikale konstruktivismes stærkeste fortalere, von Glasersfeld og Les Steffe. Det arbejde var medvirkende til at den radikale konstruktivisme fik en stærk placering i matematikkens didaktik i de

følgende år, og at den erstattede den behavioristiske tradition der havde domineret på området tidligere, i hvert fald i USA.

Der er to indbyrdes sammenhængende kendetegn ved Cobbs tidlige arbejder – det ene er indholdsmæssigt, det andet metodisk. Den radikalkonstruktivistiske tilgang gør at der indholdsmæssigt er et overvejende individuelt og kognitivt fokus. Idéen er således ganske minutiøst at kortlægge karakteren af og udviklingen i elevers individuelle tænkning om faglige begreber og metoder. Baggrunden herfor er den konstruktivistiske præmis at der ikke er nogen grund til at antage at elever overtager læreres eller andres forståelser i færdig form. Derimod må eleverne opbygge deres egne forståelser og metoder ved at inkorporere nye erfaringer i gamle. Der er derfor brug for en kortlægning af stadier i elevers individuelle konstruktioner og af eventuelle fællestræk i konstruktionerne på trods af de individuelle forskelle.

Det andet kendetegn er den metodiske tilgang idet Cobb og hans kollegaer benyttede sig af det de kalder “the constructivist teaching experiment”, det konstruktivistiske undervisningseksperiment. Her accepterer forskeren at han eller hun ikke kan opbygge absolut viden om elevernes læring, men kun modeller af denne læring baseret på forskningserfaringerne. Jeg skal eksemplificere såvel det konstruktivistiske udgangspunkt som den metodiske tilgang med henvisning til Cobbs første større forskningsarbejder. De handler om små skolebørns talforståelser og udviklingen i dem.

### **Udviklingen i børns tællestrategier og -forståelser**

Små børn lærer talremsen uden at talordene har nogen kvantitativ mening. Talordene har stort set samme karakter som “okker-gokker-gummiklokker”. Det første større forskningsprojekt som Cobb deltog i, drejer sig om udviklingen i elevers talforståelse når talremsen relateres til tællelige objekter, dvs. når “et, to, tre, ...” kobles til genstande eller enheder i barnets omverden (Steffe et al., 1983; Steffe & Cobb, 1988). Der er, siger Cobb og hans kollegaer, ikke nogen grund til på forhånd at forvente at elever gennemløber nøjagtig samme udvikling på vej til at kunne operere med abstrakte enheder. Imidlertid peger deres konkrete undersøgelser af udviklingen i børns tællestrategier på at der er fællestræk (Steffe et al., 1983, s. 12).

I det første arbejde identificerede Cobb og hans kollegaer fem faser i børns tællestrategier (Steffe et al., 1983). Det centrale er, siger de, hvilke enheder eleverne tæller, og at de i det hele taget udvikler forståelse af idéen om en enhed. Det er altså enhedernes karakter der kendetegner stadierne i børns tællestrategier. Børn begynder med at tælle konkrete objekter som klodser på et bord, fugle på en græsplæne og lign. Her kan enhederne sanses umiddelbart. Denne ‘perceptuelle’ fase afløses når børn efterhånden bliver i stand til at tælle enheder der er skjult. De er dog i første omgang afhængige af at kunne genskabe mentale billeder af genstandene, og Cobb og hans kollegaer taler

derfor om en 'figural' strategi. I begge disse tilfælde vil eleverne benytte motorisk aktivitet, fx ved at pege på aktuelle eller forestillede genstande når de tæller. Det baner vejen for den næste fase hvor barnet tæller sine egne bevægelser. I den situation er den enhed der tælles, 'motorisk'. Barnet bruger og tæller fx sine pegebevægelser i situationer hvor det ikke kan se de enheder det tæller. Det sker fx hvis barnet skal forestille sig at man har de fem marmorkugler der ligger på bordet, og man får tre mere som man ikke har fysisk til rådighed. Barnet vil da typisk tælle de første fem mens hun peger på de fem kugler en ad gangen. Derefter vil hun fortsætte med at sige "seks, syv, otte" mens pegebevægelsen gentages tre gange mere, uden at der er marmorkugler at pege på. Barnet tager et yderligere skridt når det bliver i stand til at tælle sine egne talord. I en situation hvor der ikke er kugler til rådighed, skal hun måske finde ud af hvor mange kugler man har i alt hvis man har fem og får tre mere. Hvis hun siger "der er fem kugler, en, to, tre, fire, fem – og så seks, syv, otte", tæller hun 'verbale enheder' i den forstand at hun er nødt til at udtale hvert talord for at kunne bruge det som et tegn for en kugle. Og endelig bliver barnet i stand til at tælle 'abstrakte enheder'. Det er tilfældet hvis hun i situationen ovenfor siger "der er fem, så er det seks, syv, otte". Her forstår barnet "fem" som symbol for et antal kugler som man kunne tælle hvis man ville. Forskellen på at operere med verbale enheder og abstrakte enheder kan således komme til udtryk ved at barnet i det sidste eksempel er i stand til at benytte talordene til en "tæl videre-strategi" frem for en "tæl alle-strategi".

De fem tælleenheder som Cobb og hans kollegaer identificerede i børns udvikling – de perceptuelle, figurale, motoriske, verbale og abstrakte – blev senere udgangspunkt for undersøgelser af børns forståelse og brug af regnemetoder (Steffe & Cobb, 1988). Jeg skal ikke her gå i detaljer med det arbejde, og gennemgangen af tællestrategierne skal her blot tjene til at vise en vigtig hensigt med Cobbs arbejde i første halvdel af 1980'erne. Den er at udvikle modeller af børns tænkning, eller som Steffe og Cobb formulerede det: at "finde ud af hvad der foregår i børns hoveder" (Steffe & Cobb, 1988, s. vii). Til det formål brugte de en metode som de kaldte "the constructivist teaching experiment", det konstruktivistiske undervisningseksperiment.

### Det konstruktivistiske undervisningseksperiment

Et konstruktivistisk undervisningseksperiment har ikke umiddelbart meget med almindelig klasseundervisning at gøre. Derimod er det en speciel form for interviewundersøgelse. Det adskiller sig fra andre kliniske interviews ved at det ikke blot er hensigten at kortlægge elevernes *aktuelle* forståelser af de begreber og metoder der undersøges. Derimod er det ambitionen at karakterisere og støtte *udviklingen* i forståelserne over perioder på helt op til to år når forskeren spiller en relativt aktiv rolle. Det er en rolle der har afgørende ligheder med den læreren spiller i det som Cobb & Steffe i 1980'erne karakteriserer som 'konstruktivistisk undervisning'. Den kræver at

læreren bevidst forsøger dels at bygge sin undervisning på sine forestillinger om elevernes aktuelle forståelser, dels at se såvel sin egen som elevens aktivitet fra elevens synsvinkel (Cobb & Steffe, 1983)<sup>3</sup>.

I det konstruktivistiske undervisningseksperiment arbejder forskeren med en eller nogle få elever ad gangen for at udvikle modeller af deres aktuelle forståelser og faglige udvikling. Hensigten er desuden at udvikle metoder der kan støtte fortsat læring. Ambitionen er imidlertid ikke blot at analysere netop disse elevers forståelse og fremskridt og at bygge undervisningsinitiativer der har relevans for dem. Modellerne skal ganske vist være så specifikke at de kan gøre rede for en enkelt elevs udvikling og fremskridt, men samtidig skal de kunne gøre rede for elevers læring på det pågældende faglige område mere generelt. Denne dobbelte interesse forsøger Cobb og hans kollegaer at forfølge ved løbende at lade teoretiske overvejelser og empiriske analyser berige hinanden. De udvikler generelle teoretiske forståelser med udgangspunkt i empiriske analyser, og den udviklede teori benyttes til at lægge nye vinkler på de observerede data. Denne cykliske bevægelse fører til modeller af elevers læring og af mulig undervisning. Fx er modellerne af elevers tællestrategier (jf. afsnittet ovenfor) tænkt som måder at forstå elevers tænkning på og som redskaber for lærere i deres undervisning af små skolebørn i tal og regning.

## En socialkonstruktivistisk tilgang til forståelsen af klasserum

Cobbs teoretiske pragmatisme har gjort at han i høj grad inddrager forskellige teoretiske tilgange i sit arbejde. Det er ikke mindst tilfældet i forbindelse med et af hans mest betydningsfulde forskningsbidrag, et "socialkonstruktivistisk" eller "emergende" perspektiv på læring og undervisning (fx Cobb & Yackel, 1996; for en dansk introduktion se Skott, Jess & Hansen, 2008, s. 134-167). En af idéerne er at koordinere forståelse af de enkelte elevers læring med forståelse af de normer der udvikles i den pågældende klasse. Vi skal tage udgangspunkt i et eksempel på to elevers indbyrdes diskussion af et fagligt spørgsmål for at illustrere pointen (tekstboks 1).

I den lille episode i tekstboksen benytter Anne en standardalgoritme til at finde summen af fem 12'ere. Her og i det efterfølgende forklarer hun sin fremgangsmåde i alt fire gange for Jack der dog fortsat protesterer, og de kommer aldrig frem til det Cobb kalder en "antaget-fælles" forståelse af det faglige indhold (Cobb, Yackel & Wood, 1992).

3 Det skal nævnes at Cobb (og mange andre) siden har påpeget at det i en vis forstand ikke giver mening at tale om 'konstruktivistisk undervisning'. Fra en konstruktivistisk synsvinkel konstruerer elever altid noget, uanset hvilken type undervisning de sættes i. Formuleringen om konstruktivistisk undervisning siger blot at en lærer med et konstruktivistisk udgangspunkt må forsøge at se elevernes faglige verden som de selv ser den, og basere sin undervisning på det.

### Tekstboks 1: Matematisk kommunikation i indskolingen

Fra Cobb, Wood, Yackel & McNeal (1992).

Cobb, Wood, Yackel & McNeal (1992) analyserer den matematiske kommunikation i indskolingsklasser. I en af klasserne forsøger to elever, Anne og Jack, at finde summen af fem 12'ere. Anne skriver 12 fem gange lodret under hinanden i en klassisk additionsalgoritme, og hun forklarer Jack hvordan hun finder sit resultat:

Anne: "2, 4, 6, 8, 10" (lægger de fem toere i enersøjlen sammen). "Man skriver nul der" (skriver "0" på enernes plads) "og én der" (skriver 1 i toppen af tiersøjlen). "1, 2, 3, 4, 5, 6" (tæller de seks ettaller i tiersøjlen). "Er du enig, det er 60?"

[...]

Jack: "Vent. Det her er 10. Se 1, 2, ..., 8, 9, 10" (lægger de fem toere i enersøjlen sammen). "10."

Anne: "En dér" (peger på 1 som hun har skrevet øverst i tiersøjlen). "1, 2, 3, 4, 5, 6. 60."

Jack: "610?"

Anne: "Du lytter ikke efter."

Jack: "Jeg fatter ikke det her."

[...]

Anne: "2, 4, 6, 8, 10. Lyt så nu. Sæt 0 dér."

Jack: "Ja."

Anne: "Ettallet herop."

Jack: "Det er ikke 0."

Anne: "1, 2, 3, 4, 5, 6."

Jack: "Det er ikke 0. Det er 10."

Anne: "Nej."

Jack: "Men det er ikke 0. Det er 10. 1, 2, (...) 8, 9, 10."

Anne: "Lyt nu."

[Diskussionen fortsætter.]

(Cobb, Wood, Yackel & McNeal 1992, s. 579).

Den episode kan analyseres fra forskellige vinkler. Fx kan man anlægge et konstruktivistisk perspektiv og vurdere hvilke forståelser Anne har af den pågældende situation. Med en konstruktivistisk terminologi (Steffe & Cobb, 1986; von Glaserfeld, 1995) kan man sige at hun genkender opgaven som en additionssituation, og at hun assimilerer den i sit skema for addition af tocifrede tal. Det skema inkluderer tilsyneladende anvendelsen af en standardalgoritme. Hun finder et svar som læreren accepterer, og

hun får således skemaet bekræftet. Jack er på den anden side ikke overbevist. Han insisterer på at summen af de fem totaler er 10 og ikke 0. Da de søger hjælp hos læreren til at løse uenigheden, siger han: "Alle toerne bliver 10 når man lægger dem sammen. Hun tager én væk fra titallet" (Cobb, Wood et al., 1992, s. 580). Jack protesterer således mod Annes måde at løse opgaven på.

Fra en konstruktivistisk synsvinkel kan man således sige at de to elever har konstrueret forskellige skemaer for addition af to cifrede tal, og at den mentale uligevægt der opstår for Jack, ikke kan løses i situationen fordi han ikke kan tilpasse sit skema til Annes.

Der kan imidlertid også lægges en anden vinkel på kommunikationen mellem de to elever. De forklaringer Anne tilbyder, relaterer sig ikke til meningsindholdet i at operere med tal. Et sådant indhold kunne fx være at ti enere kan omgrupperes til en tier som kan skrives som et ettal et vilkårligt sted i tierkolonnen. For Jack – og sandsynligvis også for Anne selv – består Annes tilgang imidlertid i blot at manipulere et sæt af symboler hvilket Jack beskriver som "mixing up a bunch of numbers" (Cobb, Wood et al., 1992, s. 580). Der er altså en forskel i deres forståelse af hvad der skal til for at der er tale om en god matematisk forklaring. Det er en mulig forklaring på at læringspotentialerne i episoden aldrig realiseres.

### **Sociale normer, sociomatematiske normer og klasserummets matematiske praksisser**

I Annes og Jacks klasse er der tilsyneladende en forventning om at eleverne skal forklare hvordan de finder svarene på de opgaver de arbejder med. Det er en norm som Anne opfylder. Når kommunikationen bryder sammen, og hun opgiver at forklare yderligere, er det altså ikke fordi hun i den konkrete situation ikke ønsker at give den forklaring Jack efterlyser. Imidlertid ser det ud til at hun og Jack har forskellige opfattelser af hvad der er en god eller bare en acceptabel matematisk forklaring. Annes forklaring relaterer sig til en måde at manipulere med symboler på, men Jack forventer i højere grad en forklaring der viser hvordan meningsindholdet i additionen hænger sammen med symbolmanipulationen. Han er således ikke tilbøjelig til at acceptere Annes forklaring, for – som han siger – summen af fem toere er 10 og ikke 0. Jack synes således at forvente en forklaring der henviser til at der er tale om at operere på tiere og enere som talmæssige størrelser.

Disse forskellige forestillinger om hvad en god matematisk forklaring er, kan ses som et aspekt af det mere generelle spørgsmål om hvad der overhovedet er lodig matematisk aktivitet. I den forstand, siger Cobb, Wood m.fl., repræsenterer de to elever forskellige faglige traditioner i skolematematik selv om de går i samme klasse. Generelt kan klasserum domineres af forskellige sådanne traditioner. Traditionerne er imidlertid ikke bare ydre rammer for elevernes faglige læring. De er, siger Cobb, ganske bestemmende for hvilke forståelser eleverne kan konstruere af og om matematik. Desuden



er de faglige traditioner socialt og interaktivt etablerede i den pågældende klasse. Derfor må det ganske individuelle perspektiv på læring og viden der ligger i den radikale konstruktivisme, udfordres hvis man skal forstå faglig læring i klassens sociale sammenhæng. Man kan ikke nøjes med at ville undersøge “hvad der foregår i elevernes hoveder” (jf. det tidligere citat fra Steffe & Cobb, 1988, s. vii). Man må se på relationerne mellem det der foregår i deres hoveder, og den lokale sociale sammenhæng.

Der er her en implicit kritik rettet mod de konstruktivistiske undervisningseksperimenter som Cobb tidligere benyttede. De tager ikke de socialt udviklede normer i et klasserum i betragtning. Der er derfor brug for at erstatte konstruktivistiske undervisningseksperimenter med en metode der er knyttet til hele klassers undervisning. Det sker i ‘classroom teaching experiments’ som gennemføres for at “gøre rede for elevers matematiske udvikling *som den finder sted i klasserummets sociale kontekst*” (Cobb & Yackel, 1996, s. 176, fremhævelse i originalen). Her tillægges interaktionerne i klasserummet en ny og mere betydningsfuld rolle. I den tidligere konstruktivistiske tilgang blev social interaktion set som en måde at understøtte en i øvrigt uafhængig psykologisk udvikling på. Interaktion har da et udvendigt forhold til læringsprodukterne. I forbindelse med “classroom teaching experiments” ses interaktionen som afgørende for selve indholdet i elevernes læring.

Cobb og hans kollegaer forsøger således i 1990’erne at koordinere psykologiske og sociale perspektiver på matematikklasserum. Det gør de på tre forskellige niveauer af arbejdet i den minikultur der udvikles i en klasse (se tabel 1). Det ene niveau drejer sig om de generelle forestillinger og forventninger om faglig aktivitet der udvikles i klassen. Det andet niveau drejer sig også om forestillinger og forventninger, men er mere specifikt knyttet til det faglige indhold. Det tredje niveau drejer sig om etableringen af matematiske praksisser i klasserummet og – i det psykologiske perspektiv – om elevernes udvikling af faglige begreber og deltagelse i faglige aktiviteter.

**Tabel 1.** Cobb & Yackels sociale og psykologiske perspektiver på matematikklasserum (fra Cobb & Yackel, 1996, s. 177).

Det sociale perspektiv	Det psykologiske perspektiv
1. Sociale normer i klasserummet.	2. Forestillinger om ens egen og andres rolle i klasserummet og om den generelle karakter af matematisk aktivitet
3. Sociomatematiske normer	4. Forestillinger og værdier der er knyttet til matematik og matematisk aktivitet
5. Matematiske klasserumspraksisser	6. Matematiske begreber og aktiviteter

I eksemplet i tekstboks 1 ser det som nævnt ud som om Anne og Jack deler en forestilling om at man skal forklare sin tænkning når man arbejder med matematik (punkt 2 i tabel 1). I klasserum kan der udvikles en accept af eller norm for at det er nødvendigt med sådanne forklaringer, og af at man har en forpligtelse til at forsøge at forstå andres forklaringer. Sådanne normer kan dog lige så godt gælde i andre fag som fx historie og dansk. Det er således en generel social norm for faglig aktivitet (punkt 1) som også kan gælde for matematik (Yackel & Cobb, 1992).

Imidlertid er der tilsyneladende en uenighed mellem Anne og Jack om hvad der er meningen med en matematisk forklaring. Mens Jack forventer at forklaringen skal relateres til meningsindholdet i de matematiske symboler der arbejdes med, så er Anne tilsyneladende mere optaget af at forklare hvordan symbolerne kan manipuleres. Der er således forskel på deres forestilling om hvad der tæller som en acceptabel matematisk forklaring, og mere generelt om hvad der kendetegner matematisk aktivitet (punkt 4 i tabel 1). Ligesom der kan udvikles generelle sociale normer for faglig aktivitet i et klasserum, kan der udvikles normer for hvad der er lødig aktivitet i forbindelse med de mere matematiske dele af arbejdet. Disse fagspecifikke normer kalder Cobb og hans kollegaer "sociomatematiske normer" (punkt 3). "Sociomatematiske normer" er fx:

normative forståelser af hvad der tæller som matematisk forskelligt, matematisk sofistikeret, matematisk effektivt og matematisk elegant i en klasse. [...] Tilsvarende er det en sociomatematisk norm hvad der tæller som en acceptabel matematisk forklaring eller begrundelse. (Yackel & Cobb, 1996, s. 461)

Sådanne normer kan fx udvikles ved at man som underviser organiserer klassesamtaler hvor elevernes metoder sættes til diskussion. Yackel og Cobb (1996, s. 469 ff.) giver et sådant eksempel fra begyndelsen af 2. klasse (se tekstboks 2).

Pointen i eksemplet i tekstboks 2 er at Jameels forklaringer refererer til meningsindholdet i cifrene. Det står i modsætning til Travonda der udelukkende synes at referere til cifrene. For Jameel er ettallerne 10 hver, og totallet i tiersøjlen er 20, mens to-, tre- og femtallet i enersøjlen refererer til antal enere. Desuden er svaret ikke et total og et femtal sådan som Travonda formulerer det, men 25.

For udvikle sociomatematiske normer i en klasse er det afgørende at eleverne ikke bare engageres i at finde svar på opgaver, men i at finde alternative måder at løse opgaverne på og sætte forskelle og ligheder til diskussion. Det er det Jameel gør i episoden i tekstboks 2. Læreren accepterer både Jameels udfordring til Travondas forklaring og Jameels alternativ uden direkte at affærdige Travondas forslag. En tilsvarende situation kunne opstå i eksemplet med Anne og Jack (jf. tekstboks 1). Antag fx at læreren i den situation havde bedt andre om at præsentere deres metoder. En elev kommer til

tavlen og skriver ligesom Anne de fem 12-taller op under hinanden, og hun forklarer mens hun peger: "10 plus 10 er tyve plus 10, det er tredive, fyrre, halvtreds" (skriver '50' under 12-tallerne og begynder så på enersøjlen); "to plus to plus to plus to plus to, det er 10" (skriver '10' under '50'). "Så det er 10 og 50. Det er 60." I begge disse episoder, dvs. både i situationen med Travonda og Jameel og i den opdigtede fortsættelse med Anne og Jack, kan man som lærer forsøge at legitimere den forklaring der relaterer sig til forklaringen til de matematiske objekter som symbolerne refererer til. Dermed kan den forklaring der udelukkende refererer til symbolerne, træde i baggrunden indtil der er en fælles forestilling om hvad cifrene på tiernes plads refererer til.

## Tekstboks 2: Udviklingen af sociomatematisk norm om matematisk argumentation

Fra Yackel & Cobb (1996).

Travonda forklarer sin løsning på opgaven. *Roberto havde 12 pennies, og hans bedstemor gav ham nogle flere. Nu har han 25. Hvor mange fik han af sin bedstemor?* Hun beder læreren skrive 12 og 13 under hinanden og forklarer så: "Jeg sagde én plus én er to, og tre plus to er fem".

$$\begin{array}{r} 12 \\ +13 \\ \hline 25 \end{array}$$

Der er flere elever der udfordrer den forklaring, blandt dem Jameel og Rick:

Jameel: (hopper op af sædet og peger på skærmen) "Mr. K. Det er 20. Det er 20."

Rick: (samtidig) "Uh, det der er 25."

Flere elever: "Det er 25. Det er 25. Han taler om det der."

Jameel: "10. 10. Det er 10 lige der ..." (går op til skærmen og peger på tallene mens han taler). "Den her 10'er og den her 10'er" (peger på ettallerne i tierkolonnen). "Det er 20" (peger på to i tierkolonnen).

Læreren: "Ja."

Jameel: "Og det her er fem mere, og det er 25."

Læreren: "Det er rigtigt. Det er 25."

(Yackel & Cobb, 1996, s. 470)

Den slags diskussioner legitimerer imidlertid ikke bare nogle matematiske måder at argumentere på og dermed en sociomatematisk norm om hvad der er et godt matematisk argument. De legitimerer også nogle matematiske metoder frem for andre. Når sådanne metoder etableres i klassen så de ikke længere kræver argumentation fordi alle tilsyneladende har accepteret dem, bliver de en del af det Cobb og hans kollegaer kalder “matematiske klasserumspraksisser” (punkt 5 i tabel 1). Når eleverne deltager i disse praksisser og bidrager til at videreudvikle dem, reorganiserer eleverne deres egne forståelser af det pågældende indhold. Fx kan Anne, Jack og deres kammerater videreudvikle deres forståelser af addition og af positionssystemet ved at engagere sig i udviklingen af de netop nævnte praksisser. Et muligt næste skridt kunne være at finde ud af “hvor mange tiere og enere der er”. Så ville man i en vis forstand operere på symbolerne men eksplicitere at det er antallet af tiere man finder når man tæller første-cifrene sammen i tocifrede tal.

Cobb og Yackel påpeger i overensstemmelse med deres oprindelige konstruktivistiske udgangspunkt at man ikke kan vide om eleverne tænker ens blot fordi de deltager i tilsyneladende fælles praksisser. De bruger derfor den lidt tunge formulering at forståelserne er ‘antaget-fælles’ (taken-as-shared), snarere end fælles. Faktisk vil psykologiske analyser af de enkelte elevers tænkning typisk afsløre forskelle i deres tænkning selv om de deltager i fælles matematiske klasserumspraksisser og har udviklet antaget-fælles forestillinger om meningen med dem.

De psykologiske og sociale perspektiver på matematiklæring i klasserum kan suppleres, eller med Cobbs ord, komplementeres hinanden. Man kan fokusere på de psykologiske sider af sagen og se dem på baggrund af de normer og praksisser der udvikles socialt. Og man kan omvendt fokusere på de sociale sider som udvikler sig på baggrund af de forestillinger og faglige forståelser eleverne hver for sig udvikler. Pointen er altså at det sociale og det psykologiske er så fuldstændig integreret i hinanden at ingen af dem kan forstås uden at medtænke den anden. Der er ikke tale om at det ene perspektiv, det sociale eller det psykologiske, er “rigtigere” end det andet. Man kan ganske enkelt ikke forstå det ene uden at medtænke det andet. Det er det der er kernen i det socialkonstruktivistiske eller emergerende perspektiv på klasserum som Cobb i 1990’erne udviklede sammen med sine kollegaer, især sammen med Erna Yackel.

## Design research

Siden Cobb formulerede sit socialkonstruktivistiske syn på læring i klasserum, har han i stigende omfang været optaget af at udvikle og teoretisere over undervisningsforløb præget af dette syn. Det har han gjort i specifikke faglige sammenhænge, som fx længdemål i 1. klasse (fx Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001). Sådanne arbejder er eksempler på “design research”. Som eksempel skal vi se på det omfattende projekt som Cobb har gennemført sammen med en række kollegaer om dataanalyse

i 7. og 8. klasse (fx Cobb, 1999; Cobb, 2000; Cobb, McClain & Gravemeijer, 2003; for en dansk introduktion se fx Skott, Jess & Hansen, 2008, s. 146 ff. eller Schou, Hansen, Skott & Jess, 2008, s. 380 ff. og 390 ff.).

Det var ét udgangspunkt for arbejdet med dataanalyse at Cobb og hans kollegaer foretog en meget omfattende læsning af eksisterende forskning på området. Et andet udgangspunkt var nogle evalueringer af hvordan eleverne i den pågældende klasse arbejdede med og diskuterede data. Det var et gennemgående træk at eleverne opfattede det at arbejde med data som "at gøre noget med tal", fx at beregne gennemsnit eller andre deskriptorer (Cobb, 2000, s. 47). Det var således i alt væsentligt et område der blev forbundet med en række procedurmæssige tiltag som fx at lægge observationsværdierne sammen og dividere med antallet af dem når der var tale om numeriske data. Negativt formuleret forbandt eleverne ikke data og dataanalyse med forsøget på at finde tendenser i data for at kunne forstå eller tage stilling til væsentlige spørgsmål vedrørende den pågældende situation. Derfor blev det et mål med undervisningseksperimentet at udfordre og influere elevernes overordnede forståelser af hvad meningen med dataanalyse overhovedet er.

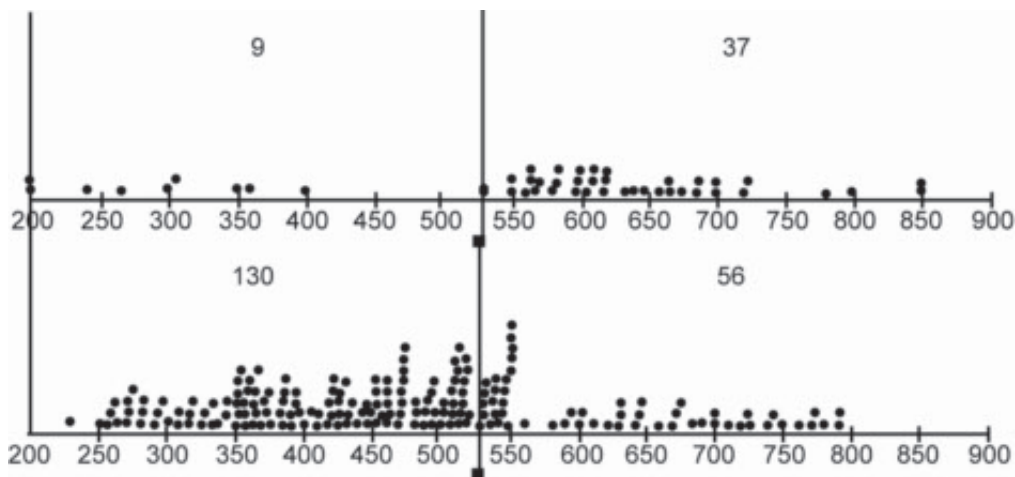
På den baggrund blev det besluttet at udgangspunktet for undervisningen skulle være empiriske fordelinger af datasæt som eleverne skulle forholde sig til. Blandt de fordelinger som eleverne arbejdede med, var:

- En sammenligning af kvaliteten af to aids-behandlinger målt ved antallet af T-celler i patienternes blod
- En sammenligning af holdbarheden af to typer af batterier
- En vurdering af om en fartkontrol har en effekt, ved at sammenligne bilers hastigheder før og efter kontrollen
- Sammenhængen mellem bilers hastighed og deres CO<sub>2</sub>-udledning med henblik på at tage stilling til hvad der er rimelige fartgrænser.

Eleverne arbejder i mange timer med at analysere og diskutere hvert af disse og andre datasæt, bl.a. ved at bruge computerprogrammer som Cobb og hans kollegaer har udviklet til formålet. Disse programmer præsenterer datasættene grafisk på forskellig vis. Fx kan hvert batteris holdbarhed præsenteres som et punkt placeret over en akse der angav holdbarhed målt i antal timer. Det gør det muligt at tale om fx hvor der er "bakker" i fordelingerne, dvs. hvor datapunkterne samler sig i klumper og derfor placeres oven i hinanden på grafen, og om observationerne er spredt mere ud ved den ene slags batteri end ved den anden. I kraft af diskussionerne om data og om de måder data kan præsenteres på, udvikles stadig mere avancerede matematiske klasserumspraksisser. Den første går ud på at sammenligne absolutte antal som når Janice argumenterer for at *Always ready*, det ene batterimærke, er bedst, for "ud af de

10 batterier der holdt længst, er de 7 fra *Always ready*" (Cobb, 1999, s. 15). Argumentet imødegås af andre elever der påpeger at de batterier der holder dårligst, også er fra *Always ready*. Det fører til en diskussion af i hvilke sammenhænge det er afgørende at et batteri holder i hvert fald i en vis periode. Som Barry siger: "Hvis man skal bruge dem til noget virkelig vigtigt, og man kun har et eller to batterier, så synes jeg virkelig man skal gå efter det mest konstante" (Cobb, 1999, s. 16).

I den første matematiske klasserumspraksis sammenligner eleverne primært fordelinger ved at se på absolutte antal, dvs. ved additive sammenligninger: "Der er så og så mange der holder længere end (...) og der er flere af den slags end af den slags, der (...)" De kommer siden i situationer hvor antallet af observationer i de datasæt der skal sammenlignes, er meget forskellige. Det gælder fx når de skal sammenligne aids-behandlinger. Efter den traditionelle behandling har 130 patienter færre end 525 T-celler i blodet, mens 56 har flere. De tilsvarende tal for den eksperimentelle behandling er hhv. 9 og 37 (se figur 1). Om den situation siger Ken: "Jeg har et forslag. Jeg ved ikke hvordan man kan gøre det [uhørligt]. Er der en måde at sammenligne 130 og 56 med 9 og 37? Jeg ved ikke hvordan." (Cobb, 1999, s. 26). Her er de på vej til at udvikle den næste klasserumspraksis der grundlæggende går ud på at foretage multiplikative sammenligninger. Det er centralt for at eleverne kan udvikle denne praksis, at fastholde det oprindelige problem som fokus for deres opmærksomhed, nemlig spørgsmålet om hvilken behandling der er bedst. Samtidig skal de udvikle en egentlig matematisk måde at forholde sig til de to datasæt på når de beskriver forskellene mellem dem.



**Figur 1.** T-celler i blodet hos to grupper af aids-patienter. Patienter der modtager den traditionelle behandling, ses nederst; dem med den eksperimentelle behandling ses øverst.

Den form for “design research” der her er tale om, foregår ved at Cobb og hans kollegaer planlægger et længerevarende forløb af helt op til et års varighed på et specifikt fagligt område. Fra dag til dag reviderer de planerne for den næste time på baggrund af de høstede erfaringer så der løbende opstår minicyklusser af planlægning og revision af den planlagte undervisning. Det er en langsigtet interesse at udvikle det de kalder en “domain specific instructional theory”, dvs. en teori for undervisning i et specifikt fagligt område som fx dataanalyse. Det er en del heraf at de koordinerer de sociale og psykologiske perspektiver på de tre niveauer af klassens mikrokultur der er indeholdt i tabel 1. I forlængelse af disse mere fagligt specifikke overvejelser udvikler de også nye teoretiske forståelser af fx kommunikationens og symbolernes rolle mere generelt. Det tilsyneladende beskedne teoretiske ambitionsniveau – en indholdsspecifik undervisningsteori – får dermed også andre potentialer.

## Afsluttende kommentarer

I ICMI's begrundelse for at tildele Paul Cobb Freudenthalmedaljen hedder det at hans “arbejde er en sjælden kombination af teoriudvikling, empirisk forskning og praktiske anvendelser” (ICMI, 2008b). Jeg har i det foregående forsøgt at vise at denne kombination har præget Cobbs arbejder fra begyndelsen for snart 30 år siden. Hans udgangspunkt var et overvejende individuelt og kognitivt syn på matematiklæring. Det blev i 1990'erne suppleret med lokalt-sociale perspektiver der især fokuserer på sprog og kommunikation i det konkrete klasserum. De sidste 10 års “design research” fokuserer på at planlægge og teoretisere over undervisning og læring i klassens sociale sammenhæng. Desuden inddrager Cobb og hans kollegaer i stigende omfang sociale overvejelser der rækker ud over det specifikke klasserum, fx ved at se på den rolle som skolen og skolesystemet spiller for undervisning og læring.

Udviklingen i Cobbs forfatterskab er båret af hans underliggende dobbeltinteresse i såvel at teoretisere over praksis som at bidrage til dens videreudvikling. Det er en interesse der går som en rød tråd gennem hans arbejder, og det er den der ligger bag skiftene i hans teoretiske orientering. Det er således denne interesse der har gjort det nødvendigt at anlægge stadig mere sociale perspektiver på praksis efterhånden som den oprindeligt kognitive tilgang viste ikke blot sine potentialer, men også sine begrænsninger. Den version af socialkonstruktivisme som Cobb og hans kollegaer formulerer, undgår disse begrænsninger ved at koordinere individuelle og sociale perspektiver på matematiklæring og -undervisning. Når man gør det, kan der rejses andre spørgsmål, og der kan gives andre typer af svar end hvis man udelukkende hæfter sig ved det ene eller det andet perspektiv.

Den socialkonstruktivistiske tilgang til forståelsen af matematikklasserum har haft stor indflydelse i matematikkens didaktik. Cobb har dermed ikke blot bidraget med nye forståelser af undervisning og læring på specielle faglige områder som indledende

talbehandling og dataanalyse. Han har i høj grad også haft indflydelse på hvad der overhovedet anses for at være gode matematikdidaktiske spørgsmål og svar. Han har altså været central i udviklingen af de "socio-matematikdidaktiske normer" der i dag præger matematikkens didaktik som forskningsfelt.

## Referencer

- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: the case of statistical data analysis. *Mathematical thinking and learning*, 1(1), s. 5-43.
- Cobb, P. (2000). The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction. I: J. Boaler (red.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (s. 45-82). Westport, CT: Ablex.
- Cobb, P. (2001). Supporting the improvement of learning and teaching in social and institutional context. I: S.M. Carver & D. Klahr, *Cognition and Instruction. Twenty-five years of progress* (s. 455-478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. Coping with multiple theoretical perspectives. I: F.K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 3-38). Charlotte, NC: Information Age Publishing & NCTM.
- Cobb, P., McClain, K. & Gravemeijer, K. (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and Instruction*, 21(1), s. 1-78.
- Cobb, P. & Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(2), s. 83-94.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), s. 113-163.
- Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1990). Classrooms as learning environments for teachers and researchers. I: R.B. Davis, C.A. Maher & N. Noddings (red.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 4* (s. 125-146). Reston, VA: NCTM.
- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31, s. 175-190.
- Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classrooms situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, s. 99-122.
- ICMI (2008a). The International Commission on Mathematical Instruction. The ICMI Felix Klein and Hans Freudenthal awards. Lokaliseret den 7. juli 2008 på [www.mathunion.org/ICMI/Awards/description.html](http://www.mathunion.org/ICMI/Awards/description.html).
- ICMI (2008b). The ICMI Hans Freudenthal medal for 2005. Lokaliseret den 7. juli 2008 på <http://www.mathunion.org/ICMI/Awards/2005/CobbCitation.html>.
- Schou, J.K., Hansen, H.C., Skott, J. & Jess, K. (2008). *Matematik for lærerstuderende. Omega. 4.-10. klasse*. Frederiksberg: Samfundslitteratur.



- Skott, J., Jess, K. & Hansen, H.C. (2008). *Matematik for lærerstuderende. Delta. Fagdidaktik*. Frederiksberg: Samfundslitteratur.
- Steffe, L. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.
- Steffe, L., von Glasersfeld, E., Richards, J. & Cobb, P. (1983). *Children's counting types. Philosophy, theory, and application*. New York: Praeger.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1992). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), s. 458-477.

### **Abstract**

Paul Cobb received the Freudenthal Prize for his research in mathematics education at ICMI-11 in 2008. The intention with this article is to introduce Cobb's work. The main emphasis is on the version of social constructivism that he and his colleagues developed in the 1990s. However, links are made to Cobb's earlier work inspired by radical constructivism and to his later focus on educational design. There are significant theoretical and methodological shifts in Cobb's research. However, his work is consistently oriented towards a dual interest in theorising teaching-learning processes and contributing to their further development. Combined with his theoretical pragmatism this indicates that his work may better be characterised by gradual, continuous development than by fundamental discontinuities.