Den matematikhistoriske dimension i undervisning – gymnasialt set

Uffe Thomas Jankvist, IMFUFA, Institut for Natur, Systemer og Modeller, Roskilde Universitetscenter

Abstract. *Nærværende artikel omhandler inddragelsen af matematikhistorie i gymnasiet (stx) med udgangspunkt i bekendtgørelsen af 2007. Det diskuteres (1) hvad formålet i bekendtgørelsen er med at involvere matematikhistorie, (2) hvilke tilgange der er til involvering af matematikhistorie i gymnasiet, samt (3) hvad underviserens rolle er i forhold til bekendtgørelsens krav om involvering af matematikhistorie. Første spørgsmål besvares gennem en analyse af den nye bekendtgørelse for matematik i gymnasiet samt en relatering af denne til KOM-rapporten. Andet spørgsmål omhandlende tilgangene belyses gennem en analyse af behandlingen af matematikhistorie i tre af de nye lærebogssystemer til gymnasiet. I besvarelsen af tredje spørgsmål diskuteres i forhold til den danske situation de i nogen grad lignende situationer i så forskellige lande som Norge og Hong Kong. Det konkluderes at bekendtgørelsens formål med at inddrage matematikhistorie kan beskrives som "matematikhistorie som mål", men at de tre analyserede lærebogssystemer oftest ikke lever op til dette hvorfor opfyldelsen heraf bliver op til de enkelte undervisere. Der diskuteres i artiklen mulige løsninger på dette problem.*

Introduktion

Den matematikhistoriske dimension i gymnasiet så første gang dagens lys i 1953. Det hedder således i § 12 af *Anordning og bekendtgørelse af 1953* om faget matematik:

> Det vil for forståelsen af kultursammenhængen være af betydning, om der af matematikkens historie medtages træk, der har almenmenneskelig interesse, samt at der gennemgås illustrerede eksempler fra epoker inden for den matematiske tænknings historie, tjenende til at vise, hvorledes fundamentale problemer er opstået og løst. (Undervisningsministeriet, 1953, § 12)

Otte år senere, i bekendtgørelsen af 1961, er bemærkningen om at medtage elementer af matematikkens historie imidlertid forsvundet.[1] Heller ikke i bekendtgørelserne af 1971 og 1984 optræder bemærkninger herom.[2] I 1987 genindføres den historiske dimension, denne gang som ét af tre aspekter[3] som matematikundervisningen skal tilstræbe at belyse. Det hedder således:

> Eleverne skal opnå kendskab til elementer af matematikkens historie og matematik i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng. (Undervisningsministeriet, 1987, § 20)

I læreplanen for den gældende bekendtgørelse af 2007 hedder det under punkt 2.3 om "supplerende stof":[4]

> For at eleverne kan leve op til de faglige mål, skal det supplerende stof, der udfylder ca. 1/3 af undervisningen, bl.a. omfatte [...] matematik-historiske forløb. (Undervisningsministeriet, 2007, bilag 35, punkt 2.3)

Det "faglige mål" som matematikhistoriske forløb retter sig mod, lyder:

> Eleverne skal kunne [...] demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling. (Undervisningsministeriet, 2007, bilag 35, punkt 2.1)

Sammenlagt er der altså tale om at den matematikhistoriske dimension snart har været en del af de gymnasiale bekendtgørelser i hen ved tre årtier (fra 1953-1961 og fra 1987 og frem).

Et nærliggende spørgsmål er imidlertid hvordan denne matematikhistoriske dimension af den gymnasiale matematikundervisning har udmøntet sig i praksis igennem disse små tredive år – eller om den overhovedet har det. En formodning man kunne have, er at de matematikhistoriske elementer ofte er blevet nedtonet fordi der ikke har været eksplicitte evalueringskrav hertil. Endvidere kan man spørge til de tilfælde hvor der har fundet en inddragelse af matematikhistorie sted. Har der her været tale om at matematikhistorien er blevet introduceret således at den har været forankret i den for eleverne bekendte matematik, eller har der i højere grad været tale om en

1 (Undervisningsministeriet, 1961, § 19, § 16)
2 (Undervisningsministeriet, 1971, § 18), (Undervisningsministeriet, 1984, § 20)
3 De to andre aspekter er henholdsvis *modelaspektet* og *matematikkens indre strukturer*. Oprindelsen af disse aspekter kan spores tilbage til slutningen af 1970'erne, se eksempelvis (Niss, 1980).
4 I det følgende citeres læreplanen for Matematik A. Formuleringerne i læreplanerne for Matematik B og Matematik C varierer dog ikke stort for de i denne artikel udvalgte citater.

mere løsrevet introduktion i form af anekdoter og "julefortællinger"? Undersøgelser[5] antyder at undervisere ofte vægrer sig ved at inddrage matematikhistorie i undervisningen. Dette skyldes eksempelvis at underviserne ikke føler sig rustede dertil, og matematikhistorien figurerer måske netop derfor ofte som en form for krydderi til den allerede eksisterende undervisning uden at dette "krydderi" nødvendigvis er matematisk forankret i undervisningen. Dertil kommer at det i bekendtgørelserne ikke er ubetinget klart hvorledes den matematikhistoriske dimension skal udmønte sig i praksis. I bekendtgørelsen af 1987 hedder det eksempelvis:

> Behandlingen af de tre aspekter sker i forbindelse med behandlingen af de fem hovedemner og gennem særlige undervisningsforløb tilrettelagt med henblik på et eller flere af aspekterne. (Undervisningsministeriet, 1987, § 20)[6]

Sådanne "særlige undervisningsforløb" kan jo være mange forskellige ting alt afhængig af den enkelte underviser, og historiens forankring i matematikken gives der selvsagt heller ingen garanti for.[7] Dertil kommer det faktum at planlægning og tilrettelæggelse af sådanne forløb kræver (ekstra) tid af underviserne.

I en artikel i forrige nummer af MONA diskuterede jeg spørgsmålet om den matematikhistoriske dimension i undervisningen *generelt set* (Jankvist, 2007a). Mere præcist blev der i artiklen opstillet to sæt af kategorier: et bestående af to forskellige formål med at involvere matematikhistorie kaldet henholdsvis *matematikhistorie som værktøj* og *matematikhistorie som mål* og et andet bestående af tre forskellige tilgange til involvering kaldet *illustrationstilgange*, *modultilgange* og *historiebaserede tilgange*, hvor mængden af historie inden for hver kunne skaleres. Disse to sæt af kategorier og den samtidigt præsenterede dimension af *i-*, *om-* og *med-matematik* udgør tilsammen et analyseredskab som jeg i denne artikel vil anvende til at diskutere den matematikhistoriske dimension i undervisningen *gymnasialt set*.[8] Helt præcist skal omdrejningspunktet for denne artikel være følgende tre spørgsmål:

- Hvilket (af de to) formål tjener involveringen af de matematikhistoriske elementer ifølge den nye bekendtgørelse i gymnasiet?
- Hvordan hænger de tre tilgange til at involvere historie i matematikundervisningen sammen med praksis i gymnasiet, specielt de anvendte lærebogssystemer?

5 Se eksempelvis (Smestad, 2002), (Tang, 2004) og ikke mindst (Siu, 2004). Sidstnævnte opremser seksten argumenter *imod* inddragelsen af matematikhistorie i matematikundervisningen – argumenter fremsat af matematikundervisere selv.
6 De fem hovedemner er her: tal, geometri, funktioner, differentialregning samt statistik og sandsynlighedsregning.
7 For et par eksempler på sådanne særligt tilrettelagte undervisningsforløb i forbindelse med den ny bekendtgørelse se Jankvist (2008a) og Jankvist (2008b).
8 For yderligere et eksempel på hvordan dele af dette analyseredskab kan benyttes se Jankvist (2007b).

- Og hvad er den enkelte undervisers rolle i forhold til involveringen af matematikhistorie?

I det følgende afsnit vil jeg diskutere KOM-rapportens syn på matematikhistorie i matematikundervisningen idet den nye bekendtgørelses retorik i nogen grad synes hentet fra denne. Dette tjener til en besvarelse af første spørgsmål. Andet spørgsmål søges besvaret i de følgende tre afsnit gennem en analyse af tre nye lærebogssystemer til gymnasiet. Det skal bemærkes at denne analyse kan forekomme ganske omfattende og detaljeret, men da den udgør selve grundlaget for besvarelsen af andet spørgsmål, kan den ikke udelades. Læseren kan eventuelt springe delene med gennemgange over og fokusere på diskussionerne i disse tre afsnit. Til sidst diskuteres med henblik på tredje spørgsmål den enkelte undervisers rolle. Der drages i denne diskussion paralleller til den lignende situation, angående ministerielle krav om inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen, i så forskellige lande som Norge og Hong Kong. Bemærk at muligheden for at inddrage matematikhistorie i den almene studieforberedelse (AT-forløbene) ikke vil blive berørt i denne artikel.

KOM-rapportens syn på matematikhistorie i undervisning

Med hensyn til hvilket formål involveringen af matematikhistorie i den gymnasiale undervisning tjener ifølge den nye bekendtgørelse, så er det mest nærliggende vel nok at se under "formål" i bekendtgørelsen. Det hedder her:

> Gennem undervisningen skal eleverne opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Endvidere skal de opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement. Herved skal eleverne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår. (Undervisningsministeriet, 2007, bilag 35, punkt 1.2)

Med udgangspunkt i den første sætning i dette citat lader det altså til at formålet med inddragelsen af de matematikhistoriske elementer er "matematikhistorie som mål" frem for "matematikhistorie som værktøj". Den nye bekendtgørelse for matematik og retorikken deri synes i nogen grad at bygge på KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002). For at danne sig en dybere forståelse af hvilke formål involveringen af matematikhistorie i gymnasiet tjener, vil det derfor være relevant at se på hvad denne siger om matematikhistoriens plads i matematikundervisningen.

I KOM-rapporten figurerer de matematikhistoriske elementer som én af tre former for "overblik og dømmekraft", nærmere bestemt den af disse der hedder "matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning".[9] Herom skriver Niss og Jensen:

> Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er det forhold, at matematikken har udviklet sig i tid og rum, i kultur og samfund. [...]
>
> Den form for overblik og dømmekraft, der her er tale om, må ikke forveksles med kendskab til "matematikkens historie" anskuet som et selvstændigt emne. Fokus er på selve det forhold, at matematikken har udviklet sig, i kulturelle og samfundsmæssigt betingede miljøer, og på de drivkræfter og mekanismer som er ansvarlige for denne udvikling. På den anden side er det oplagt, at hvis overblik og dømmekraft vedrørende denne udvikling skal have soliditet, må de hvile på konkrete matematikhistoriske eksempler. (Niss & Jensen, 2002, s. 68)

Og specifikt med hensyn til matematikundervisningen i gymnasiet fremgår det, mere eller mindre eksplicit, at matematikkens historiske udvikling bør belyses såvel internalistisk som eksternalistisk (Niss & Jensen, 2002, s. 268). Det hedder:

> I den almentgymnasiale matematikundervisning skal eleverne erhverve et kendskab til den historiske udvikling inden for udvalgte dele af matematik, der i øvrigt arbejdes med på det pågældende niveau. De centrale drivkræfter i den historiske udvikling skal diskuteres, herunder påvirkningen fra forskellige anvendelsesområder.
>
> Eleverne skal herigennem udvikle en viden om og en forståelse af, at matematikken er menneskeskabt og rent faktisk har gennemgået en historisk udvikling – og ikke blot er noget, der altid har været der eller pludselig er opstået ud af den blå luft. (Niss & Jensen, 2002, s. 268)

Retorikken bag inddragelsen af matematikhistorie i gymnasiet kan føres tilbage i lige linje fra 2007-bekendtgørelsen over KOM-rapporten til det "historiske aspekt" i 1987-bekendtgørelsen og derfra tilbage til en artikel af Mogens Niss i Normat i 1980 indeholdende nogle visioner for matematikundervisningen i datidens gymnasium[10] (Niss, 1980). I samtlige fire tilfælde er der tale om at matematikhistorien i undervisningen i langt højere grad tjener som et selvstændigt mål frem for et eksplicit værktøj til at højne indlæringen af matematik. Dermed dog ikke sagt at i-matematikken ikke spiller en rolle i forbindelse med KOM-rapportens udlægning af matematikhistoriens rolle i matematikundervisningen. Tværtimod, vil jeg snarere sige. Selvfølgelig har

9 De to andre former for overblik og dømmekraft er henholdsvis "matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder" og "matematikkens karakter som fagområde".

10 Mere præcist præsenteres der i artiklen "fire genstande" for matematikundervisningen hvoraf de tre senere blev til de "tre aspekter" i 1987-bekendtgørelsen.

i-matematikken en mere fremtrædende rolle i KOM-rapporten i forbindelse med selve kompetencerne, og om-matematikken spiller sin hovedrolle i forbindelse med de tre former for overblik og dømmekraft. Imidlertid er det meningen at hver af disse tre former for "aktive indsigter vedrørende matematikkens karakter og rolle i verden" skal udmønte sig "på baggrund af viden" (Niss & Jensen, 2002). Med andre ord er der altså tale om at overblik og dømmekraft skal være forankret i de matematiske kompetencer – at om-matematikken skal være forankret i i-matematikken. For matematikhistoriens vedkommende i forbindelse med undervisningen kommer dette eksempelvis til udtryk i det tidligere præsenterede citat fra KOM-rapporten hvor det hedder at overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens udvikling og historie for at have soliditet må hvile på konkrete matematikhistoriske eksempler, altså på konkret i-matematik. Interessant er det at med-matematik i KOM-rapporten både spiller rollen som kompetence, i form af "modelleringskompetencen", og rollen som overblik og dømmekraft, i form af "matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder", omend der selvfølgelig er tale om med-matematik på to forskellige planer. I modelleringskompetencen er der tale om at kunne analysere og "udføre aktiv modelbygning", herunder foretage "matematisering" af foreliggende problemstillinger, såvel som at kunne "afmatematisere" og "validere" allerede eksisterende modeller og så videre (Niss & Jensen, 2002, s. 52-53). I formen for overblik og dømmekraft omhandlende matematikkens faktiske anvendelse er der derimod tale om en mere bred og sammenfattende form for indsigt "af en nærmest sociologisk og videnskabsteoretisk art" (Niss & Jensen, 2002, s. 67). Niss og Jensen påpeger selv at "det er oplagt at en veludviklet modelleringskompetence bidrager til en konkret forankring og konsolidering af overblik og dømmekraft", men at det selvfølgelig ikke er en automatisk følge heraf (Niss & Jensen, 2002, s. 67). I formen for overblik og dømmekraft omhandlende matematikkens historiske udvikling spiller med-matematikken en ikke mindre vigtig rolle, specielt i forbindelse med den eksternalistiske belysning af matematikkens udvikling, også kaldet de "ydre drivkræfter", for eksempel i form af de aktører der har været involveret i udviklingen, de samfundsinstitutioner hvori den har fundet sted, og ikke mindst gennem matematikkens samspil med andre felter (Niss & Jensen, 2002, s. 68-69)

Pointen er altså at KOM-rapportens syn på matematikhistorie i undervisningen bygger på såvel om- som i- og med-matematiske elementer.[11] Og selv om om-matematikken i involveringen af matematikhistorie måske nok er den dominerende, så er der stadig tale om en form for "treenighed" idet om-matematikken skal være forankret i i-matematikken, og belysningen af de ydre drivkræfter ikke kan finde sted uden at inddrage med-matematikken. Det er min *antagelse* at dette syn i nogen grad

11 Begreberne i-, om- og med-matematik figurerer da også i KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002, s. 45-46).

går igen i 2007-bekendtgørelsen. Eksempelvis hedder det i afsnittet omhandlende "identitet":

> Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori. (Undervisningsministeriet, 2007, bilag 35, punkt 1.1)

Altså omtales her først matematikkens kulturhistoriske udvikling (om-matematikken), og i sætningen umiddelbart efter kædes udviklingen af videnskabsfaget matematik sammen med anvendelser (med-matematik) og opbygning af teori (i-matematik).

Bekendtgørelsen og KOM-rapporten har altså samme formål, nemlig "matematikhistorie som mål", med at inddrage matematikkens historie i den gymnasiale undervisning. Imidlertid er kravet om en forankring af om-matematikken i i-matematikken ikke eksplicit udtrykt i bekendtgørelsen på samme måde som det er i KOM-rapporten. Og af denne årsag kan der i princippet argumenteres for at bekendtgørelsens, men ikke KOM-rapportens, krav til inddragelsen af matematikkens historie kan opfyldes gennem "anekdote- og julefortælling".

For at skabe sig et indblik i hvordan bekendtgørelsens og/eller KOM-rapportens formål og krav honoreres i den gymnasiale undervisning, kan man analysere nogle af de nyligt udkomne lærebogssystemer. Med udgangspunkt i det af Jankvist (2007a) foreslåede analyseredskab (formål, tilgange og i-, om-, og med-matematik) vil jeg i det følgende udsætte de nye systemer fra Systime, Gyldendal og Frydenlund for en grundig analyse. Systemerne fra netop disse forlag er valgt ud fra en formodning om at de er blandt nogle af de mere udbredte i gymnasiet.

MAT fra Systime

Forfatterne bag det nye system, *MAT*, fra Systime er Jens Carstensen, Jesper Frandsen og Jens Studsgaard. Følgende gennemgang baserer sig på bøgerne *MAT* C, B1, B2, A1, A2 og A3.[12] Historien i *MAT*-bøgerne figurerer stort set på tre forskellige måder: 1) i særskilte afsnit under overskriften "historiske bemærkninger", som typisk forekommer i slutningen af et kapitel, 2) på specielt farvet papir i såkaldte "perspektiverende rammer" sammen med andre former for supplerende (perspektiverende) bemærkninger og 3) i selve teksten, enten i form af navns nævnelse af ophavsmændende bag de præsenterede matematiske resultater, eventuelt suppleret med årstal, eller, omend sjældnere, i introduktionen til et kapitel.

12 Se (Carstensen et al., 2005c), (Carstensen et al., 2005b), (Carstensen et al., 2006b), (Carstensen et al., 2005a), (Carstensen et al., 2006a) og (Carstensen et al., 2007).

Gennemgang af historiske elementer i Systimes system

I bogen til C-niveau findes tre afsnit med overskriften "historiske bemærkninger": et om tidligere notationer inden for algebra, mere præcist af Viète, Harriot, Hérigone og Descartes, et om trigonometriens historie, hvori matematikere som Thales, Erathostenes, Ptolemæus, Bartholomaeus Pitiscus og Euler omtales, og et om statistik, hvori blandt andre de Moivre og Laplace omtales.[13] Derudover indeholder bogen en række andre spredte bemærkninger; eksempelvis findes der en kort historisk indledning til kapitlet om tal, en mindre omtale af romertal, lidt om Euler-tal og Euler, et par historiske fakta om Pythagoras, og Fibonacci nævnes i forbindelse med Fibonacci-tal.[14] Mere interessant er kapitel C.2 idet dette kapitel omhandler Pythagoras' sætning som den forefindes i Euklids *Elementer*, og en række forskellige beviser for sætningen, blandt andet Leonardo da Vincis, som der også findes et portræt af. Tilmed præsenteres et digt som H.C. Andersen har skrevet, der indeholder Euklids bevis for Pythagoras' sætning.[15]

De "historiske bemærkninger" i den første bog til B-niveau, B1, indeholder C-bogens afsnit om tidligere notationer inden for algebra, men i en udvidet udgave, samme afsnit om trigonometriens historie, et ultrakort afsnit om funktioner hvori funktionsbegreberne af henholdsvis Leibniz, Euler og Dirichlet gives, og et afsnit om Napier og fremkomsten af logaritmefunktionerne.[16] Af "perspektiverende rammer" byder B1-bogen på en mindre omtale af primtal, herunder en henvisning til Euklid for beviset for primtallenes uendelighed samt henvisninger til Goldbach og Euler i forbindelses med Goldbachs formodning; talsystemer med andre grundtal, herunder babyloniernes; den lille historiske omtale af romertal fra C-bogen; en biografi af Pierre de Fermat, en omtale af hans henholdsvis lille og store sætning samt et avisudklip om Wiles' bevis for sidstnævnte; en biografi af Leonhard Euler; en matematisk anekdote om G.H. Hardys besøg ved Ramanujans sygeleje og Hardy-Ramanujan-tal; en biografi af Carl Friedrich Gauss; en biografi af René Descartes.[17] Derudover findes ligesom i C-bogen en mindre historisk indledning til kapitlet om talbegrebet og ligeledes til kapitlerne om rødder og potenser, trigonometri og logaritmefunktioner.[18] Kapitlet om Pythagoras' sætning fra C-bogen findes ligeledes i B1-bogen. B2-bogen er noget mere sparsom med de "historiske bemærkninger" – der er kun tre af slagsen: en om statistik hvori blandt andre de Moivre og Laplace omtales, en om udviklingen af differential- og integralregningen og den følgende kontrovers mellem tilhængere af henholdsvis Newton og

13 (Carstensen et al., 2005c, s. 41, 144-145, 180-181)
14 (Carstensen et al., 2005c, s. 8, 25, 112, 132, 239)
15 (Carstensen et al., 2005c, s. 206-226)
16 (Carstensen et al., 2005b, s. 64-66, 131-133, 161, 256-257)
17 (Carstensen et al., 2005b, s. 14-15, 46, 52, 92-95, 118, 180, 222-223, 280)
18 (Carstensen et al., 2005b, s. 8, 40, 80, 108, 234)

Leibniz og en om sandsynlighedsregningens historiske udvikling.[19] Der findes ingen "perspektiverende rammer" omhandlende matematikkens historie. Indledningerne til kapitlerne i B2-bogen gør heller ikke brug af matematikhistorie.

De to første bøger til A-niveau, A1 og A2, indeholder, i omrokeret rækkefølge, de samme "historiske bemærkninger" som vi allerede kender fra bøgerne C, B1 og B2. A1-bogen indeholder således de samme "historiske bemærkninger" som B1-bogen[20], de samme "perspektiverende rammer"[21] og i høj grad de samme historiske bemærkninger som indledninger til kapitlerne.[22] De yderligere kapitler der findes til A-niveau i A1-bogen, gør ikke brug af matematikhistorie. A2-bogen indeholder de samme "historiske bemærkninger" som B2-bogen samt den om Napier og udviklingen af logaritmefunktioner fra B1-bogen.[23] Ligesom B2-bogen har A2-bogen ingen "perspektiverende rammer" om matematikkens historie, og brugen af matematikhistorie i indledningerne til kapitlerne forekommer kun i kapitlet om logaritmefunktioner.[24] Til gengæld findes der en lille omtale af Archimedes i forbindelse med et kapitel om irrationale tal og p.[25] I A3-bogen synes matematikkens historie langt mere nedtonet end i nogle af de foregående bøger; eksempelvis figurerer de få (to) "historiske bemærkninger" som bogen indeholder, ikke længere i bogens indholdsfortegnelse. Begge "historiske bemærkninger" findes i kapitel A.2 om parameterkurver. Den første bemærkning omhandler cykloiden og især Christiaan Huygens arbejde i forbindelse hermed. Derforuden nævnes også Jacob og Johann Bernoulli. Den anden historiske bemærkning omhandler Maria Gaetana Agnesi og hendes arbejde om differentialregning i forbindelse med analytisk geometri, specielt den klokkeformede kurve "Agnesis heks".[26] I denne forbindelse findes også et portræt af Agnesi.[27] I indledningen til kapitel A.1 om "infinitesimale modeller" står der: "Opfindelsen af differential- og integralregningen i sidste halvdel af 1600-tallet af *Newton* (England) og *Leibniz* (Tyskland) er et kulturgode, der næppe kan overvurderes, idet de muliggør en mangfoldighed af anvendelser inden for teknik og videnskab" (Carstensen et al., 2007, s. 154). Der gives efterfølgende i kapitlet eksempler på sådanne anvendelser, for eksempel "Newtons afkølingslov", men en uddybning af bemærkningen om infinitesimalregningen som et "kulturgode" gives der ikke. I kapitel A.4 nævnes "Keplers love" uden yderligere uddybning af hvem Kepler var, og fra hvornår hans love stammer.[28]

19 (Carstensen et al., 2006b, s. 45-46, 93-94, 226-228)
20 (Carstensen et al., 2005a, s. 74-76, 147-149, 280)
21 (Carstensen et al., 2005a, s. 14-15, 54, 60, 106-109, 134, 300, 344-345)
22 (Carstensen et al., 2005a, s. 8, 48, 94, 124)
23 (Carstensen et al., 2006a, s. 36-37, 77-78, 133-134, 250-252)
24 (Carstensen et al., 2006a, s. 14)
25 (Carstensen et al., 2006a, s. 309)
26 (Carstensen et al., 2007, s. 197-198, 203)
27 (Carstensen et al., 2007, s. 201)
28 (Carstensen et al., 2007, s. 240)

Diskussion af Systimes involvering af matematikhistorie

Jævnfør de tre forskellige tilgange til involvering af matematikhistorie (Jankvist, 2007a, s. 76-80) er der altså i langt overvejende grad tale om illustrationstilgange der med udgangspunkt i den behandlede matematik giver en ultrakort præsentation til visse historiske om-matematiske aspekter forbundet hermed samtidig med at der vises portrætter og præsenteres citater. En egentlig dyb forankring af den behandlede om-matematik i i-matematikken forekommer heller ikke tit. Med hensyn til de med-matematiske aspekter bringes disse igennem hele lærebogssystemet kun sjældent i forbindelse med den historiske om-matematik.

I og med at de "historiske bemærkninger" som regel figurerer i slutningen af et kapitel, kunne man nemt komme til at sammenligne disse med de såkaldte "historiske epiloger" som befinder sig i den højere ende af skalaen inden for illustrationstilgangene.[29] Imidlertid er der efter min mening ingen basis for en sådan sammenligning. De historiske bemærkninger i lærebogssystemet fra Systime er for sparsomme og overfladiske til at der kan være tale om egentlige "historiske epiloger" – et forhold som tilstedeværelsen af de ofte dominerende portrætter i de "historiske bemærkninger" heller ikke hjælper på. "Historiske epiloger" som de for eksempel findes hos Lindstrøm (1995) (se (Jankvist, 2007a, s. 77)), optræder i øvrigt også efter *hvert* kapitel hvorimod Systimes "historiske bemærkninger" kun forekommer tre-fire gange i løbet af hver bog. Forfatterne bag Systimes lærebogssystem synes således ikke at have haft en videre ambitiøs tilgang til inddragelsen af matematikkens historie i systemet. Spørgsmålet er dog i hvilken grad de "historiske bemærkninger" og de "perspektiverende rammer" omhandlende matematikhistorie opfylder bekendtgørelsens formål om "matematikhistorie som et mål", og i hvilken grad om-matematikken er forankret i i-matematikken. Strengt taget kan der måske nok argumenteres for at formålet opfyldes da dette jo ikke forudsætter en eksplicit forankring. Der er i højere grad tale om at de "historiske bemærkninger" og "rammer" kan gøre det ud for et krydderi i matematikundervisningen eller måske snarere en form for dessert til udvalgte kapitler – en dessert som kan vælges til eller fra alt afhængig af hvor (lækker)sulten den pågældende elev måtte være. Således bliver den motiverende faktor i form af "matematikhistorie som et værktøj" som disse afsnit i øvrigt kunne have, også tvivlsom. For spørgsmålet er nemlig i hvilket omfang disse ofte lidt påklistrede bemærkninger og rammer omhandlende historien overhovedet vil blive læst af eleverne eller, for den sags skyld, kommenteret af underviserne i undervisningen.

29 For eksemplificering af "historiske epiloger" i den højere ende af skalaen for illustrationstilgangene se (Jankvist, 2007a, s. 77).

Et mere omfattende tiltag end de "historiske bemærkninger" og "perspektiverende rammer" er kapitel C.2 i C-bogen (det samme som kapitel B.2 i B1-bogen). Dette kapitel med tilhørende opgaver (og de metafaglige refleksioner omhandlende matematikkens historie som man kunne forestille sig gjort i forbindelse hermed) kunne godt gøre det ud for et lille historisk modul da der jo her tages udgangspunkt i den pensumbundne matematik. Imidlertid er kapitel C.2/B.2 det eneste af slagsen i Systimes lærebogssystem. Og er man elev på A-niveau, udsættes man derfor ikke for en sådan tilgang til matematikhistorien.

Gyldendals gymnasiematematik

Gyldendals gymnasiematematik er udarbejdet af Flemming Clausen, Gert Schomacker og Jesper Tolnø. Følgende gennemgang baserer sig på bøgerne C, B1, B2 og A.[30] Gyldendals lærebogssystem indeholder ikke på samme måde som Systimes særskilte afsnit med historiske bemærkninger. I stedet synes historien en gang imellem forsøgt integreret i den almindelige gennemgang af stoffet eller i forbindelse med andre aspekter af faget matematik såsom anvendelses- eller "modelaspektet" eller "matematikkens indre strukturer" (se fodnote 3 i introduktionen).

Gennemgang af historiske elementer i Gyldendals system

Et eksempel på en sådan integration er kapitel 5 i C-bogen (og i B1-bogen) hvor "matematikkens deduktive væsen" illustreres ved at se på Euklids *Elementer* og resultaterne heri der fører til Pythagoras' sætning[31] (også her får vi H.C. Andersens digt om denne). Matematikkens indre strukturer bringes derefter på banen gennem en diskussion af de forskellige bevistyper i matematik. Kapitlet slutter med et afsnit om "modeksemplet" hvori man møder såvel Fermat som Euler, førstnævntes store sætning samt Wiles' arbejde med og bevis for denne. Et andet eksempel er gæstebidraget fra matematikhistoriker Tinne Hoff Kjeldsen om "landmåling og korttegning".[32] Her beskrives historien om en konkret anvendelse af noget af den trigonometri som eleverne har lært, nemlig historien om den første systematiske landopmåling og korttegning af Danmark som blev igangsat i 1761. Til Kjeldsens bidrag er knyttet et oplæg til projekt- og emneforløb med tilhørende forslag til problemformulering og diverse opgaver.[33] Kun sjældent gøres der i C-bogen, og i øvrigt i lærebogssystemet generelt, brug af portrætter og biografier; en undtagelse er dog portrættet af Galileo Galilei.[34] De føromtalte oplæg til projekt- og emneforløb byder med titler som "Fibonaccital, det gyldne snit, naturen,

30 Se (Clausen et al., 2005b), (Clausen et al., 2005a), (Clausen et al., 2006) og (Clausen et al., 2007).
31 (Clausen et al., 2005b, s. 123-147), (Clausen et al., 2005a, s. 153-183)
32 (Clausen et al., 2005b, s. 25-31), (Clausen et al., 2005a, s. 40-46)
33 (Clausen et al., 2005b, s. 168-169), (Clausen et al., 2005a, s. 210-212)
34 (Clausen et al., 2005b, s. 33)

arkitekturen og kunsten", "Den græske bystat og pythagoræernes verdensbillede" og "Argumentation" i høj grad også på muligheden for at inddrage elementer af matematikkens historie (såvel som dens filosofi og videnskabsteori).[35]

På B-niveau anvendes bøgerne B1 og B2. Inddragelsen af matematikhistorie i B1-bogen er, som ovenfor antydet, identisk med den i C-bogen (nogle af afsnittene er dog lidt længere end i C-bogen, men dette skyldes en udvidelse af matematikken). I B2-bogen er matematikhistorien derimod næsten ikke til stede. Der findes kun portrætter af Archimedes, d'Alembert og Laplace med et par tilknyttede småkommentarer i teksten.[36] I det i øvrigt ellers noget flyvske og ikke særligt fokuserede engelske gæstebidrag af John D. Donaldson om "Science, Mathematics and Mathematical Models" er der en smule historie, et citat af Galileo samt en ultrakort omtale af Newton og Einstein, og det tilhørende projekt- og emneoplæg lægger ikke op til en behandling af matematikhistoriske elementer.[37] Af uforklarlige årsager er matematikhistorien i B2-bogen henlagt til et niende kapitel som kun findes på bogens hjemmeside[38], og som kun kan tilgås af underviserne (tilgangen kræver et password). Titlen på dette kapitel 9 er "Historisk matematik: Den matematiske begejstring". Kapitlet er en 13 sider lang beskrivelse af differential- og integralregningens udvikling og anvendelse startende med Keplers overtagelse af Tycho Brahes astronomiske optegnelser, Newtons fødsel, hans to produktive år fra 1665 til 1667, hans inspirationskilder, Leibniz' udvikling af differential- og integralregningen, Bernoulli-brødrenes videreudvikling heraf og så videre op igennem oplysningstiden og frem til romantikken. Kapitlet er suppleret med opgaver hvor det forventes at man henter informationer andetstedsfra.

A-bogen indeholder i forhold til de tidligere bøger så godt som intet matematikhistorie. Ikke engang portrætter, biografier eller faksimiler er med i bogen. Et par gange nævnes matematikere i forbindelse med love eller sætninger opkaldt efter dem, eksempelvis Newtons love, specielt afkølingsloven, Pythagoras' sætning og Fibonaccital.[39] Bogens oplæg til projekt- og emneforløb giver dog mulighed for at diskutere aspekter af matematikkens historie, omend dette skal gøres med udgangspunkt i supplerende litteratur. Bogen indeholder et oplæg om Edwin A. Abbots bog "Flatland", et oplæg om "Kommunikation og sikkerhed" og et oplæg ved navn "Renæssancen: Perspektivet".[40] Specielt oplægget om kommunikation og sikkerhed synes interessant idet det omhandler kryptering – et emne som i vid udstrækning besidder muligheden for at diskutere såvel i- som om- og med-matematik.

35 (Clausen et al., 2005b, s. 170-173, 174, 176), (Clausen et al., 2005a, s. 213-217, 218, 220)
36 (Clausen et al., 2006, s. 73, 150)
37 (Clausen et al., 2006, s. 81-89, 230-241)
38 www.gg.gyldendal.dk (10. juli 2007)
39 (Clausen et al., 2007, s. 65, 68, 215, 137, 221)
40 (Clausen et al., 2007, s. 223-227)

Diskussion af Gyldendals involvering af matematikhistorie

Såvel kapitel 5 i C- og B1-bogen (med tilhørende opgaver og diverse refleksioner gjort i forbindelse hermed) som Kjeldsens afsnit med tilhørende oplæg til projekt- og emneforløb kan gøre det ud for små historiske moduler i matematikundervisningen. Dette er selvfølgelig forudsat at de tænkes på og behandles som sådanne og ikke blot som frivillig læsning til adspredelse for eleverne – et forhold der specielt gør sig gældende for Kjeldsens bidrag, idet dette har form af at være et ekstra indlæg i kapitlet om trigonometri. Kjeldsens bidrag opfylder tilmed KOM-rapportens krav om en forankring i i-matematikken idet problemstillingerne omhandlende såvel om- som med-matematikken i Kjeldsens eksempel med landmåling og korttegning er solidt forankret i den i kapitlet behandlede matematik. Noget lignende synes ikke at være tilfældet med det "skjulte" web-kapitel, kapitel 9, til B2-bogen. I dette kapitel behandles udelukkende om-matematiske, og i nogen grad med-matematiske, aspekter af Newtons og Leibniz' indførelse af infinitesimalregningen. Selvfølgelig er den tilhørende i-matematik behandlet i kapitel 1 og 2 i bogen, men fremstillingen i kapitel 9 forekommer alligevel i høj grad løsrevet fra denne. Det eneste stykke i-matematik i kapitel 9 findes i forbindelse med beretningen om striden mellem tilhængerne af Newton henholdsvis Leibniz hvor der på side 5 står: "Leibniz lagde stor vægt på at bruge hensigtsmæssige betegnelser og skrivemåder – fra ham stammer således betegnelsen $\delta y/\delta x$, der stadig er i brug. Newton interesserede sig kun for resultaterne og brugte besværlige og uigennemskuelige symboler og betegnelser." Det havde været oplagt med et par eksempler på sidstnævnte, men sådanne gives ikke. Ligeledes på side 5 citeres den hollandske matematikhistoriker Henk Bos for at sige at Newtons og Leibniz' "opfindelser var meget forskellige i form og synsmåde", men heller ikke dette eksemplificeres. Newtons fascination af infinitesimalregningens anvendelsesmuligheder omtales også, specielt med hensyn til astronomien, men heller ikke denne mulighed for at bringe med-matematikken i spil med konkrete i-matematiske eksempler udnyttes. Dertil kommer at der ud af de til kapitlet hørende sytten opgaver højst er et par der kræver i-matematiske forudsætninger af eleverne (opgave 9007 og 9017). En forankring af om-matematikken i den i bogen behandlede i-matematik, i termer af KOM-rapportens krav, er der altså ikke tale om i B2-bogen. Bekendtgørelsens formål med at inddrage matematikkens historie kan der derimod godt argumenteres for en opfyldelse af, idet kapitel 9 jo er en idehistorisk redegørelse. Blot knytter redegørelsen sig ikke til matematikken, forstået på den måde at en læsning af kapitlet ikke forudsætter nogen matematiske kundskaber og færdigheder. Der kræves således et større arbejde af den enkelte underviser for at kapitel 9 skal kunne gøre det ud for et historisk modul. Der er som det foreligger nu, i højere grad tale om en illustrationstilgang i form af en meget stor bøtte krydderi. Selvfølgelig afhænger en sådan klassificering også af i hvilket omfang de tilhørende opgaver til kapitlet, og eventuelt underviserens egne, inddrages. Det faktum at kapitlet er henlagt til nettet, ydermere med begrænset tilgængelighed, og dermed ikke er en del af den fysiske bog som eleverne har i hånden, synes også at have nogle konsekvenser. Eksempelvis afskærer man jo helt oplagt eleverne fra selv at gå på opdagelse i kapitlet og lade sig fange ind af det utal af portrætter, faksimiler og andre billeder som det indeholder – ting der måske tilmed kunne tjene som en motiverende faktor i termer af "matematikhistorie som værktøj". Igennem hele Gyldendals system er der oplæg til projekt- og emneforløb – oplæg som lægger, eller kan lægge, op til inddragelse af matematikkens historie i varierende omfang. Imidlertid er det vigtigt at pointere at realiseringen af sådanne oplæg i form af tilrettelæggelse af disse såvel som fremskaffelse af den fornødne litteratur er helt og holdent op til de enkelte undervisere – bøgerne kommer kun med forslagene.

Bøgerne i Gyldendals system bugner ikke som sådan med matematikhistorie, men når elementer af matematikkens historie inddrages, sker det, på nær i B2-bogen(!), på en måde som bringer de om-matematiske såvel som de med-matematiske aspekter af den pensumbundne i-matematik i spil. Inddragelsen af matematikhistorie i Gyldendals system forekommer langt mere fokuseret og velovervejet, omend også mere begrænset, end i tilfældet med systemet fra Systime.

Matema10k fra Frydenlund

Frydenlunds *Matema10k* er forfattet af Thomas Jensen, Claus Jessen og Morten Overgård Nielsen og består af tre bind til henholdsvis C-, B- og A-niveau.[41] Inddragelsen af matematikkens historie i lærebogssystemet fra Frydenlund forekommer fortrinsvist i "perspektiverende rammer" som nogle af bøgerne i Systimes system også gjorde brug af.

Gennemgang af historiske elementer i Frydenlunds system

I C-bogen berører eller omhandler tolv ud af de i alt tyve "perspektiverende rammer" matematikkens historie. Disse omhandler: nullets opdagelse; anekdoten med Gauss der som 8-årig summerede tallene fra 1 til 100; G.H. Hardys syn på ren og anvendt matematik; Napier og logaritmernes udvikling; en diskussion af hvorvidt universet er matematisk, præsenterende blandt andet Pythagoras, Platon, Euklid og Galilei; Zenons paradoks; Hilbert og hans "hotel"; Viète og indførelsen af bogstavregningen; Leibniz' introduktion af begrebet "variabel"; Thales og "det første bevis"; Hume; G.H. Hardys udtalelse om at det indirekte bevis er "et af en matematikers fineste våben". I forordet findes endnu en ramme som omtaler historien om Hardy-Ramanujan-tallet 1729 samt giver et citat af Galilei.[42] I kapitlet "Beviser" bliver matematikhistorien en smule mere

41 Se (Jensen & Nielsen, 2005), (Jensen et al., 2006) og (Jensen et al., 2007). Bemærk, at Claus Jessen ikke er medforfatter af C-bogen.

42 (Jensen & Nielsen, 2005, s. 19, 33, 40, 60, 94-95, 132, 147, 197, 198, 206, 208, 215, 13)

integreret i teksten omend der stadig figurerer "perspektiverende rammer" hist og her. Eksempelvis diskuteres her Fermats store sætning og pythagoræernes problemer med $\sqrt{2}$.[43] Løbende igennem bogen bringes også portrætter af matematikere, både i forbindelse med de "perspektiverende rammer" såvel som andre steder. Disse omfatter: Napier, Pythagoras, Galilei, Zenon, Hilbert, Viète, Platon, Fermat og Hardy.[44]

De "perspektiverende rammer" i B-bogen omhandlende matematikhistorie omfatter: Abel, femtegradsligningen og Abelprisen; ligningernes betydning og herunder Cardano, Descartes og Gauss; Newton og Leibniz og udviklingen af differentialregningen; Zenons paradoks (i en lidt anden kontekst end i C-bogen); Galileo Galileis arbejde; grænseværdibegrebet og Weierstrass; tallet e, Leibniz og Euler; rationalitet og determinisme; anvendelse af trigonometri til opmålingen af Danmark i 1763 under ledelse af astronomen Thomas Bugge; det skiftende syn på geometri fra antikken til Descartes; matematikkens beviskrav og Descartes; matematik og virkelighed.[45] I kapitlet "Om beviser" er matematikhistorien, ligesom i C-bogens kapitel om beviser, i højere grad forsøgt integreret i teksten. Her diskuteres eksempelvis mængdelærens historie og paradokser, ikke-euklidisk geometri og intuitionisme som relateres til Euklids ikke-konstruktive bevis for primtallenes uendelighed samtidig med at beviset bringes. Også i B-bogen bringes der en række portrætter. Disse omfatter Hooke, Galilei, Weierstrass, Euler, Bugge, Pythagoras og Descartes, og så indeholder bogen en faksimile fra *Principia Mathematica*.[46]

Kun én af A-bogens "perspektiverende rammer" omhandler matematikhistorie. Denne perspektiverer over numeriske løsninger af differentialligninger og nævner de to tyske matematikere Runge og Kutta samt deres metoder såvel som Eulers metode.[47] I indledningen til kapitlet "Analytisk geometri i 2D" omtales såvel Euklid som Descartes kort samtidig med at oprindelsen af vektorbegrebet dateres til 1800-tallet. I denne forbindelse bringes også et portræt af Euklid.[48] Af matematiske resultater, formler, sætninger osv. hvis navne henviser til matematikere gennem historien, kan ud over Eulers metode og Runge-Kutta nævnes Archimedes' spiral.[49] Antallet af "perspektiverende rammer" og løbende henvisninger til historien må altså overordnet siges at have indskrænket sig noget i A-bogen i forhold til de to tidligere bøger i Frydenlunds system. Til gengæld indeholder A-bogen så et længere gæstebidrag af matematikhistoriker Jesper Lützen om tallenes historie med tilhørende opgaver. Heri gennemgår Lützen tallenes historie fra indgraveringen af 55 streger inddelt i grupper

43 (Jensen & Nielsen, 2005, s. 210, 215)
44 (Jensen & Nielsen, 2005, s. 60, 94, 95, 133, 147, 197, 205, 206, 210, 215)
45 (Jensen et al., 2006, s. 73, 75-76, 95, 96, 99-101, 105-106, 120, 125-127, 229-230, 230-234, 260-261, 267)
46 (Jensen et al., 2006, s. 27, 99, 105, 120, 229, 231, 233, 95)
47 (Jensen et al., 2007, s. 213)
48 (Jensen et al., 2007, s. 47)
49 (Jensen et al., 2007, s. 66, 300)

af fem på en ulveknogle for 30.000 år siden og frem til i dag, dækkende ægypterne, babylonierne, grækerne, hinduerne, araberne, kineserne samt den historiske generalisering, udvidelse og aksiomatisering af talbegrebet i den vestlige verden.[50] Alt i alt en temmelig fyldestgørende beskrivelse. Lützen relaterer også løbende historien til de involverede personer og formår således at præsentere læserne for en lang række vigtige matematikere. Fremstillingen er ligeledes suppleret med såvel portrætter som faksimiler. Eksempelvis findes der et portræt af Pythagoras, en side fra Euklids *Elementer*, et portræt af Luca Pacioli, et af Georg Cantor med hustru og et af Gödel.[51] I de femten tilhørende opgaver bliver den i afsnittet præsenterede om-matematik for alvor bragt i spil med i-matematikken, eksempelvis når der skal løses ligninger fra gammelbabyloniske kileskrift-tekster, eller når produktet af to komplekse tal skal indtegnes i den komplekse plan hvorefter det skal tjekkes hvorledes resultatet passer med Wessels regler for hvordan produktet repræsenteres geometrisk.

Diskussion af Frydenlunds involvering af matematikhistorien

De "perspektiverende rammer" i Frydenlunds system har undertiden det lille "twist" at de i modsætning til Systimes forsøger at diskutere "små" spørgsmål som for eksempel "Er matematikken nyttig?" eller "Er universet matematisk?" i stedet for blot at give historiske beskrivelser. I forhold til såvel Systimes som Gyldendals system synes Frydenlunds også oftere i forbindelse med historien at inddrage elementer af matematikkens filosofi og videnskabsteori. Forfatterne skriver selv i forordet til C-bogen at de perspektiverende rammer "søger at sætte det matematiske stof i større perspektiv" og videre: "De perspektiverende rammer skal opfattes som et tilbud, og det er således ikke nødvendigt at læse dem for at forstå det faglige stof" (Jensen & Nielsen, 2005). Således kan man ikke sige at matematikhistorien er en integreret del af Frydenlunds system. Ligesom hos Systime forekommer matematikhistorien oftest isoleret i forhold til det øvrige stof, og der er, som hos Systime, i overvejende grad tale om illustrationstilgange hvis formål synes at være at drysse lidt om-matematisk krydderi ud over kapitlernes i-matematik. Til tider tangerer behandlingen af denne om-matematik også i lidt for høj grad en festtale. Eksempelvis hedder det i forbindelse med "matematikkens første bevis" af Thales: "Tænk engang: det første bevis i historien. Her skød den menneskelige tankegang for alvor i vejret" (Jensen & Nielsen, 2005, s. 206).

Om-matematikken forankres i væsentligt højere grad i i-matematikken i kapitlerne om beviser end i de "perspektiverende rammer" i C- og B-bogen. Og i Lützens bidrag til A-bogen er denne forankring i særdeleshed tilstedeværende. Ligesom i Kjeldsens

50 (Jensen et al., 2007, s. 125-154)
51 (Jensen et al., 2007, s. 128, 131, 138, 147, 148)

bidrag til Gyldendals system er der i Lützens bidrag tale om at om-matematikken er solidt forankret i i-matematikken, såvel i fremstillingen som i de tilhørende opgaver. Men man spørger unægtelig sig selv om hvorfor et sådant indlæg skulle gemmes til A-bogen da dette jo betyder at det kun er elever med matematik på højniveau som udsættes for en sådan (solidt forankret) tilgang til matematikkens historie. (Altså den omvendte situation af den hos Systime hvor det var eleverne med C- og B-niveau – og ikke dem på A-niveau – der blev præsenteret for kapitel C.2/B.2.).

Underviserens rolle

Involveringen af matematikhistorie i undervisningen er selvfølgelig altid op til den enkelte underviser, og det er tilmed et job som når lærebogssystemernes involvering af historien findes utilstrækkelig, kun bliver større. Men hvordan kommer man som underviser, med et måske kun begrænset kendskab til matematikkens historie, i gang med dette? Der er et åbenlyst problem her, for hvor får man undervisningsmateriale fra som er tilpasset matematikhistoriske forløb i det danske gymnasium? For det første må materialet gerne være på dansk, og selv hvis man er villig til at acceptere undervisningsmateriale på engelsk, er problemet desværre ikke løst dermed. Meget af det materiale der findes, er ikke tilpasset gymnasialt niveau (måske lige med undtagelse af Clausens, Printz' og Schomackers serie *Ind i matematikken*): Enten er det matematikhistorie på forskningsniveau, eller også er det alt for populærvidenskabeligt. Så kan man selvfølgelig ty til originalkilderne, men disse er ikke nødvendigvis nemt tilgængelige.

De her opridsede problemer er ikke særegne for Danmark og det danske gymnasium. Orienteringen på verdensplan lader til at gå imod mere matematikhistorie i matematikundervisningen, og problemerne er faktisk til stede i en række af de andre lande hvor matematikhistorie er kommet på dagsordenen enten i gymnasial sammenhæng eller på folkeskoleniveau. Fauvel og van Maanen (2000, s. 2-19) giver en beskrivelse af hvorledes matematikkens historie spiller ind på matematikundervisningen i seksten forskellige lande. Ud af disse seksten lande indgår matematikhistorie som en del af bekendtgørelserne i de ti.[52] Eksempelvis blev matematikkens historie en del af den norske folkeskoles bekendtgørelse i 1997. Her er et af målene "at elevene utvikler innsikt i matematikkens historie og fagets rolle i kultur og vitenskap" (Smestad, 2002, s. 13).[53] Smestad (2002) har udført en omfattende analyse af de lærebøger som udkom som følge af den nye bekendtgørelse i Norge. Han konkluderer at behandlingen af

52 Disse lande er: Argentina, Østrig, Brasilien, Kina, Danmark, Frankrig, Grækenland, Italien, Norge og USA, omend der i USA er stor variation fra stat til stat (Fauvel & van Maanen, 2000, s. 2-19).

53 Fra 2006 figurerer matematikkens historie ikke længere eksplicit i bekendtgørelsen for den norske folkeskole. Imidlertid findes den stadig i en række af de nye lærebøger idet forlagene har valgt at lade de matematikhistoriske afsnit forblive i bøgerne.

matematikkens historie i denne første generation af lærebøger er problematisk, at forfatterne har haft problemer med at inddrage historien på meningsfuld vis, og at der derforuden også forekommer en række faktuelle fejl i de historiske fremstillinger. Matematikhistorie blev allerede en del af pensum i det norske gymnasium i 1994 (inspireret af den danske situation fra 1987) (Fauvel & van Maanen, 2000, s. 14-15), og Smestad (2003, s. 168) påpeger at historien optræder i større omfang i de gymnasiale lærebøger end i lærebøgerne til folkeskolen. Hertil kommer at antallet af faktuelle fejl også synes mindre, omend historien ofte forekommer som en form for "påklistring" enten i begyndelsen eller i slutningen af et kapitel.

Også i Hong Kong er matematikkens historie blevet en del af matematikundervisningen i hvad der svarer til folkeskolen pga. en bekendtgørelse fra 1999. Her hedder det blandt andet at eleverne må "værdsætte at matematik er et dynamisk fagområde med rødder i mange kulturer" (Tang, 2004, s. 630, min egen oversættelse fra engelsk). Som konkrete eksempler på hvordan dette kan opnås, nævnes blandt andet at eleverne kan "undersøge og sammenligne tilgangene til at bevise Pythagoras' sætning i forskellige kulturer [...] herunder dem i antikkens Kina"[54] (Tang, 2004, s. 630, min egen oversættelse fra engelsk).

Ligesom Danmark (og måske Norge) befinder Hong Kong sig i en situation hvor de ministerielle krav om inddragelse af matematikhistorie er til stede, men hvor egnede undervisningsmaterialer tilpasset enten niveauet i gymnasiet eller folkeskolen ikke nødvendigvis er det. Jeg diskuterede i efteråret 2006 denne problematik med professor Man-Keung Siu fra Hong Kong University – en af fortalerne i Hong Kong for inddragelsen af matematikhistorie i undervisningen:

> Man bliver nødt til at have noget midt imellem, ikke kun forskningsresultaterne i matematikhistorie, ikke kun primærteksterne, ikke kun de historiefortællende populære redegørelser – man må have noget midt imellem, og det er disse materialer der vil være brugbare for underviserne i klasseværelset. Og for at have en masse af sådanne materialer bliver man nødt til at mobilisere underviserne til at frembringe dem selv. Man kan ikke regne med at andre skriver dem. Nogle undervisere håber at en eller anden vil skrive alle disse materialer en skønne dag og distribuere dem, eller at de kan købe dem hos boghandleren og bruge dem direkte i klasseværelset. Men jeg tror ikke det vil fungere, for man har brug for *entusiasmen* fra underviseren selv for at kunne anvende denne form for materiale ordentligt. Bare at have materialet er ikke nok. (Siu, 2006, min egen oversættelse fra engelsk, kursivering tilføjet)

54 For et konkret studie af hvordan dette kan gøres, se (Lit et al., 2001).

Et af underviserne selv ofte fremsat argument *imod* inddragelsen af historie er at de ikke er matematikhistorikere og derfor ikke føler sig rustede til opgaven (Siu, 2004, s. 269). Men i virkeligheden er der vel heller ingen der kræver dette. Hvad der derimod snarere er tale om, er at underviserne gør sig til formidlere af matematikkens historie på samme måde som de i forvejen er det af matematik, fagets indretning og dets anvendelse og rolle i samfundet, og i henhold til KOM-rapporten at de så forankrer disse meta-diskussioner om faget matematik i deres egne, såvel som elevernes, allerede veletablerede i-matematiske forudsætninger.

Tager vi Sius kommentar om at det supplerede materiale til inddragelse af matematikkens historie i høj grad bør komme fra underviserne selv, for pålydende, så er selve udmøntningen af dette i praksis selvfølgelig en anden sag. Igen er der måske her lidt inspiration at hente fra vores kollegaer andre steder i verden. Siu selv afholder workshops for større grupper af matematikundervisere for at få dem til at samarbejde lokalt om udarbejdelsen af velegnede materialer og således få dem til at støtte hinanden i en kollektiv indsats. I Taiwan findes lignende tiltag hvor gymnasieundervisere i matematik mødes tre timer en gang om ugen og diskuterer matematikhistoriske tekster samt udarbejder materialer til undervisningen (Su, 2004) (Horng, 2004). Også herhjemme, på Roskilde Universitetscenter, har der været afholdt et efteruddannelseskursus for gymnasielærere hvor de kunne få hjælp til at designe et matematikhistorisk forløb, eventuelt sammen med undervisere fra samme gymnasium, til brug i deres egen undervisningspraksis samt evaluere en implementering af dette.[55] Sådanne aktiviteter er dog langt mere krævende for den enkelte underviser end blot at pille et stykke supplerende materiale ned fra boghylden. Men til gengæld er der måske større chance for at materialet vil "fungere" i praksis da underviseren må forventes at have engageret sig i udarbejdelsen af det, og man måske netop derfor også får *entusiasmen* med.

Konklusion

I den nye bekendtgørelse for det almene gymnasium er det "matematikhistorie som mål" der udgør det centrale omdrejningspunkt for involveringen af matematikhistorie i undervisningen ligesom det også er det i KOM-rapporten. Imidlertid er kravet om en forankring af om-matematikken i i-matematikken ikke eksplicit udtrykt i bekendtgørelsen på samme måde som det er i KOM-rapporten. Af denne årsag kan der i princippet argumenteres for at bekendtgørelsens, men ikke KOM-rapportens, krav til involvering af matematikhistorie kan opfyldes gennem "anekdote- og julefortælling".

55 Forløbene samt afrapporteringerne blev derefter stillet til rådighed på kursets hjemmeside: http://mmf.ruc.dk/mat/matefteruddannelse/rapporter/2004.htm (10. september 2007). De sidste par år har der dog udelukkende været udbudt kurser i matematisk modellering i RUC-regi, men det forlyder at matematikhistorie sagtens kan komme på tale igen.

En analyse af de tre lærebogssystemer fra henholdsvis forlagene Systime, Gyldendal og Frydenlund indikerer at illustrationstilgangene er de mest udbredte tilgange til involvering af historie i de gymnasiale lærebogssystemer. Tilmed er der oftest tale om at involveringen befinder sig i "krydderi"-enden af skalaen. Kun i meget få tilfælde – og ofte med god vilje og diverse forbehold – kan der være tale om at lærebogssystemerne byder på noget der kan karakteriseres som små moduler. Ligeledes kun i meget få tilfælde synes forfatterne at gøre forsøg på at tænke matematikhistorien som en integreret del af fremstillingen af matematikken. Oftest lever den et sideløbende liv i såkaldte "perspektiverende rammer", i "historiske bemærkninger", i oplæg til projekt- og emneforløb eller i bidrag fra gæsteforfattere. En reel forankring eller "soliditet" af denne sideløbende, historiske om-matematik i den i pensum præsenterede i-matematik hører også mere til undtagelsen end til reglen. Ej heller fremgår det særlig klart hvilke formål forfatterne selv har haft med deres præsentation af de matematikhistoriske elementer (ud over at opfylde den nye bekendtgørelse, selvfølgelig). Eksempelvis nævnes disse kun sjældent i forordene, og når det sker, gives der ingen retningslinjer til lærerne om hvordan de kan inddrage disse i deres undervisning. Grundet den udbredte brug af "krydderitilgange" i de tre systemer kan formålet med involveringen af matematikhistorie i disse langt hen ad vejen snarere tolkes til at skulle tjene som en motiverende faktor frem for eksempelvis en form for almendannelse – det vil sige som *værktøj* frem for *mål*.

Dersom inddragelsen af historie i lærebogssystemerne findes utilstrækkelig i forhold til de i bekendtgørelsen (og eventuelt KOM-rapporten) stillede målsætninger, må det være op til den enkelte underviser at sørge for opfyldelsen af disse. Dette kan eksempelvis gøres ved at tilrettelægge matematikhistoriske forløb. Dog må udbuddet af velegnet materiale til sådanne forløb betegnes som sparsomt hvorfor det i et vist omfang også bliver op til underviserne selv at frembringe tekster tilpasset til niveauet. Med udgangspunkt i en lignende situation i Hong Kong, et forskningsprojekt i Taiwan og et efteruddannelseskursus herhjemme foreslås det at matematikunderviserne samarbejder lokalt om udarbejdelsen af velegnede materialer.

Taksigelser
Tak til Mogens Niss og Bjarke Skipper Petersen for kommentarer, konstruktiv kritik og gennemlæsning af denne artikel.

Referencer

Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard J. (2005a). *Mat A1 stx*. Århus: Systime.
Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard J. (2005b). *Mat B1 stx*. Århus: Systime.
Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard J. (2005c). *Mat C stx*. Århus: Systime.
Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard J. (2006a). *Mat A2 stx*. Århus: Systime.

Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard J. (2006b). *Mat B2 stx*. Århus: Systime.

Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard J. (2007). *Mat A3 stx*. Århus: Systime.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2005a). *Gyldendals Gymnasiematematik – Grundbog B1*. København: Gyldendal.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2005b). *Gyldendals Gymnasiematematik – Grundbog C*. København: Gyldendal.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2006). *Gyldendals Gymnasiematematik – Grundbog B2*. København: Gyldendal.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2007). *Gyldendals Gymnasiematematik – Grundbog A*. København: Gyldendal.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (red.). (2000). *History in Mathematics Education – The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Horng, W.-S. (2004). Teachers' Professional Development in Terms of the HPM: A Story of Yu. I: F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (red.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (s. 346-358). Uppsala Universitet.

Jankvist, U.T. (2007a). Den matematikhistoriske dimension i undervisning – generelt set. *MONA, 3(3)*, s. 70-90.

Jankvist, U.T. (2007b). Empirical research in the field of using history in mathematics education: Review of empirical studies in HPM2004&ESU4. *Nomad, 12(3)*, s. 83-105.

Jankvist, U.T. (2008a). Den tidlige kodningsteoris historie – et undervisningsforløb til gymnasiet. *Tekster fra IMFUFA,* nr. 459, Roskilde Universitetscenter.

Jankvist, U.T. (2008b). RSA og den heri anvendte matematiks historie – et undervisningsforløb til gymnasiet. *Tekster fra IMFUFA*, nr. 460, Roskilde Universitetscenter.

Jensen, T., Jessen, C. & Nielsen, M.O. (2006). *Matema10k – Matematik for gymnasiet B-niveau*. København: Frydenlund.

Jensen, T., Jessen, C. & Nielsen, M.O. (2007). *Matema10k – Matematik for gymnasiet A-niveau*. København: Frydenlund.

Jensen, T. & Nielsen, M.O. (2005). *Matema10k – Matematik for gymnasiet C-niveau*. København: Frydenlund.

Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus Bind I.* Oslo: Universitetsforlaget.

Lit, C.-K., Siu, M.-K. & Wong, N.-Y. (2001). The Use of History in the Teaching of Mathematics: Theory, Practice, and Evaluation of Effectiveness. *Educational Journal, 29(1)*, s. 17-31.

Niss, M. (1980). Nogle aspekter for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser frem til 1990. *Normat, 28(2)*, s. 52-60, 87.

Niss, M. & Jensen, T.H. (red.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18.

Siu, M.-K. (2004). No, I don't use history of mathematics in my class. Why?. I: F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (red.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (s. 268-277). Uppsala Universitet.

Siu, M.-K. (2006). *Interview med professor Man-Keung Siu den 5. oktober 2006*. Foretaget af Uffe Thomas Jankvist på Hong Kong University, Pokfulam, Hong Kong.

Smestad, B. (2002). Matematikkhistorie i grunnskolens lærebøker: en kritisk vurdering. *Alta,* s. 1-61.

Smestad, B. (2003). Historical Topics in Norwegian Textbooks. I: O. Bekken & R. Mosvold (red.), *Study the Masters* (s. 163-168). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Su, Y.-W. (2004). Mathematics Teachers Professional Development: Integrating History of Mathematics into Teaching. I: F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (red.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (s. 368-382). Uppsala Universitet.

Tang, K.-C. (2004). History of Mathematics for the Young Educated Minds: A Hong Kong Reflection. I: F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (red.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (s. 630-638). Uppsala Universitet.

Undervisningsministeriet, (1953). *Anordning og bekendtgørelse af 1953*.

Undervisningsministeriet. (1961). *Bekendtgørelse af 1961*.

Undervisningsministeriet. (1971). *Bekendtgørelse af 1971*.

Undervisningsministeriet. (1984). *Bekendtgørelse af 1984*.

Undervisningsministeriet. (1987). *Bekendtgørelse af 1987*.

Undervisningsministeriet. (2007). *Bekendtgørelse af 2007*. (Tidligere udgave fra 2004). http://us.uvm.dk/gymnasie//vejl/. Lokaliseret 20. januar 2008.