Fra overbevis til bevis

H.C. Thomsen, Frederiksberg Gymnasium

Kommentar til artiklen "Kursusundervisning og løsningsprocesser i universitetsmatematik: En kamp mellem 'stort' og 'småt'" i MONA, 2007(2)

Stine Timmermann (ST) beskriver en form for undervisning som giver mindelser om min egen universitetsundervisning for ca. 40 år siden. I de mange år har i hvert fald gymnasiematematikundervisningen flyttet sig fra den beskrevne DSB-matematik-undervisning (Definition-Sætning-Bevis).

For at studerende skal kunne forstå indholdet af beviser og indse *nødvendigheden* af beviser, skal dette trænes i den gymnasiale undervisning. Det er på det gymnasiale niveau at faget matematik udvikler sig fra at være et kundskabs- og færdighedsfag til også at være et videnskabsfag. Her udvider fagets genstandsfelt sig fra det konkrete til også at omfatte det abstrakte. Og hvor de der undervises, med stx-bekendtgørelsens ord gennemgår en "... udvikling fra elev til studerende".

Thorsens sætning og hvad der siden fulgte

Min første årgang på gymnasiet, en mat-fys-klasse i 2. g, var lige gået i gang med infinitesimalregning (som i ST's artikel, men på det indledende niveau selvfølgelig).

Jeg underviste efter "Kristensen & Rindung", så det gik grundigt over stok og sten. Vi var nået til at skulle bevise: Lad en kontinuert reel funktion være givet på et interval. I dette interval antager funktionen både en negativ og en positiv værdi. Da må funktionen også antage værdien 0 i intervallet (min oversættelse til dansk efter hukommelsen). Da jeg havde formuleret dette og tegnet lidt på tavlen, gik en af eleverne, Kim Thorsen, i luften og udbrød: "Hvis du går i gang med at bevise det der, så melder jeg mig ud!" Knægten havde jo fat i det rigtige. Vi havde alt hvad vi skulle bruge til at *indse* at det måtte forholde sig som sætningen påstod – det var altså ikke *nødvendigt* at bevise den.

Et par sæsoner efter gik det op for mig at hvis elever skulle *forstå* (fx) Rolles sætning, så skulle de selv bevise den. Fra bogen hed det blot: Lad f være en reel funktion defineret på et interval (a,b). Lad f(a) = f(b) = 0. Hvis f er kontinuert i det lukkede og differentiabel i det åbne interval, så har grafen en vandret tangent et sted i intervallet (min oversættelse). Det viste sig for øvrigt at eleverne – efter at have dyrket begreberne kontinuitet og differentiabilitet – selv kunne indse at differentialregningens middelværdisætning *måtte* gælde. På vejen frem til et bevis for denne sætning kom de selv på alle de finurligheder som blev listet op i (bogens udgave af) sætningens præmisser. Når eleverne sad og arbejdede, kunne følgende samtale høres:

Elev1: Det er da klart at den har et maksimum.
Elev2: Ja, eller minimum – eller begge dele.
Elev3 Jo, men hvad nu hvis den går op i en spids?
Elev1: Så siger vi bare den skal være differentiabel.
Osv., osv.

Oplevelser som de to nævnte har fået mig til i al matematikundervisning at operere med "Fra overbevis til bevis".

For at elever skal indse nødvendighed af visse beviser, skal de have set nogle (for dem) indlysende sandheder som er falske, og nogle (for dem) indlysende sandheder som endnu ikke har kunnet bevises. De skal også have fået fortalt at matematikere arbejder på en helt anden måde end DSB, og at matematikere laver fejl, gætter forkert osv.

Seneste eksempel fra min praksis er fra 1.a i sidste skoleår. 1.a var den klasse som bestemt ikke havde valgt gymnasiet for at få matematik. I et alment studieforberedende forløb med fagene musik og matematik om pythagoræerne regnede og gættede eleverne sig frem til hvordan man kunne konstruere pythagoræiske talsæt – uden den store hjælp fra mig.

Pythagoræiske talsæt er tripler af naturlige tal (a,b,c), hvor tallene a, b og c opfylder $a^2 + b^2 = c^2$. Man kan godt gennemskue at hvis man har et talsæt f.eks. (3,4,5), så kan man lave uendeligt mange flere ved bare at gange op: (6,8,10), (9,12,15) osv. Men det der så kommer som den store overraskelse, er at selv om man derved har fundet uendeligt mange, så er der alligevel nogle man ikke har med. F.eks. vil (5,12,13) ikke blive fundet blandt de førnævnte uendeligt mange, og dette nye talsæt vil igen være ophav til uendeligt mange – som så heller ikke giver alle de mulige osv. osv.

Eleverne helmede ikke før de havde lavet en "maskine" som kunne give *alle* de pythagoræiske talsæt. Især holdt de meget af at kunne sige: "Her har vi så – igen – uendeligt mange; men er der flere?" Disse elever har fået et kig ind til det som er særegent for matematik, nemlig uendelighedsbegrebet.

Bevisets stilling i reformgymnasiet

I stx-bekendtgørelsen står bl.a. om matematikundervisningen på de tre niveauer:

C) eksperimenterende, induktivt
B) eksperimenterende og nødvendighed af "bevis"
A) eksperimenterende og deduktive forløb

Kommentarer

For at give lærere og elever inspiration har Undervisningsministeriet og Matematiklærerforeningen haft nedsat en arbejdsgruppe som i denne sommer har færdiggjort et kompendium med idéer til eksperimenterende forløb.

Elever der efter reformen kommer ud af gymnasiet som studerende og begynder at læse fx matematik, vil have en god chance for at overleve den i artiklen beskrevne undervisning. Men sådanne elever vil formentlig (forhåbentlig) tage skeen i egen hånd og indse hvilke beviser der er *nødvendige*, og kunne skelne mellem “stort” og “småt”.