

Linearitetsfælden

Anmeldelse:

De Bock, van Dooren, Janssens, Verschaffel: *The Illusion of Linearity – from Analysis to Improvement*. Mathematics Education Library, vol. 41, Springer, 2007.

Af Kjeld Bagger Laursen

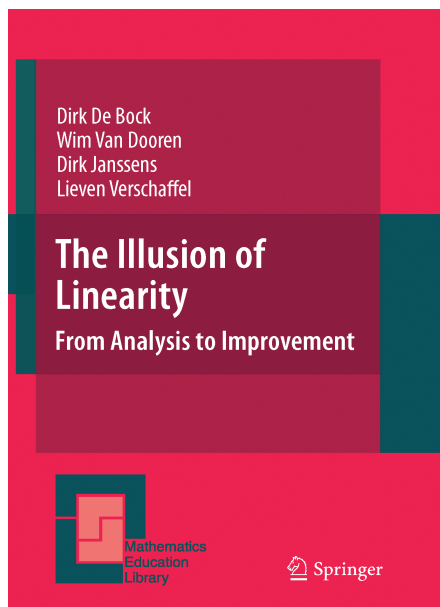
Hvis en nyvasket skjorte hænger ude på tøjsnoren i dag, tager det 4 timer for den at tørre.

Mor hænger tre skjorter til tørre derude. Hvor lang tid vil det tage dem?

En af mine bekendte påstår at han en dag ville overraske familien med hjemmebagte småkager. Men han gad ikke lave så mange som opskriften angav. Han besluttede sig for at bage halvt så mange, halverede alle opskriftens ingredienser – og i stedet for at lade dem bage i 15 minutter ved 200 grader gav han dem 100 grader i $7\frac{1}{2}$ minut!

Bogtitlens “illusion om linearitet” henryder til dette fænomen. I lidt mere nøgtern, geometrisk sammenhæng kan det illustreres således: Hvis siderne i et rektangel fordobles, så fordobles omkredsen – men arealet firdobles. Og hvis siderne i en terning fordobles, så ottedobles rumfanget.

Ofte overser elever at proportionalitet “oversættes” til ikke-linearitet. Denne overdrevne og fejlbehæftede hang til proportionalitet dukker også op i algebraiske eller funktionelle sammenhænge, selv blandt universitetsstuderende.



Tænk bare på formler som $\log(a+b) = \log a + \log b$, eller $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Denne interessante bog undersøger meget grundigt og nuanceret dette problemkompleks.

Bogen beskriver en række undersøgelser og projekter. Det første der skal afklares, er problemets omfang og karakter – og her er det to aldersgrupper der undersøges: 12-13-årige og 15-16-årige, ca. 160 i hver, alle sammen elever i flanderiske skoler. Typisk drejer de stillede opgaver sig om forstørrelser af et kvadrat, af en cirkel og af en irregulær figur.

Forekomsten af proportionalitetsmisbrug er meget høj blandt de 12-13-årige elever (de løser 92 % af proportionalitetsopgaverne rigtigt, men kun 2 % af opgaverne om ikke-proportionalitet). Men de ældre elevgrupper er ikke gevaldigt meget bedre selv om de har tre års skole-

gang mere som bagage: Kun 17 % af de 15-16-årige besvarer ikke-proportionalitets-opgaverne rigtigt. Disse undersøgelser isolerer også de mulige effekter af to “variable”, nemlig effekten af de geometriske figurers form samt effekten af tilstedeværelsen af enten selv-tegnede (af eleverne) eller foreliggende tegninger af

de involverede geometriske figurer. Måske ikke så overraskende er de regulære figurer (kvadraterne og cirklerne) noget nemmere for eleverne at håndtere end de irregulære, men på den anden side viser det sig at muligheden for at tegne en relevant figur ikke har nogen effekt på resultaterne.

Eksempler på opgaver

Landmand Gustav bruger ca. 4 dage på at grave en grøft omkring et kvadratisk stykke jord hvor hver side er 100 m. Hvor lang tid skal han bruge på at grave en grøft omkring en mark med sidelængden 300 m?

Landmand Carl skal bruge omkring 8 timer til at sprede gødning på en kvadratisk mark med sidelængde 200 m. Hvor lang tid skal han bruge på en mark med sidelængde 600 m?

Det tager ca. 6 timer at sejle rundt om en cirkelformet ø som har en diameter på 70 km. Hvor lang tid tager det at sejle rundt om en ø med en diameter på 140 km?

Du skal bruge ca. 400 g blomsterfrø for at så et cirkelformet bed med en diameter på 10 m. Hvor mange gram frø skal du bruge hvis bedet har diameteren 20 m?

På et kort i et atlas over Belgien er afstanden fra Genk til Leuven ca. 5 cm, og afstanden fra Genk til Ghent ca. 11 cm. På det store kort oppe ved tavlen er afstanden fra Genk til Leuven ca. 20 cm. Hvor stor er afstanden fra Genk til Ghent på det store kort?

På et kort i et atlas over Belgien er afstanden fra Genk til Tongeren ca. 2 cm, og arealet af Belgien er ca. 250 cm². På det store kort oppe ved tavlen er afstanden fra Genk til Tongeren ca. 6 cm. Hvor stort er arealet af Belgien på det store kort?

Disse ting er efterfølgende blevet undersøgt nærmere. I én undersøgelse brugte forfatterne en række “metakognitive og visuelle støtter”. En metakognitiv støtte er en måde at hæve opgaveløserens opmærksomhedsniveau på, her ved at introducere faldgruberne i proportionalitet/ikke-proportionalitet ved at fremsætte to argumenter der modsiger hinanden. Den visuelle støtte der blev brugt, var at opgavernes medfølgende tegninger var lavet på kvadreret papir. I en anden undersøgelse blev beskrivelsen af problemstillingen ændret fra brugen af en ukendt størrelse til direkte sammenligninger. En tredje undersøgelse opererede på et mere auten-

tisk niveau og indlejrede et krav til eleven om at lave en tegning, og også opgavesæt med specifikke talværdier i stedet for ubekendte størrelser blev brugt. Den generelle konklusion var nærmest at lige meget hjalp det! Eller rettere, at selv om disse forfinelser af opgaveformulering og omstændigheder hjalp på succesraten, så forblev tendensen blandt eleverne til at bruge lineære modeller meget udtalt.

Også forskningstilgangen blev varieret. I endnu en undersøgelse benyttede forfatterne interviews – for at afdække (nogle af) de tankeprocesser der lå bag elevernes løsningsstilgange og deres tendens til at gå i linearitetsfælden.

Ikke nok med det – adskillige undervisningsforløb blev designet og gennemført. Konklusionen var stadig at tendensen til overforbrug af linearisering var udtalt – og vanskelig at komme til livs. De bedste resultater blev opnået i forløb med meget konkret modellerende situationer (med reb, snore, målepinde osv.). Den slags situeret undervisning/læring var fremmende for elevernes greb om forskellen mellem lineære og ikke-lineære situationer. Men transferensen til andre og senere situationer med mere klassisk papir og blyant-arbejde med disse problemstillinger var ikke særlig god.

Forskerne – og læseren – sidder altså med en stærk fornemmelse af at her er tale om en mangel på matematisk indsigt som er ualmindelig udbredt og ualmindelig vanskelig at “helbrede”. Hvad kan det skyldes? Hvad er de psykologiske og undervisningsmæssige faktorer i linearitetsfælden? Som læser kunne man have håbet på at så grundige studier som denne bog præsenterer, ville sætte forfatterne i stand til at give svar som de selv synes er fyldestgørende. En sådan *happy ending* får vi dog ikke: Forskningens forsøg på at besvare spørgsmål fører jo ofte til dyberegående spørgsmål. Der opregnes da også her en række felter for mere forskning. Men selv om en samlet pakke af konklusioner fortsat er fremtidsmusik, får vi dog tre gode sæt bud på delforklaringer: En hovedingrediens i en forklaring må være at lineære modeller (eller vel bare “linearitet som sådan”) generelt har en intuitiv og heuristisk karakter som gør dem plausible og tilsyneladende bru-

gelige næsten overalt. Det påpeges også at den almindelige matematikundervisning må påtage sig en del af ansvaret: Linearitet og proportionalitet betones meget. Og så kan der også være noget i selve de konkrete opgavesituationer og opgavernes formulering som bringer lineære løsningsstilgange på sinde.

Så selv om forfatterne føler at deres undersøgelser ikke kan retfærdiggøre stort anlagte konklusioner, har de naturligt nok af så grundig og facetteret en diskussion af problemkomplekset kunnet destillere adskillige forslag til hvordan situationen kan forbedres. Nogle af disse er af standardtype og involverer forslag til revisioner i undervisningsmaterialet. De mest vidtgående – og derfor sandsynligvis de mest effektive, navnlig i lyset af dette righoldige erfaringsmateriale – plæderer for forøget brug af matematisk modellering og endda en forøgelse på bekostning af arbejde med udregningsmetoder og -rutine.

Bogen er interessant, og den er letlæst, skrevet på godt engelsk. Og trods denne omtales omfang har jeg ikke ydet den fuld retfærdighed. Det gælder navnlig dens metodologi som er beskrevet i forbindelse med hver enkelt undersøgelse. Det gælder også dens solide forankring i feltets forskning. Flandern har et meget stærkt fagdidaktisk forskningsmiljø – kig bare bogens referenceliste igennem!

Jeg er sikker på at mange undervisere vil læse denne bog med fornøjelse og interesse fordi den tager så godt fat på et emne som alle matematiklærere har oplevet.