En lommeregnerstøttet tilgang til grænseværdier og uendelighed i gymnasiets matematikundervisning

Martin Sonnenborg, Næstved Gymnasium og HF

Anvendelsen af avancerede symbolske lommeregnere i gymnasiets matematikundervisning giver elever såvel som lærere et værktøj som kan gøre undervisningen mere spændende og lærerig hvis det anvendes korrekt. I artiklen præsenteres en række fordele ved at anvende lommeregneren i den daglige undervisning ligesom to undervisningssituationer omkring grænseværdier og uendelighedsbegrebet skitseres. Især den sidste af de to undervisningssituationer fremmer elevernes personliggørelse af den tilsigtede viden, jf. Teorien om Didaktiske Situationer.

Indledning

Flere kommunale og private musikskoler tilbyder undervisning i harmonikaspil. For de af MONAs læsere som ikke umiddelbart er bekendt med den nærmere indretning af dette (i øvrigt ganske højlydte) instrument, kan jeg oplyse at harmonikaen for højre hånds vedkommende fungerer stort set som et almindeligt klaver. Venstre hånd derimod afhænger af harmonikaens type. Enten frembringes en hel akkord når man trykker på en knap og hiver i bælgen (dette kaldes grundbas), eller også frembringes – igen som på et klaver – kun en enkelt tone (dette kaldes melodibas). Den første af de to anvendes blandt andet til sømandsviser mens den anden er nødvendig til at spille mere avanceret musik såsom klassiske stykker.

Harmonikalærerne er ikke helt enige om hvilken tilgang man bør bruge når man første gang introducerer nye elever til harmonikaen. Nogle mener at eleverne lige så godt kan lære at spille "rigtigt" allerede fra begyndelsen (dvs. med melodibas), mens andre foretrækker at lære eleverne grundbas i starten for så at lære dem melodibassen senere når de grundlæggende færdigheder inden for harmonikaspil mestres (bælgvendinger, forte, piano osv.). Helt oplagt er der fordele ved at undervise i brug af melodibas fra starten, men en af fordelene ved grundbas er at den musik man som elev lærer at spille, meget hurtigere lyder af noget. Eleverne får med det samme følelsen af faktisk at spille musik hvilket giver dem en høj grad af tilfredsstillelse og lyst til at øve sig og blive bedre. Omvendt kan de elever som fra begyndelsen undervises i brug af melodibas, have sværere ved at motivere sig til at øve – deres harmonikaspil lyder af væsentligt mindre i begyndelsen idet de spiller enkelte toner frem for hele akkorder.

De forskellige tilgange til at lære eleverne at spille på harmonika kan umiddelbart genkendes inden for matematikken i forbindelse med væsentlige punkter i den diskussion der har været omkring brugen af avancerede symbolske lommeregnere (CAS-værktøjer) i gymnasieundervisningen: Nogle lærere mener at eleverne skal lære den "rigtige" matematik først og så senere kan tillades at skyde genvej ved at anvende deres lommeregner; andre ser ikke noget problem i at lommeregnerne anvendes fra starten.

I denne artikel vil jeg skitsere en række idéer til en lommeregnerstøttet tilgang til matematiske grænseværdier i gymnasiet. De overordnede idéer stammer fra mit speciale inden for netop dette felt.[1] På samme måde som grundbas giver harmonikaeleverne mulighed for at spille musik allerede fra starten, kan lommeregneren anvendes til at give gymnasieeleverne mulighed for at lave relativt avanceret matematik med grænseværdier allerede fra et tidligt tidspunkt – de formelle metoder (melodibas) følger efter i naturlig forlængelse når de første grundlæggende kundskaber er tilegnet.

Efter en kort redegørelse for det didaktiske potentiale en velovervejet lommeregnerstøttet tilgang har, følger to eksempler på en lommeregnerstøttet tilgang til grænseværdier og uendelighedsbegrebet. Artiklen afsluttes med perspektivering og en kort konklusion.

Lommeregnerens didaktiske potentiale

Set fra elevernes side er en symbolsk lommeregner et herligt værktøj. De kan anvende den til at spare tid og besvær i forbindelse med besværlige omskrivninger, udregninger osv. Læreren på den anden side finder det ofte problematisk at eleverne kan løse flere opgaver på deres lommeregner uden at behøve tænke det mindste selv (Trouche, 2005).

Her er det nyttigt at skelne mellem hvad man kan kalde *brug* og *misbrug* af lommeregneren. *Brug* er når lommeregneren anvendes som et positivt valgt hjælpemiddel til at udforske en problemstilling eller spare tid i forbindelse med eksempelvis udførelse

1 Specialet er tilgængeligt i sin fulde længde online på Institut for Naturfagenes Didaktiks hjemmeside www.ind.ku.dk under publikationer.

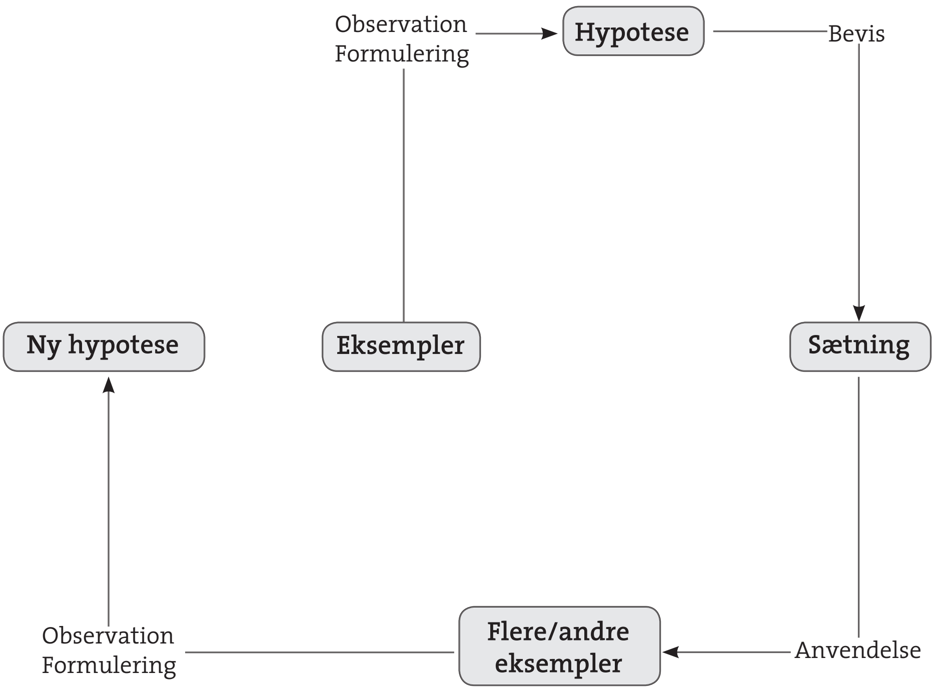
af en række komplicerede udregninger som eleven sædvanligvis selv ville være i stand til at udføre givet nok tid. *Misbrug* på den anden side er når lommeregneren udnyttes som en magisk maskine som giver svar på opgaver eleven dårligt selv forstår og helt sikkert ikke ville være i stand til at løse uden.

Et klassisk eksempel på brug er når eleverne efter at være blevet introduceret til differentialregningens lyksaligheder skal anvende deres viden til at finde lokale ekstrema for et tredjegradspolynomium $f(x)$. Strategien er hurtigt klar: Bestem $f'(x)$, og løs andengradsligningen $f'(x) = 0$. Her er undervisningens fokus på *metoden* frem for på differentiationsrutinen eller for den sags skyld på løsning af andengradsligninger. I forbindelse med disse to, i sammenligning med hovedfokusset på metode sekundære, elementer af eksempelregningen kan lommeregneren være nyttig for eleverne og spare dem for en del tid og besvær.

Tilsvarende kan læreren drage fordel af lommeregneren. Hvis eleverne tillades at anvende lommeregneren til at løse andengradsligninger (og eventuelt også til at differentiere), bliver eleverne for det første i stand til hurtigere at arbejde sig gennem en lang række eksempler. For det andet styrkes metodefokusset ved at metoden umiddelbart kan generaliseres til vilkårlige polynomier; på lommeregneren anvendes nøjagtigt de samme kommandoer ligegyldigt hvilket polynomium der er tale om: definer, differentier, sæt lig nul, løs ligningen.

Videre giver lommeregneren mulighed for at tage nye tilgange til matematikken i brug. Som netop omtalt kan lommeregneren sætte eleverne i stand til hurtigt at arbejde sig igennem en række (beregningstunge) eksempler hvilket kan udnyttes i forbindelse med en eksperimentel tilgang til matematikken.

En eksperimentel tilgang (se figur 1) hvor eleverne selvstændigt udforsker en problemstilling, fremsætter hypoteser, formulerer og senere beviser sætninger osv., er en langt mere naturlig tilgang til matematikken end den logisk opbyggede, deduktive matematik som vi kender så godt fra diverse lærebøger. Lakatos (1976) beskriver hvordan udviklingen inden for matematikken er karakteriseret ved en stærkt eksperimentel dimension, og denne kan tilgodeses i gymnasiematematikken ved at anvende lommeregneren til at udforske en given problemstilling med alle de matematiske kompetencer dette medfører. Et eksempel på en sådan udnyttelse af lommeregneren følger.



Figur 1. *En eksperimentel tilgang til matematikken er i langt højere grad end en deduktivt opbygget tilgang i tråd med den måde matematikken faktisk udvikler sig på. Lommeregneren kan anvendes til at overskue en stor mængde eksempler hvilket er nødvendigt for at sætte eleverne i stand til selvstændigt at formulere hypoteser og sætninger.*

Videre kan lommeregneren også anvendes som en kikkert. Ud over at sætte eleverne i stand til hurtigt at overskue et større område (ved at regne en masse eksempler igennem) kan den også anvendes til at se resultater som ligger langt ude i horisonten. Således kan eleverne som en anden opdagelsesrejsende langsomt arbejde sig hen mod et mål som de har fundet ved hjælp af deres lommeregner, og med overblik over landskabet foran dem åbnes for alternative ruter, frem for at de blot går frem i fugleflugtslinje gennem alskens buskads og tornekrat. Et eksempel på denne anvendelse følger her.

Problemet med grænseværdier

Grænseværdier regnes (med rette) for at være et af de mest udfordrende matematiske begreber som gymnasieelever stifter bekendtskab med. En formel tilgang til grænseværdier må nødvendigvis tage sit udgangspunkt i den formelle definition af grænseværdi, med alle de kvantorer, uligheder og græske bogstaver som optræder i denne som udgangspunkt. Mange gymnasielærere vælger dog en sådan formel tilgang fra da den er ganske tung og vanskelig at forstå for langt størstedelen af eleverne. I stedet vælges en mere uformel tilgang, eksempelvis i forbindelse med en første introduktion til differentialregning hvor grænseværdierne så at sige erstattes af en lineal som repræsenterer en korde som gradvist ændres til en tangent.

På den anden side opstiller Sierpinska (1987) en hel række problemer og misforståelser i forbindelse med grænseværdier som man typisk støder på blandt eleverne. Eksempelvis opfatter flere elever ikke grænseværdier som et matematisk funderet koncept, men som en *ad hoc*-metode baseret på erfaring. Mange elever opfatter grænseværdier som en form for tilnærmelse eller som en slags dynamisk bevægelse hen mod et givet tal a, og begge disse misforståelser kan så tolkes i et geometrisk eller et numerisk perspektiv.

De fleste af de hyppigst forekommende misforståelser kan spores tilbage til en mangel på en formel tilgang til grænseværdier hvilket efterlader os i lidt af et dilemma: På den ene side er en formel tilgang umiddelbart for vanskelig for størsteparten af eleverne, og på den anden side medfører en uformel tilgang til grænseværdier flere forskellige misforståelser blandt eleverne.

Min idé til en løsning af dette problem er at kombinere en uformel tilgang til grænseværdier med velfunderede formelle matematiske metoder. Både inden for den uformelle tilgang og inden for de formelle metoder kan en symbolsk lommeregner med fordel anvendes, hvilket jeg vil komme nærmere ind på i det følgende.

Eksempel 1: En sammenligning af to grænseværdier

Som et led i det undervisningsforløb jeg designede i forbindelse med mit speciale, skulle eleverne blandt andet betragte følgende grænseværdier:

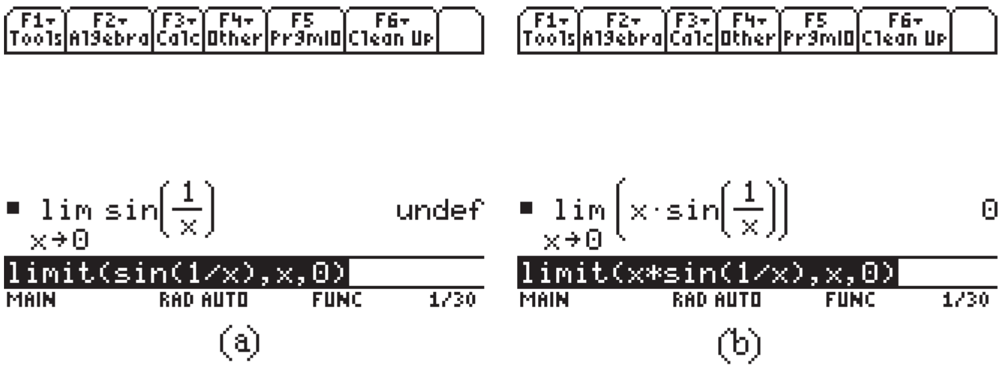
$$\mathbf{A}\ \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\mathbf{B}\ \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Umiddelbart er de ganske ens, men et nærmere studie af de to udtryk vil vise at de i virkeligheden er ganske forskellige, ligesom dette studie vil give anledning til at fremhæve vigtige pointer i forhold til den formelle definition af grænseværdier.

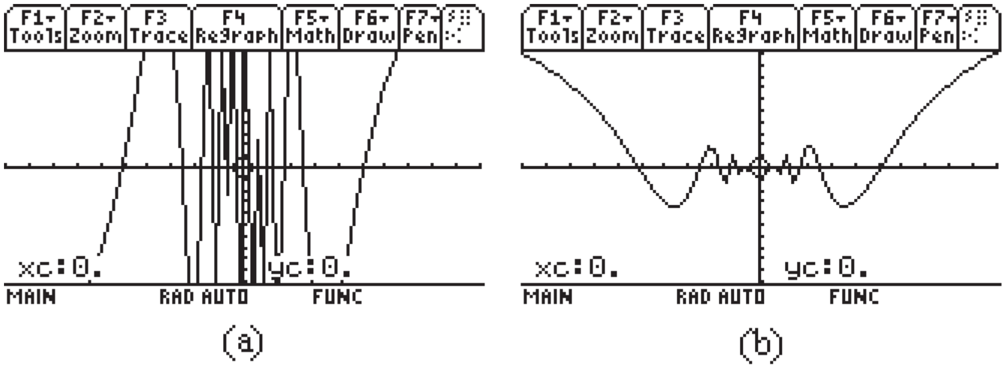
Udgangspunktet for en sammenligning af de to er at der er noget konkret at sammenligne. Beder man en gymnasieelev sammenligne de to udtryk, kan vedkommende givetvis forholdsvis hurtigt fortælle at forskellen er det x der er med i udtryk **B**, men ikke i **A**. Men nu er matematik mere og andet end “find fem fejl”, og et sådant svar stiller ingen gymnasielærer sig tilfreds med i længden. En mere kvalitativ matematisk sammenligning uden nogen hjælpemidler vil dog falde de fleste gymnasieelever ganske vanskelig, og det er her den symbolske lommeregner kommer ind i billedet.

Ved at bruge lommeregneren kan eleven ganske hurtigt bestemme værdien af de to udtryk (se figur 2), og med de forskellige resultater som udgangspunkt er sammenligningen ovenfor pludselig meget mere interessant. Med udgangspunkt i at den eneste forskel på selve udtrykkene er et *x*, kan lommeregnerens resultat bruges til at drage den konklusion at det netop er det *x* som må være skyld i at udtryk **A** er udefineret (figur 2a) mens udtryk **B** er lig med nul (figur 2b).



Figur 2. *Ved hjælp af en symbolsk lommeregner kan eleverne umiddelbart finde relativt komplicerede matematiske grænseværdier, hvilket muliggør en mere kvalitativ matematisk sammenligning af de to udtryk end en overfladisk "find fem fejl"-sammenligning.*

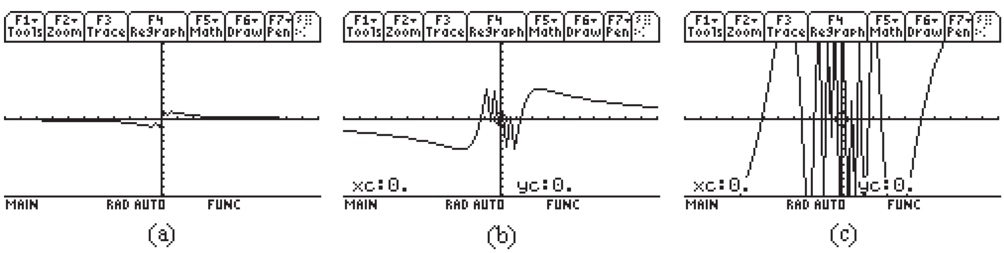
Efter således at have konkluderet at det ekstra *x* i udtryk **B** er afgørende for at udtryk **B**, modsat **A**, har en veldefineret grænseværdi, er eleverne rede til at søge forklaringen på *hvorfor* det forholder sig sådan. En grafisk sammenligning af de to udtryk under grænseværdien er nærliggende, og igen kan lommeregneren hjælpe eleverne. Ingen af udtrykkene er meget vanskelige at indtaste, og efter at have anvendt lommeregnerens ZOOM-funktion et par gange fås ganske illustrative repræsentationer af de to grafer (se figur 3).



Figur 3. *Graferne for udtrykkene under grænseværdierne A hhv. B.*

Bemærk her at øvelsen "tegn grafen for udtrykkene **A** og **B**" giver læreren et indblik i elevernes anvendelse af lommeregneren til at tegne grafer. Det er ikke altid at de grafer man studerer, passer ind i lommeregnerens standardvindue, og her kommer lommeregnerens ZOOM-funktion i spil. Betragt eksempelvis grafen for udtrykket i grænseværdi **A** (figur 4).

Bemærk især hvordan grafen ændrer sine egenskaber fundamentalt når lommeregneren kommer i spil. I standardvinduet (figur 4a) er grafen tilsyneladende under x-aksen for $x < 0$ mens den tilsyneladende er over for $x > 0$. Efter at have brugt ZOOM-funktionen en gang i punktet (0,0) (figur 4b) er det tilsyneladende omvendt, mens det først er efter endnu en ZOOM-kommando (figur 4c) at det bliver klart for eleverne hvordan grafen i virkeligheden forløber. Således kan læreren, blot ved at bede nogle elever tegne en skitse af en graf på tavlen, observere om disse elever er i stand til at tegne en brugbar graf på deres lommeregner ved at sammenholde deres skitse med grafens faktiske forløb.



Figur 4. *(a) Grafen for funktionen f(x) = sin(1/x) i standardvinduet. (b) Samme graf efter at ZOOM-funktionen er anvendt en gang i punktet (0,0). (c) Efter to anvendelser.*

En sammenligning af de to grafer for udtrykkene **A** og **B** (figur 3) viser at begge udtryk har det til fælles at perioden for sinus bliver kortere og kortere jo tættere x kommer på nul, men hvor grafen for udtryk **A** bliver ved med at svinge med samme udsving, bliver udsvinget for udtryk **B** stadig mindre efterhånden som x nærmer sig nul. Videre kan man diskutere sig frem til det rimelige i denne observation ved at sammenholde dette med de to oprindelige udtryk: **B** skilte sig netop ud fra **A** ved at have et x ganget på foran – og når x går mod nul, svarer det til at gange et stadig mindre tal på udtrykket i **A**, som pga. sinus' egenskab som begrænset funktion betyder at udtryk **B** vil gå mod nul.

Foreløbig har der fundet meget lidt formel matematik sted. Sammenligningen af de to grænseværdier har hovedsageligt foregået på et uformelt niveau hvor man diskuterer forskellen på de to grænseværdier ud fra nogle outputs fra en lommeregner. Eleverne har (ganske vist overfladisk) analyseret et matematisk problem, identificeret en afgørende forskel på to udtryk samt fået en idé om hvorfor den tilsyneladende lille forskel har så stor betydning. Uden at udføre komplicerede matematiske beregninger har de alligevel udført en (uformel) matematisk analyse af en problemstilling, hvorved flere af de centrale kompetencer nævnt i gymnasiebekendtgørelsen for matematik bliver trænet og styrket.

Der er dog fortsat et stykke vej til målet. En uformel argumentation med udgangspunkt i det grafiske register er ikke tilstrækkelig. Der fordres et matematisk bevis, og første skridt på vejen til et sådant for udtryk **B** er at forklare hvorfor vurderingen

$$-x \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

er sand. Dette kræver et kendskab til grafen og (især) værdimængden for sinus-funktionen, men er dette berørt i tidligere undervisningsforløb, er ulighederne ovenfor hurtigt forklaret ud fra værdimængdebetragtninger (sinus svinger mellem -1 og 1). Eleverne kan nu, ved at sætte stadig mindre værdier for x ind i ulighederne, studere hvad der sker efterhånden som x går mod nul, og ud fra den ovenstående ulighed opstille følgende:

$$\lim_{x\to 0} -x \leq \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x$$

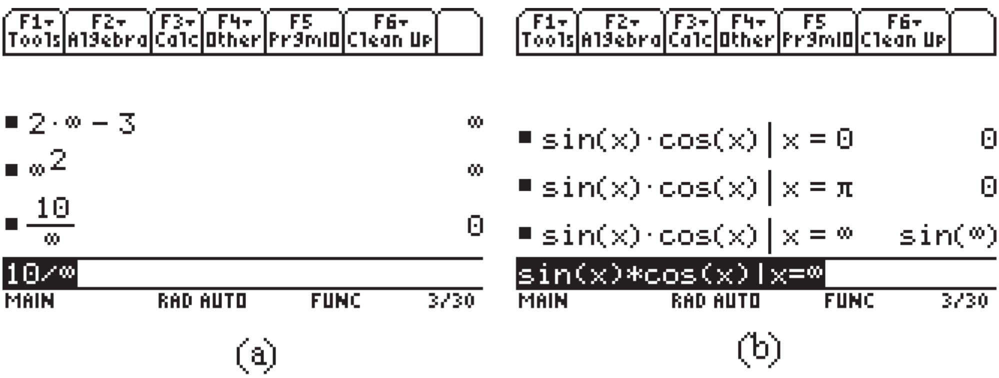
De to grænseværdier som begrænser udtrykket i midten (grænseværdi **B**), ses let begge at gå mod nul, og således bliver udtryk **B** i midten klemt tættere og tættere på nul – det må altså være lig med nul.

Med relativt simple midler har eleverne på nuværende tidspunkt identificeret den afgørende forskel på de to oprindelige grænseværdier ligesom de har lavet et matematisk bevis for hvorfor den ene af de to antager værdien nul. En konklusion af formen "*Vi kan klemme udtrykket vilkårligt tæt på nul, så nul må være grænseværdien*" er ikke langt borte, hvilket kan lede til et (mere eller mindre formelt) matematisk funderet argument for hvorfor grænseværdi **A** er udefineret.

Uendelig – et tal som alle andre?

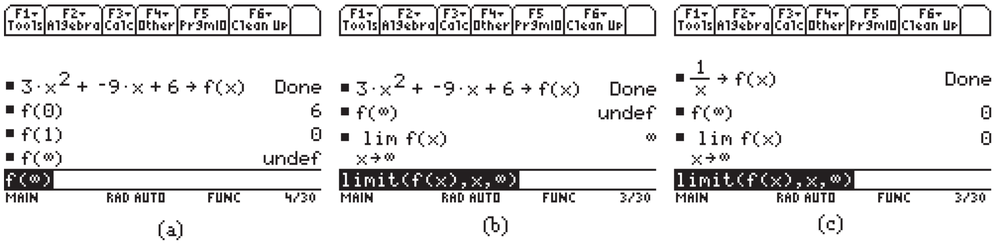
Et andet aspekt som typisk er med til at skabe usikkerhed og forvirring i forbindelse med grænseværdier, er det nære slægtskab disse har med uendelighedsbegrebet. Samspillet mellem de to matematiske koncepter og hvordan kombinationen af de to medfører om muligt endnu større problemer for eleverne, er endog særdeles grundigt beskrevet i diverse didaktiske tidsskrifter. Af selv samme årsag vil jeg ikke komme nærmere ind på disse problemer her, men i stedet fokusere på hvorledes lommeregneren på den ene side umiddelbart kan anvendes til at få indblik i hvad uendelig er for en størrelse, ligesom den på den anden side også kan være årsag til en hel del forvirring.

De mest almindelige symbolske lommeregnere har alle uendelig (i form af en knap med mærket "∞") umiddelbart tilgængelig for brugeren. Eksempelvis er denne knap på en TI-89-lommeregner placeret på samme niveau som tallene *e* og π. Således er eleverne i stand til at gøre sig en række første erfaringer med uendelighed blot ved at trykke en lille smule på deres lommeregner (se figur 5a). Dog vil lommeregneren til tider give umiddelbart uforståelige og misvisende svar (se figur 5b).



Figur 5. *(a) På en symbolsk lommeregner kan eleverne eksperimentere med uendelighed og opdage fundamentale egenskaber. (b) Dog vil de til tider støde ind i mystiske og til tider misvisende svar. Hvorfor svarer lommeregneren for eksempel sin(∞) frem for cos(∞) eller udefineret?*

Tilsvarende vil nogle elever finde at lommeregneren modsiger sig selv idet den godt kan vurdere nogle funktioner i $x = \infty$, men ikke andre (se figur 6). Denne inkonsekvens skyldes lommeregnerens software som således i høj grad er med til at betinge elevernes brug af lommeregneren (sammen med knappernes placering, kommandoernes syntaks osv.). Denne proces hvor elevens anvendelse af lommeregneren betinges af dens nærmere indretning, kaldes *intrumentationsprocessen* (Trouche, 2004, s. 290).



Figur 6. *Hvis eleverne eksperimenterer med uendelig på deres lommeregner, vil de finde tilsyneladende modstridende svar. I skærmbillede (a) angives polynomiet f(x) som udefineret i x = ∞ til trods for at eleverne ville forvente at andengradsleddet dominerer. I skærmbillede (b) viser det sig dog at grænseværdien for polynomiet er uendelig for x gående mod uendelig. Af (c) fremgår det dog at dette mønster ikke er konsekvent – her er grænseværdien lig med f(∞).*

Eksempel 2: "Nej, nu bliver det simpelthen for mærkeligt!"

I det føromtalte undervisningsforløb om grænseværdier som jeg designede i forbindelse med mit speciale, indgik der også en introduktion til uendelighed. Efter at have bestemt værdien af en hel række grænseværdier blev eleverne bedt om at se nærmere på de af grænseværdierne som havde værdien plus/minus uendelig. Opgaven lød på at se om de kunne finde et mønster ved at inddrage regnereglerne for grænseværdier. Fem grænseværdier skulle undersøges i den forbindelse:

$$\textbf{C} \;\; \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(e^x + 1\right)$$

$$\textbf{D} \;\; \lim_{x\to 0} \cos(x)\cdot \ln(x^2)$$

$$\textbf{E} \;\; \lim_{x\to 0} x^2 \cdot e^{1/x^2}$$

$$\textbf{F} \;\; \lim_{x\to 0} \left(\cos(x) - 1\right)\cdot e^{1/x^2}$$

$$\textbf{G} \;\; \lim_{x\to 0} \left(x^2 + 1\right)\cdot e^{1/x^2}$$

Af de fem grænseværdier har de tre værdien uendelig (**C**, **E** og **G**) mens to (**D** og **F**) har værdien minus uendelig.

De fem grænseværdier er alle af et produkt af to funktioner, og disse to funktioners egenskaber angiver grænseværdiens *type* og bestemmer dens værdi. Det langsigtede mål med forløbet er at eleverne sættes i stand til at genkende typerne ligesom de gerne skulle blive i stand til at udføre et argument for hvorfor grænseværdierne har den værdi de har. De fem grænseværdier **C** til **G** er alle af typen *k* ·± ∞ (udtrykkene **C**, **D** og **G**) samt typen *0* ·± ∞ (udtrykkene **E** og **F**).

I løbet af undersøgelsen udfylder eleverne et skema svarende til tabel 1. Dette giver et udmærket overblik over de fem grænseværdier.

	f(x)	$f_1(x)$	$f_2(x)$	*lim* $f_1(x)$	*lim* $f_2(x)$	*lim* $f_1(x)f_2(x)$
C	$\frac{1}{x^2}\left(e^x+1\right)$	$\frac{1}{x^2}$	$\left(e^x+1\right)$	∞	2	∞
D	$\cos(x)\cdot\ln(x^2)$	$\cos(x)$	$\ln(x^2)$	1	-∞	-∞
E	$x^2\cdot e^{1/x^2}$	x^2	e^{1/x^2}	0	∞	∞
F	$\left(\cos(x)-1\right)\cdot e^{1/x^2}$	$\left(\cos(x)-1\right)$	e^{1/x^2}	0	∞	-∞
G	$\left(x^2+1\right)\cdot e^{1/x^2}$	$\left(x^2+1\right)$	e^{1/x^2}	1	∞	∞

Tabel 1. *Når lommeregneren anvendes til at udforske en matematisk problemstilling, kan resultaterne med fordel organiseres i et skema. Her er opgaven at finde et mønster, og i den efterfølgende diskussion vil skemaet danne et naturligt udgangspunkt.*

Eleverne anvender deres lommeregner til at udfylde skemaet og finder at der indgår en komponent med grænseværdi plus/minus uendelig i alle udtryk.

Skemaet rummer en masse potentiale i forbindelse med at starte en diskussion omkring uendelig. At *-1*·∞ = -∞ (udtryk **D**) virker umiddelbart rimeligt, og tilsvarende gør sig gældende for udtryk **G**, mens *2*·∞ = ∞ (udtryk **C**) er mere vanskeligt at forstå.

Grænseværdierne **E** og **F** vil umiddelbart give anledning til en del forvirring og gjorde det også da jeg testede mit forløb på en 2. g-klasse i februar og marts 2007. Den følgende beskrivelse af undervisningssituationen er baseret på lydoptagelser og observationsnoter fra timen.

Tidligere havde eleverne lært at når et tal multipliceres med nul, bliver resultatet nul. De blev derfor ganske forvirrede da resultatet af det (tilsyneladende) samme regnestykke – nul gange uendelig – blev plus hhv. minus uendelig. De konkluderede noget tvivlende at uendelig på en eller anden lumsk måde måtte være stærkere end nul, men var stadig ganske forvirrede. Det blev ikke bedre da de blev bedt om at undersøge endnu en grænseværdi på samme måde som de havde gjort med de fem tidligere:

$$\textbf{H}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x^2}$$

Grænseværdi **H** har værdien 0 og er også af typen $0 \cdot \pm \infty$, så nu havde eleverne grænseværdier af typen $0 \cdot \pm \infty$ med værdien minus uendelig, nul og plus uendelig. På dette tidspunkt var forvirringen nærmest total, eksemplificeret ved en frustreret elevs udbrud *"Nej, nu bliver det simpelthen for mærkeligt!"*

Efter at der var blevet skabt ro i klassen, blev der samlet op på de seks grænseværdier. De blev inddelt i de to typer $k \cdot \pm \infty$ og $0 \cdot \pm \infty$, og i tråd med min idé omkring senere at indføre formelle matematiske metoder lærte eleverne at bevise hvorfor grænseværdier af den første type har værdien plus/minus uendelig.

Udgangspunktet for det formelle bevis var et *"Hvis John er høj, og Allan er højere, så er Allan også høj"*-princip som eleverne umiddelbart tog til sig og anvendte til at vurdere udtrykkene nedad hhv. opad til noget de lettere kunne overskue og bestemme værdien af.

Forvirringen vedrørende typen $0 \cdot \pm \infty$ gav senere anledning til en diskussion vedrørende relativ væksthastighed. Klassen havde ikke tidligere beskæftiget sig med dette, men eleverne var for en stor dels vedkommende i stand til at indse at eksponentialfunktioner dominerer polynomier, og eleverne accepterede at man skulle passe på når man arbejder med uendelighed. Dette var netop en af mine vigtigste pointer i forbindelse med mit forløb.

Perspektivering

De to undervisningssituationer som jeg har beskrevet, er begge funderet i *Teorien om Didaktiske Situationer*, ofte forkortet TDS (Brousseau, 1997). Inden for TDS er skellet mellem *personlig* og *officiel* viden helt centralt. Når en elev tilegner sig ny viden, sker det gennem en kompliceret proces hvor eleven først *personliggør* den officielle matematiske viden. Her er det op til læreren at etablere et undervisningsmiljø som er særligt favorabelt for og støtter elevens personliggørelse af den officielle viden. Efterfølgende *institutionaliseres* den viden eleven har tilegnet sig, og også her spiller læreren en central rolle (Winsløw, 2006).

Personliggørelsen af den matematiske viden er helt central. Man kan ikke starte med at institutionalisere – så får eleverne kun en overfladisk forståelse af problemfeltet, og de glemmer hurtigt hvad de har lært. Modsat giver en høj grad af personliggjort viden en dybere forståelse ligesom eleverne har lettere ved at huske hvad de har lært.

Især i det sidste af de to eksempler beskrevet ovenfor er fokusset på personliggørelsen. Ved at få eleverne til at undersøge visse grænseværdier selv, støttet af deres lommeregner, styrkes personliggørelsesprocessen ligesom det er tilfældet når eleverne bedes formulere hypoteser omkring hvorfor de fem grænseværdier **C** til **G** har værdien plus/minus uendelig.

Som omtalt tidligere (jf. figur 1) er symbolske lommeregnere en medvirkende årsag til at en eksperimentel tilgang til flere matematiske emner bliver mulig. Det er oplagt at en eksperimentel tilgang støtter personliggørelse af den matematiske viden, og således kan lommeregnere og andre CAS-værktøjer i høj grad anvendes til at støtte elevernes tilegnelse af viden inden for et (nyt) matematisk emne.

Men også i det første eksempel (sammenligning af to grænseværdier) er der tale om en høj grad af personliggørelse. En relativt lang fase med uformel diskussion tillader alle eleverne at være med et langt stykke af vejen. Det er ikke sikkert at de alle kan gennemskue løsningen på nogle af de problemer der identificeres, men de bør alle kunne tage del i den fælles undren som gerne skulle opstå som følge af diskussionen af forskellen på de to grænseværdier.

I begge tilfælde munder de indledende uformelle øvelser ud i formelle matematiske argumenter. Disse argumenter må nødvendigvis tage deres udspring i læreren da stoffet er for kompliceret til at eleverne helt på egen hånd kan gennemføre de formelle argumenter. Læreren som hidtil primært har haft ansvaret for at styre ordet og systematisere elevernes uformelle refleksioner, sørger løbende for at samle hovedpointerne fra elevernes arbejde sammen, og med dem som udgangspunkt etableres til sidst den officielle (fælles) viden. Ved at bruge elevernes personlige viden som udgangspunkt for den officielle sikres elevernes ejerskab over for matematikken og den tilegnede viden.

Dog skal man også være opmærksom på at der er en hel del problemer forbundet med at anvende lommeregneren. Som nævnt i indledningen er nogle lærere imod CAS-brug, og ud over at det kræver en hel del tid at lære eleverne at bruge deres lommeregner, er der også andre problemer forbundet dermed. Flere af disse er behandlet i Winsløw (2003) – blandt andet den såkaldte *black box*-effekt. Lommeregneren indtager rollen som en magisk kasse som man putter noget ind i hvorefter den giver et svar. Problemet er at der ikke er nogen mulighed for at se de metoder, mellemregninger, sætninger osv. som bringes i spil.

I mit speciale søgte jeg at udnytte *black box*-effekten til min egen fordel. Eleverne vidste en smule, men ikke meget om grænseværdier, og ved at bruge lommeregneren til at bestemme værdien af en række omhyggeligt udtænkte grænseværdier etableredes en række uformelle *kendskaber* som svarede til den formelle matematiske definition af grænseværdier (det var i det mindste planen). De uformelle kendskaber støttes løbende af formelle metoder og *kundskaber* for at sikre et passende højt matematisk niveau.

Denne strategi kan med fordel anvendes inden for flere matematiske områder end bare grænseværdier. Differentiation og integration er oplagte emner – her kan lommeregneren også anvendes til at behandle et datamateriale og udlede nogle formler for så til sidst (med læreren som central medspiller) at bevise at de faktisk er korrekte.

Konklusion

Således nærmer vi os vejs ende. I artiklen har jeg præsenteret et par af de fordele der er ved at anvende lommeregneren i den daglige matematikundervisning i gymnasiet, men som inden for harmonikaundervisning er det i høj grad op til den enkelte lærers temperament hvilken rolle lommeregneren skal/bør spille.

I eksemplerne har jeg skitseret to undervisningssituationer hvor lommeregnerne spiller en central rolle. Begge undervisningssituationer er funderet i TDS og tager udgangspunkt i at eleverne skal have mulighed for i høj grad at personliggøre den tilsigtede viden. Det er min overbevisning at lommeregnerens anvendelsesmuligheder i den forbindelse er gode, ligesom elevernes it- og hjælpemiddelkompetence opøves. Således taler meget for en øget anvendelse af symbolske lommeregnere på de niveauer af gymnasieundervisningen hvor sådanne anvendes.

Bemærk dog at når harmonikaeleverne har lært at spille med grundbas, følger træning i melodibas som er en forudsætning for at eleverne kan udvikle deres spil til et højere niveau, frem mod "rigtig" musik. Og det samme er nødvendigt i matematikken: Når de grundlæggende færdigheder og kendskaber er på plads, må en formalisering og institutionalisering af elevernes viden nødvendigvis følge. Som matematiklærere bliver vi nødt til at stå fast på at matematik er mere og andet end en overfladisk beskrivelse af situationer og problemer – kun sådan gør vi det muligt for vores elever til sidst at lave "rigtig" matematik.

Referencer

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Bekendtgørelse om uddannelse til studentereksamen. BEK nr. 1348 af 15. december 2004. Bilag 35 og 36.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies of Mathematics, 18*, s. 371-397. D. Reidel Publishing Co.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in conceptualized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, s. 281-307. Dordrecht: Kluwer.

Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools, with different effects. I: D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (red.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators – Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*, s. 137-162. Springer.

Winsløw, C. (2003). Semiotic and discursive variables in CAS-based didactic engineering. *Educational Studies in Mathematics, 52*, s. 271-288. Dordrecht: Kluwer.

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske Elementer – En indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Frederiksberg: Biofolia.