# SOS-projektet – didaktisk modellering af et sammenhængsproblem

*Morten Blomhøj, IMFUFA, Institut for Natur, Systemer og Modeller, RUC*
*Tomas Højgaard Jensen, Institut for Curriculumforskning, Danmarks Pædagogiske Universitetsskole*

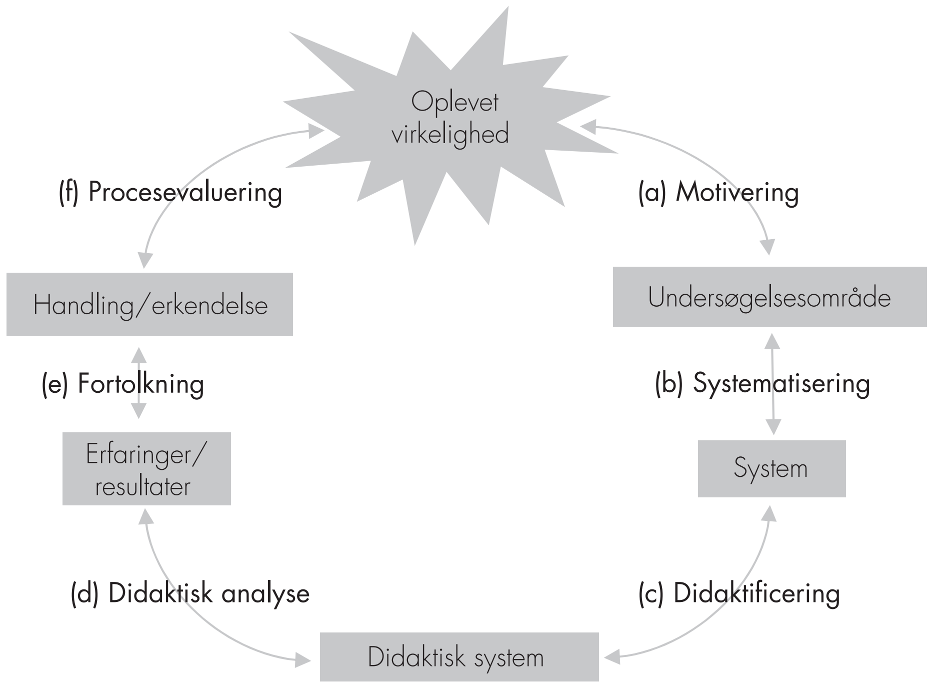
*Artiklen beretter om og analyserer det såkaldte SOS-projekt, hvor matematiklærere fra grundskolen, gymnasiet og læreruddannelsen har samarbejdet med matematikdidaktiske forskere om at undersøge og afhjælpe nogle af de udfordringer som danske elever møder i matematik ved overgangen fra grundskole til gymnasium. I projektet har vi identificeret og afgrænset matematisk symbolbehandlingskompetence som væsentlig ved denne overgang. Undersøgelsens kerne var derfor at udvikle og afprøve forløb der kunne støtte udviklingen af symbolbehandlingskompetence på 9. klassetrin. Erfaringerne viser at det er muligt at udvikle og gennemføre sådanne forløb og at gøre eleverne bevidste om kompetencen. I projektet har vi eksperimenteret med didaktisk modellering som metode med henblik på at skabe sammenhæng mellem de overordnede mål- og begrundelsesdiskussioner i forhold til konkrete undervisningsforløb og mere konkrete overvejelser om gennemførelsen heraf. I denne proces har lærernes forskellige erfaringer dannet frugtbart grundlag for formulering af fælles didaktiske ankerpositioner og for konkrete diskussioner af konstruerede undervisningsepisoder til støtte for forsøgsundervisningen. Det eksplicitte fokus på symbolbehandlingskompetence har efter lærernes egne udsagn påvirket deres undervisningspraksis ud over forsøgsundervisningen.*

## Indledning

Som matematikdidaktiske forskere blev vi i foråret 2005 bedt om at indgå i et forsknings- og udviklingsprojekt. Projektet skulle handle om kompetencebaseret tilrettelæggelse og evaluering af matematikundervisning med sigte på at skabe større sammenhæng mellem grundskolens og gymnasiets matematikundervisning. Det havde base på CVU Fyn (nu Lillebælt) under ledelse af Rikke Schultz og involverede to matematiklærere fra læreruddannelsen, Erik Bilsted og John Schou (CVU Lillebælt), to lærere fra gymnasiet, Peter Allan Nielsen og Kristian Krægpøth (Odense Tekniske Gymnasium), og to grundskolelærere, Susanne Nielson (Marie Jørgensens Skole) og Jette Kliver (Tingkærskolen).

## Didaktisk modellering som metode

Foruden at være en beretning om og analyse af dette projekt er sigtet med artiklen at præsentere og diskutere en metode til forskningsbaseret udvikling af en undervisningspraksis. Metoden betegner vi didaktisk modellering, og fremstillingen i artiklen følger faserne i den didaktiske modelleringsproces som vi karakteriserer den, jf. figur 1.




*Figur 1. En model af den didaktiske modelleringsproces.*

Didaktisk modellering er vores betegnelse for en systematisk, forskningsbaseret og reflekteret udvikling af en undervisningspraksis. Som nogle læsere nok vil opdage, er modellen stærkt inspireret af vores model af en matematisk modelleringsproces (Blomhøj & Jensen, 2007). Med den cykliske figur og dobbeltpilene mellem de seks faser i processen ønsker vi at tydeliggøre det refleksive i pædagogiske udviklingsprocesser. Figuren repræsenterer logikken i udviklingsprocessen og ikke nødvendigvis det tidsmæssige forløb.

## Den didaktiske modellering i SOS-projektet

Ofte ligger fokus i udviklingsprojekter på at udvikle og afprøve nye undervisningselementer uden at tiltagene er eksplicit motiveret i en oplevelse af problemer i en eksisterende praksis. Faserne motivering (a) og systematisering (b) handler netop om at etablere en sådan sammenhæng, og systematiseringen indebærer en afgrænsning og fokusering på en påtrængende didaktisk problemstilling. I SOS-projektet førte disse faser til en nærmere bestemmelse af matematisk symbolbehandlingskompetence (fremover for nemheds skyld blot benævnt symbolbehandlingskompetence) og til en tese om at denne kompetence er væsentlig for sammenhængen i matematikundervisningen fra grundskolen til de gymnasiale uddannelser.

Det er ofte vanskeligt at skelne mellem de bærende matematikfaglige og didaktiske ideer og den konkrete implementering i en forsøgsundervisning, og følgelig bliver det vanskeligt at analysere undervisningen i forhold til den didaktiske problemstilling. Det er pointen med didaktificeringen (c) at gøre de mange didaktiske valg der ligger forud for en forsøgsundervisning, så klare at kritik og justering bliver mulig. Didaktisk modellering tydeliggør at det er det didaktiske system der er genstand for analyse, ikke den konkrete forsøgsundervisning. I SOS-projektet handlede didaktificeringen om at udvikle undervisningsforløb der var tænkt til at støtte elevers udvikling af de forskellige elementer i symbolbehandlingskompetence. For at gøre projektgruppens diskussioner om forsøgsundervisningen så konkrete som muligt konstruerede vi tænkte dialoger mellem lærer og elever i tilknytning til udvalgte opgaver.

Forsøgsundervisning kan være et glimrende middel til didaktisk analyse (d), men erfaringer og resultater herfra skal fortolkes (e) i forhold til det didaktiske system. I SOS-projektet skete det primært gennem observation og analyse af elevernes arbejde med udvalgte opgaver i forbindelse med forsøgsundervisningen.

Endelig må det baseres på en samlet evaluering af processen (f) i hele det didaktiske modelleringsforløb om resultaterne skal give anledning til ændringer i en bestemt undervisningspraksis eller i fortolkningen af praksis, som så igen kan motivere nye udviklingsprojekter. SOS-projektet har ført til at de involverede lærere ifølge egne udsagn har ændret deres undervisningspraksis i retning af et mere eksplicit fokus på symbolbehandlingskompetence. Om forsøgsundervisningen eller den efterfølgende ændrede praksis har betydet at de involverede elever har klaret sig bedre eller oplevet en mere sammenhængende overgang i deres skoleforløb end det ellers ville havet været tilfældet, kan projektet imidlertid ikke belyse.

## Motivering

I udgangspunktet var SOS-projektet motiveret af et generelt ønske om at skabe bedre sammenhæng mellem matematikfaget i grundskolen og gymnasiet. Matematiklærere i gymnasiet oplever ofte at elever der fik gode karakter i folkeskolen og til afgangsprøven, ryger betydeligt ned af karakterskalaen når de starter i gymnasiet. Mange gymnasielærere udtrykker ofte frustration over at de i 1. g er nødt til at undervise på et væsentligt lavere niveau end forudsat i deres læreplaner. Sådanne erfaringer har givet anledning til betydelig "nedadsparkning" i systemet, sådan at matematiklærerne i grundskolen ofte bliver kritiseret for ikke at "levere varen".

I ansøgningen til Undervisningsministeriets Puljemidler, der udstak rammerne for projektets økonomi i dets treårige levetid fra 2005 til 2007, var den grundlæggende idé at man gennem kompetencebeskrivelser af matematikundervisning i grundskolen og i gymnasiet og tilhørende kompetencebaseret evaluering af elevernes læring kunne opnå større gensidig klarhed over de forskellige krav der åbenbart stilles til eleverne i de to systemer, og videre at man på dette grundlag kunne fremme elevernes kompetenceudvikling i 9. klasse med henblik på at lette overgangen til gymnasiet (Schultz, 2005).

## Systematisering

Den videre afgrænsning af problemfeltet tog afsæt i følgende arbejdshypotese som var en del af projektansøgningen (jf. Schultz, 2005, som afsnittet her rummer lettere redigerede uddrag af):

> I folkeskolen er der i særlig grad fokus på udviklingen af elevernes problemløsningskompetence, mens matematiklærerne i gymnasieskolen især efterspørger elevernes tankegangs- og ræsonnementskompetence. Denne forskel kan være begrundet i lærernes forskellige forforståelse af faget matematik.

Som det første konkrete arbejde efter at projektansøgningen var imødekommet, blev opgaver fra folkeskolens afgangsprøve efter 9. klasse analyseret med henblik på at dokumentere en sådan forskel. Resultatet blev imidlertid et andet, nemlig:

- At problemløsnings- og ræsonnementskompetencen var lige efterspurgte i de to uddannelsesformer, men at opgaveformuleringerne var meget forskellige. Hvor folkeskolens opgaver var formuleret med tydelig reference til hverdagssituationer, var gymnasiets opgaver formuleret på en måde der stillede store krav til elevernes symbol- og formalismekompetence.
- At opgaveformuleringerne ikke tydeligt angav hvilke kompetencer opgavestilleren efterlyste i opgaveløsningen. Dette gjaldt for begge uddannelser.

Denne erfaring gjorde at interessen skiftede fra deskriptivt at analysere andres opgaveformuleringer til normativt selv at forsøge at udarbejde opgaver med et særligt kompetencefokus og analysere elevbesvarelser heraf. Et centralt element heri bestod i at fem elever fra hver af de to grundskolelæreres arbejdsplads, Marie Jørgensens Skole og Tingkærskolen, stillede op til en ekstra prøve efter de havde været til folkeskolens afgangsprøve i matematik i maj 2005. Alle 10 elever havde søgt optagelse på et gymnasium pr. august 2005.

Lærerne fra teknisk gymnasium analyserede opgaverne fra afgangsprøven og fandt at især symbol- og formalismekompetencen og ræsonnementskompetencen var svagt repræsenteret, og den ekstra prøve eleverne flinkt stillede op til, bestod derfor af 17 opgaver som især udfordrede disse kompetencer. I analysen af elevernes besvarelser af denne prøve skriver de to gymnasielærere:

> På den baggrund synes det relevant også at kigge på symbol- og formalismekompetencen i projektet fremover – måske er det en forudsætning at have en vis symbol- og formalismekompetence for overhovedet at udvikle ræsonnementskompetencen?
>
> At læse og forstå lærebøgerne er imidlertid ikke de eneste problemer eleverne har ved overgangen til gymnasiet. Der er også problemer ved selve problembehandlingen. Det kan skyldes manglende symbol- og formalismekompetence. Eleverne har måske ikke de værktøjer i form af matematisk sprog og matematiske symboler, som skal til for at gøre rede for deres problembehandling. (Schultz, 2005, s. 6)

## Matematisk symbolbehandlingskompetence som det centrale

På det efterfølgende projektseminar sidst i maj 2005, som var vores debut i projektet, blev fokus ændret så den planlagte forsøgsundervisning med opstart et par måneder senere nu skulle have udvikling af elevernes symbolbehandlingskompetence som hovedsigte. Ved samme lejlighed blev projektet døbt SOS-projektet som akronym for "Symbolbehandlingskompetence Og Sammenhængsproblemer i matematikundervisningen".

Det nye fokus var nemt at enes om fordi de øvrige projektdeltageres ovenfor refererede erfaringer fra først i projektets levetid harmonerede med vores generelle interesse for udvikling af elevers symbolbehandlingskompetence. Desuden indeholder forskningslitteraturen mange analyser af hvor svært elever over hele verden har det med symbolerne i matematikundervisningen (se fx Sutherland, 2001).

Baggrunden og motivationen for det valgte projektfokus forsøgte vi i projektgruppen at indkredse ved at formulere denne teoretiske forståelse af projektets problemfelt:

- Aktivt at kunne forstå, manipulere og selvstændigt anvende symboler er centralt i matematikfaget både i skole og gymnasium. Det er en forudsætning for matematiklæring generelt og for udvikling af vigtige kompetencer som problemløsning og modellering.
- Folkeskolens afgangsprøve tester kun en snæver del af symbolbehandlingskompetencen og giver derfor ikke et godt grundlag for at vurdere hvordan eleverne står i forhold til de udfordringer de møder i gymnasiet.
- Kompetencen tages implicit som forudsætning i gymnasiets matematikundervisning.

- Eleverne har vanskeligt ved at overføre deres symbolbehandlingskompetence fra skole til gymnasium, og kompetencen volder mange elever problemer i gymnasiet.

I tilknytning hertil formulerede vi følgende forskningsspørgsmål:

*Hvordan kan man karakterisere, udvikle og evaluere symbolbehandlingskompetence i matematikundervisningen i grundskole, gymnasium og læreruddannelse?*

*Hvilke typer af potentialer og vanskeligheder viser sig i en konkret undervisning på 9. klassetrin der forsøger at udvikle og evaluere symbolbehandlingskompetence?*

Med det nye fokus blev første skridt i det videre arbejde at indkredse hvad vi i projektgruppen forstod ved symbolbehandlingskompetence. Med kraftig inspiration fra KOM-rapportens karakteristik af symbol- og formalismekompetence (Niss & Jensen, 2002, s. 58) nåede vi frem til denne karakteristik:

*Matematisk symbolbehandlingskompetence* betegner nogens indsigtsfulde parathed til både *selv at gennemføre og forholde sig kritisk undersøgende til* at

- *afkode* symbol- og formelsprog
- *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog
- *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler

Denne karakteristik viste sig at kunne fungere konstruktivt styrende for de efterfølgende faser i den didaktiske modellering hvilket nok primært skyldes to forhold. For det første er karakteristikken fri af reference til et bestemt matematisk stof og har derfor et stort "gyldighedsområde". For det andet er karakteristikken kort og "spidst" formuleret med fremhævelse af tre centrale forhold med hver deres "huskeord" tilknyttet. Det gør den brugbar som analytisk ramme, også når man ikke sidder med blyanten spidset ved skrivebordet, men står midt i en hektisk undervisnings-, observations- eller evalueringssituation.

## Et flerdimensionelt syn på progression og evaluering

SOS-projektet var ud over en interesse for kompetencebeskrivelser også "født" med et andet begreb i fokus: evaluering – eller mere præcist: evaluering af kompetencer. Også her blev vi kraftigt inspireret af KOM-rapporten (ibid., s. 64f). Afsættet er forståelsen af begrebet "*kompetence*", som vi bruger som betegnelse for *nogens indsigtsfulde* *parathed til at handle på en måde, der lever op til udfordringerne i en given situation* (Jensen, 2007a). Med det udgangspunkt er der mindst tre dimensioner i karakteristikken af en persons besiddelse af en kompetence:

- *Dækningsgrad*: En kompetences dækningsgrad hos en person bestemmes af i hvor høj grad de *aspekter* som karakteriserer kompetencen, er dækket hos den pågældende, dvs. hvor mange af disse aspekter personen kan aktivere i forskellige foreliggende situationer, og med hvor høj grad af autonomi aktiveringen kan ske.
- *Aktionsradius*: En kompetences aktionsradius hos en person udgøres af det spektrum af *sammenhænge og situationer* personen kan aktivere kompetencen i.
- *Teknisk niveau*: En kompetences tekniske niveau hos en person bestemmes af hvor *begrebsligt og teknisk avancerede* sagsforhold og værktøjer personen kan aktivere den pågældende kompetence over for.

Inden for denne tredimensionelle model er kompetencebesiddelse repræsenteret ved et volumen, og progression består i at gøre dette volumen større ved at udvikle kompetencebesiddelsen langs en eller flere af de tre dimensioner. Ad den vej inviterer faglige kompetencebeskrivelser som undervisningens omdrejningspunkt således til *et flerdimensionelt syn på progression og evaluering*.

## Didaktificering

De fælles diskussioner hørende til de første to faser af den didaktiske modellering har været en væsentlig forudsætning for skabelsen af et fælles udviklingsprojekt hvor alle de involverede lærere har kunnet danne egne motiver knyttet til udvikling af deres undervisningspraksis. Vi ser lærernes medejerskab af udviklingsprojektet som en nødvendig forudsætning for realisering af en hensigtsmæssig forsøgsundervisning, men ingenlunde som en tilstrækkelig betingelse. Der er stadig langt fra en afklaret fælles opfattelse af symbolbehandlingskompetence og dens betydning for sammenhængen mellem og progressionen i matematikundervisningen i grundskolen og gymnasiet og til tilrettelæggelse og gennemførelse af en hensigtsmæssig forsøgsundervisning på 9. klassetrin.

### Didaktiske ankerpositioner

Det er et centralt element i didaktisk modellering at mindske denne afstand gennem en systematisk og reflekteret didaktificering. I projektet opstillede vi som et første skridt i denne proces følgende fire didaktiske ankerpositioner (Niss & Jensen, 2002, s.127-129):

1. Symbolhandlingskompetence skal tydeliggøres for eleverne som et af de centrale mål for deres læring.
2. Elevernes begrebsforståelse skal udvikles før træning af de tilhørende færdigheder.
3. Undervisningen skal udfordre eleverne i forhold til hele kompetencens dækningsgrad som den er karakteriseret i projektet.
4. Eleverne skal evalueres i forhold til hele kompetencen, og elevernes metarefleksion skal støttes af evaluering og fremmes gennem dialog.

Positionerne har lidt forskelligt ophav og karakter. Position 1 blev formuleret dels ud fra grundskolelærernes behov for at kunne forklare forsøgsundervisningens formål for eleverne, dels ud fra en antagelse om at øget bevidsthed hos eleverne om kompetencen vil forbedre deres muligheder for at udvikle den. Et af potentialerne ved den kompetenceorienterede tilgang er at danne grundlag for elevernes metarefleksioner ved at sætte ord på de faglige mål med undervisningen på en måde der rækker ud over det emnemæssige indhold. For gymnasielærerne var det en selvstændig pointe hvis forsøgsundervisningen kunne bidrage til at eleverne fik et klarere og mere reflekteret forhold til symbolbehandlingskompetence end de sædvanligvis oplever ved starten af 1. g.

Position 2 er blandt andet baseret på en fælles oplevelse blandt matematiklærere i projektet af at en del elever ser ud til at have udviklet mentale samlinger af "huskeregler" for hvordan man skal håndtere forskellige typer af algebraisk udtryk i forskellige sammenhænge. Det udmønter sig blandt andet i at disse elever opererer med separate regler for "flytning" af led med forskelligt fortegn og for faktorer der skal ganges eller divideres med når de "flyttes" over på den anden side af lighedstegnet i en ligning. Eleverne har tilsyneladende ikke indordnet "flyttereglerne" i en forståelse af ligningsbegrebet og af tilladte operationer på ligninger. Det viser sig meget tydeligt når den algebraiske kompleksitet stiger, og når eleverne stilles over for udfordringer der er bare en anelse forskellige fra de standardeksempler de er trænet i at løse. Sådanne oplevelser tyder på at nogle af de elever der starter i gymnasiet, har udviklet en form for instrumentel læring i forhold til symbolbehandling (Mellin Olsen, 1977, s. 110, og Skemp, 1978). Det var tanken bag position 2 at en sådan uhensigtsmæssig instrumentalisme bør imødegås ved fra starten at adressere de centrale forståelsesmæssige udfordringer når nye begreber introduceres i undervisningen. Der er således her tale om at anvende kompetencetilgangen som læringsværktøj. Hvis faglig forståelse og indsigt skal udvikles *forud for* og sideløbende med og ikke *gennem* træning af færdigheder, bliver det afgørende for læreren at kunne udfordre eleverne til selv at være aktive i forhold til alle elementer i kompetencen og at kunne tale med eleverne om kompetencen i relation til deres aktiviteter. Det bør i her nævnes at vi i projektet kunne bygge på en fælles opfattelse af læring som en personlig konstruktion af mening og forståelse baseret på egne handlinger og medieret af kommunikation og socialt samspil.

Position 3 er formuleret direkte i forlængelse af tænkningen i KOM-projektet (Niss & Jensen, 2002, kap. 9) og blev i projektet diskuteret i forhold til den valgte karakteristik af symbolbehandlingskompetence.

Position 4 skal naturligvis også ses i forhold til projektets fokus på symbolbehandlingskompetence og tænkningen i KOM-projektet. De tre dimensioner af kompetencen blev diskuteret indgående i forhold til konkrete opgaver. Positionen viser et fælles ønske i projektet om at evaluere elevernes udbytte af forsøgsundervisningen i forhold til alle tre dimensioner og ikke næsten udelukkende i forhold til det tekniske niveau, som vi har indtryk af det ofte er tilfældet i matematikundervisningen (Jensen, 2007a og 2007b). Endvidere var det et væsentligt sigte at evalueringen skulle fremme elevernes kommunikationskompetence og støtte deres metarefleksion i forhold til kompetencen.

Ankerpositionerne var tænkt som støtte for udvikling og gennemførelse af forsøgsundervisning. Det blev imidlertid klart at såvel det overordnede fokus på symbolbehandlingskompetence som de fire ankerpositioner fik mere gennemgribende indflydelse på matematikundervisningen i de to forsøgsklasser.

## Valg af fagligt indhold

Det næste vigtige skridt i didaktificeringen var valg af fagligt indhold. Fælles diskussioner i projektgruppen førte til valget af de faglige emner variable, funktioner, ligninger og matematisk modellering.

Forskellige typer af overvejelser gjorde sig gældende her. Der var pragmatiske overvejelser i forhold til indarbejdning af forsøgsundervisningen i årsplanerne for forsøgsklasserne. Emnerne funktioner, ligninger og rentesregning spiller en central rolle på 9. klassetrin, og det var derfor ønskeligt for grundskolelærerne hvis forsøgsundervisningen kunne bidrage til behandlingen af disse områder.

Desuden var lærernes erfaringer med hvor "skoen trykker" i forhold til elevernes symbolbehandlingskompetence, i høj grad knyttet til ligninger og funktioner. Erfaringsmæssigt volder disse emner vanskeligheder for mange elever i både grundskolen og gymnasiet. Det gælder både i forhold til at udføre hensigtsmæssige algebraiske manipulationer ved løsning af ligninger, i forhold til at fortolke en funktion givet ved en ligning mellem to variable i en forelagt problemsituation, funktionens egenskaber eller dens grafiske repræsentationer samt i forhold til selv at opstille ligninger og funktioner – et billede der bekræftes af forsøgselevernes besvarelse af det tidligere omtalte opgavesæt.

Fra den matematikdidaktiske forskning er der omfattende evidens for at en væsentlig ingrediens i de vanskeligheder eleverne oplever i forbindelse med disse emner, er manglende forståelse af variabelbegrebet (Kieran, 2007). Ved ligningsløsning forudsætter meningsfulde algebraiske manipulationer en grundlæggende forståelse af en ligning som et bånd mellem nogle tal (og/eller parametre repræsenteret ved bogstaver) og én eller flere variable tilhørende en given grundmængde (repræsenteret ved andre bogstaver). Og forståelse og anvendelse af funktionsbegrebet forudsætter måske endnu tydeligere et veludviklet variabelbegreb der tillader at man kan operere med variable som selvstændige objekter.

I forhold til elevernes læringsproces er det imidlertid netop gennem arbejdet med ligninger og funktioner at eleverne har mulighed for at udvikle deres forståelse af variabelbegrebet. Der er således her tale om et didaktisk dilemma der kan ses som et eksempel på det som Anna Sfard (1991, s. 31) fremhæver som et generelt træk ved dannelsen af matematiske begreber, og som hun betegner "den onde cirkel".

Denne problemstilling blev grundigt diskuteret i projektgruppen. Lærerne fra alle tre uddannelsesniveauer genkendte elevers og studerendes vanskeligheder med variabelbegrebet, og selv om vurderingen var at hverken grundskolens eller gymnasiets matematikundervisning traditionelt har gjort variabelbegrebet til genstand for selvstændig behandling, blev det udpeget som et centralt emne i forsøgsundervisningen.

Arbejdet med at opstille, analysere og kritisere simple matematiske modeller blev i projektet opfattet som en måde at evaluere og videreudvikle elevernes symbolbehandlingskompetence på som handleberedskab i forhold til nye problemsituationer. Samtidig er modellering et fagligt område af selvstændig betydning ved overgangen til gymnasiet. Det blev derfor besluttet at forsøgsundervisningen skulle omfatte modelleringsforløb der kunne teste og udfordre elevernes symbolbehandlingskompetence ved slutningen af deres 9.-klasse-forløb.

Foruden de faglige emner var der også udtalt interesse blandt lærerne for at lade forsøgsundervisningen omfatte arbejde med regneark. Det er i høj grad en relevant faglig kompetence ved overgangen til en gymnasial matematikundervisning at kunne anvende regneark. Samtidig giver regnearket mulighed for eksperimenterende undervisningsaktiviteter. Regnearkets repræsentation af variable ved hjælp af celler kan endvidere – rigtigt anvendt – støtte elevernes dannelse af et matematisk begreb om variable. Regnearket giver mulighed for at sammenholde forskellige repræsentationer af funktioner og danner dermed grundlag for at forstå og fortolke algebraiske udtryk. Elever kan selv opstille og undersøge funktionsudtryk og herunder fx komme til klarhed over forskellen på variable, parametre og tal i funktionsudtryk. Omvendt er det oplagt at brug af regneark kan føre til at læreprocessen for nogle elever afspores, enten på grund af overdreven fascination af eller vanskeligheder ved den tekniske instrumentering af regnearket.

## Konstruktion af episoder

Det var imidlertid klart at grundskolelærerne havde brug for yderligere støtte til den konkrete planlægning af forsøgsundervisningen og til gennem dialog at udfordre og evaluere elevernes symbolbehandlingskompetence. Vi besluttede derfor at konstruere og diskutere fiktive undervisningsepisoder for elevernes arbejde med udvalgte opgaver. Metoden "konstruktion af episoder" er udviklet af Morten Blomhøj (2006) som en metode til analyse af læringsmæssige potentialer i en eksisterende undervisningspraksis. Den indgår endvidere i Ole Skovsmoses (2006, s. 267) karakterisering af pædagogisk udforskning. I SOS-projektet fungerede metoden mere normativt ved at konkretisere og give kød og blod til hvad vi i projektgruppen opfattede som eksemplariske undervisningssituationer i forhold til udvikling af symbolbehandlingskompetence.

I udgangspunktet gik vores ambition på at alle i projektgruppen skulle prøve at konstruere episoder inspireret af erfaringer fra egen undervisning. Generelt viste dette arbejde sig imidlertid for vanskeligt og for tidskrævende for lærerne. Kun en af dem, John Schou, udviklede episoder som ud over at fungere som SOS-inspirationsmateriale også blev brugt i hans egen undervisning på læreruddannelsen (resultaterne herfra formidles i en senere publikation). Herudover blev det vores opgave at udvikle episoder til udspænding af kompetencen i evalueringsøjemed og til konkret inspiration for lærernes samspil med eleverne i undervisningen.

Diskussionen af episoderne i projektgruppen spillede efter lærernes egne udsagn en vigtig rolle i deres forberedelse og gennemførelse af forsøgsundervisningen. Det skyldtes ikke mindst at de fungerede godt som en "mur" at spille bolden op ad i forbindelse med den formative evaluering af elevernes læring.

Til illustration af hvad vi mener, giver vi her et eksempel på en konstrueret episode udviklet med henblik på at inspirere forsøgsundervisningen. I episoden diskuterer eleverne Anna og Bob med hinanden og deres lærer med udgangspunkt i følgende opgave:

**Opgave 1:**
a. Undersøg sammenhængen mellem antallet at trin og antallet af klodser i "pyramidetrappen". Hvor mange klodser skal der bruges til en trappe med 10 trin?
b. Prøv at lave en formel for den trinvise udvikling af følgen. Indtast formlen i jeres regneark og kontroller jeres resultater.
c. Prøv om I kan opstille et funktionsudtryk der direkte angiver hvor mange klodser der skal bruges til en dobbelttrappe med n trin. Det kan være en fordel at udnytte jeres erfaringer fra en af de tidligere opgaver. Indtast formlen i jeres regneark og kontroller jeres resultater.
(Opgaven er videreudviklet fra Matematrix 8 (Gregersen et al., 2001, s. 33))

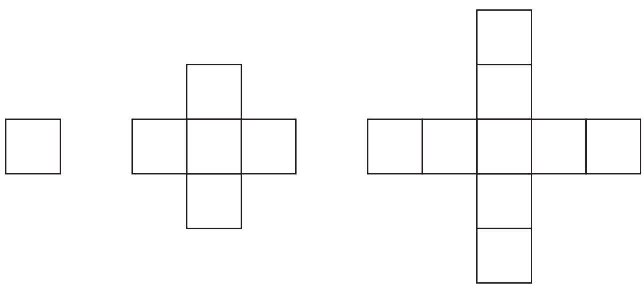
L: Hvad laver I?
A: Opgave 1.
L: Den med trappepyramiden?
B: Ja, den er lidt svær.
L: Har I prøvet at lave en tabel over hvor mange klodser der skal bruges til en trappe med forskellige antal trin?
A: Nej, ikke endnu. Vi kan ikke rigtig komme i gang.
L: Hvad hvis der skal være nul trin på trappen?
B: Nul trin?
L: Ja, nul trin.
B: Så er der jo ingen trappe.
L: Ja, det er rigtigt. Hvor mange klodser skal der så bruges?
A: Nul klodser (lidt tvivlende).
L: Ja, nul. Det er rigtigt. Hvad så med ét trin?
B: Så skal der vel bruges én klods.
L: Ja, nemlig. Så har I to tal til jeres tabel. Prøv om I kan finde ud af hvordan det så udvikler sig.

Læreren går og kommer tilbage efter nogle minutter. Eleverne har lavet denne tabel:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trin | 0 | 1 | 2 | 3 | | | |
| Klodser | 0 | 1 | 6 | 15 | | | |

L: Hvordan går det?
A: Der skal bruges 6 til to trin og 15 – mener vi – til tre trin.
L: Det skal nok passe. Kan I se systemet?
B: Nej, ikke rigtigt.
L: Så prøv at tage den med tre trin, og tegn de tre lag hver for sig som de ser ud set fra oven.

Efter nogle minutter har eleverne tegnet de tre lag:



L: Det er fint. Hvor mange klodser er der så i hvert af de tre lag?

B: 1, 5 og 9.

L: Ja, og hvad så i det næste lag?

A: Der må være 4 gange 3 plus 1. Det er 13.

L: Det er helt rigtigt. Hvordan ser du det?

A: Der er 4 rækker med 3 og så den i midten.

L: Så kan I sikkert også lave en formel der viser hvor mange klodser der er i det i'te lag? I kan kalde antallet af klodser i det i'te lag for $L_i$.

B: Det må være $4 \cdot i + 1$.

L: Prøv om den passer for det tredje lag, altså med $i = 3$ ?

B: $4 \cdot 3 + 1$. Det er jo 13. Det passer ikke.

L: Nej, det gør det ikke. Hvordan kan det være?

A: Det er det næste lag. Det fjerde lag har 13 klodser.

L: Ja, hvad er der så galt med formlen?

B: $L_{i+1} = 4i + 1$

L: Ja, det er nemlig helt rigtigt. Kan I så også opstille en formel for den trinvise udvikling af hvor mange klodser der skal bruges til hele trappepyramiden? Hvis vi siger vi kender antallet af klodser i trappen med i lag og kalder det for $a_i$ – hvor mange er der så i trappen med $i$+1 lag? Prøv først at sige det med ord.

A: Dem der er i forvejen, plus det nye lag.

L: Ja, netop. Kan I også skrive det som en formel?

B: $a_{i+1} = a_i + 4i + 1$

L: Prøv om den virker. Og så kan I taste den ind i jeres regneark.

Læreren kommer tilbage til eleverne efter at de har indtastet formlen i deres regneark og kopieret formlen op til i = 20. Efter at have rost eleverne udfordrer læreren dem videre i forhold til spørgsmål (c) i opgaven. Eleverne når i episoden frem til at opstille et funktionsudtryk for antallet af klodser i trappepyramiden:

$$p(n) = n^2 + \frac{2(n-1)n}{2} = 2n^2 - n$$

Under udnyttelse af et resultat fra en tidligere opgave kan de desuden genfortolke resultatet som to dobbelttrapper med hver $n^2$ klodser minus et n-tårn.

Episoden er tænkt som illustration af højt niveau hvad angår både teknisk niveau og dækningsgrad, det sidste dog i mindre grad med hensyn til det aspekt af symbolbehandlingskompetence der handler om at "behandle" (manipulere) med symbolholdige udsagn. Aktionsradius bliver ikke illustreret i episoden da det hele vejen igennem handler om at beskrive talmønstret i udviklingen af en "trappepyramide". Konteksten varieres således ikke i episoden.

Selv om det er det "høje niveau" af symbolbehandlingskompetence der illustreres, er det alligevel et gennemgående træk i episoden at eleverne ser ud til at have brug for støtte fra dialogen med læreren i de afgørende matematiseringsskridt. Dette afspejler at der er tale om en ret avanceret udøvelse af symbolbehandlingskompetence.

I episoden er der flere eksempler på at eleverne er gode til at anvende forskellige repræsentationsformer og fortolke dem i forhold til det problem de arbejder med. Det drejer sig om tabellen, tegningen af lagene i pyramiden, udtrykket for antal klodser i det i'te lag, udtrykket for den trinvise udvikling, funktionsudtrykket for antallet af klodser i en pyramide med n lag og regnearksrepræsentationerne af de to sidstnævnte udtryk. Eleverne udviser også ved flere lejligheder kontrol af deres resultater og fremgangsmåde – noget som er karakteristisk for avanceret problemløsning.

I to tilfælde er det læreren der foreslår en matematisk notation: betegnelsen $L_i$ for antallet af klodser i det i'te lag og $p(n)$ for antallet af klodser i en pyramide med n trin. I begge tilfælde tager eleverne umiddelbart notationen til sig og bruger den selvstændigt. Specielt anvender eleverne selv udtrykket for $L_{i+1}$ til at opstille et udtryk for den trinvise udvikling i antallet af klodser. I forhold til udtrykket for $p(n)$ får eleverne selv opstillet udtrykket, og de er også i stand til at manipulere med udtrykket. Elever foretager således afkodning af symboludtryk og oversættelse mellem forskellige repræsentationsformer på højt niveau.

Ved et tilbageblik på lærerens rolle i dialogen kan man måske mene at læreren kunne have været mere tilbageholdende med sin støtte til eleverne – måske kunne eleverne være kommet igennem med mindre hjælp. På den anden side er en så høj grad af selvstændighed og beherskelse af symbolbehandlingskompetence nok næppe realistisk i grundskolens matematikundervisning, og derfor måske mindre relevant som udspænding af kompetencen og som forberedelse af forsøgsundervisningen.

## Didaktisk analyse

Gennem ovenstående indholdsbestemmelse og tilhørende fælles diskussioner i projektgruppen fik vi etableret et didaktisk system (jf. figur 1) i betydningen: en konkret og begrundet forestilling om undervisningsforløb på 9. klassetrin der kan forventes at bidrage til udvikling af elevernes symbolbehandlingskompetence som så i næste instans – jævnfør analyserne i de to indledende faser (a) og (b) af den didaktiske modellering – formodes at kunne bidrage til øget sammenhæng mellem grundskolens og gymnasiets matematikundervisning.

Den didaktiske analyse retter sig mod det didaktiske system. I SOS-projektet valgte vi at analysere forsøgsundervisning på 9. klassetrin der søger at realisere det didaktiske system. Vi gennemførte endvidere en opfølgende spørgeskemaundersøgelse blandt de tidligere elever i forsøgsklasserne. Resultaterne herfra formidles i en senere publikation og indgår ikke i denne didaktiske analyse.

For at få et mere kvalitativt indblik i hvordan eleverne oplevede symbolbehandlingskompetence i forsøgsundervisningen og i deres efterfølgende gymnasiale matematikundervisning, interviewede vi tre af de i alt 16 elever fra forsøgsklasserne der fortsatte på en gymnasial uddannelse.

Forsøgsundervisningen omfattede et efterårs- og et forårsforløb i hver af de to 9.-klasser. Hvert af disse fire forløb strakte sig over 8-10 moduler a 90 minutter. Af ressourcemæssige grunde blev alle forløbene ikke systematisk dokumenteret. I forhold til didaktisk modellering som metode foreligger der imidlertid samlet set et righoldigt materiale til analyse af det didaktiske system. Derimod giver projektet ikke grundlag for at bedømme effekten af forsøgsundervisningen på elevernes læring eller på deres oplevelse af overgangen til gymnasiet. Det ville kræve et helt andet projektdesign som blandt andet skulle omfatte mange flere forsøgsklasser.

## Forløbene på Tingkærskolen

*Det første forløb* på Tingkærskolen havde fokus på variabelbegrebet og ligninger samt på symbolbehandlingskompetence som eksplicit genstand for elevernes opmærksomhed. Der blev fortrinsvis arbejdet med kapitlerne Variable i Matematrix 7 og Ligninger i Matematrix 8 (Gregersen et al., 2001, Jensen et al., 2004). Forløbet blev afsluttet med et gruppearbejde om talfølger med udgangspunkt i et tema om pyramider fra Matematrix 8 (s. 32-33).

Forløbet blev dokumenteret med videooptagelser og referat af de første fem (ud af i alt ti) moduler. Herfra er udvalgte episoder transskriberet og analyseret ud fra elevernes brug og forståelse af variabelbegrebet og ud fra den tredelte karakteristik af symbolbehandlingskompetence: afkodning, oversættelse og manipulation. Alle disse data findes på SOS-projektets hjemmeside, der i skrivende stund ikke har fået en endelig adresse og derfor må lokaliseres via omtalen af projektet på www.dpu.dk/om/thje.

Forløbet blev vurderet som meget vellykket af både læreren og den forsker der deltog som observatør og sparringspartner. Eleverne blev bevidste om indholdet og relevansen af symbolbehandlingskompetence, og de udviklede som helhed en ifølge læreren usædvanlig god forståelse af begreberne "variabel" og "ligning". Disse succesoplevelser giver anledning til at fremhæve tre forhold vedrørende tilrettelæggelsen af forløbet som efter vores vurdering bidrog til at gøre det vellykket, og som derfor fremadrettet er værd at være bevidst om.

*For det første* blev eleverne – som det bl.a. fremgår af videoklippene – udfordret på et relevant niveau i forhold til alle aspekter af symbolbehandlingskompetence som karakteriseret i didaktificeringen.

*For det andet* blev tyren taget ved hornene med hensyn til hvordan arbejdet med variable indplaceres i undervisningen, ved at forløbet blev indledt med at sætte spot på variabel som begreb. Det fik nogle tiører til at falde hos eleverne i en sådan grad at læreren flere gange undervejs valgte at give eleverne mere tid til denne del af forløbet på bekostning af arbejdet med lignings- og funktionsbegrebet som omdrejningspunkt. Da klassen endelig nåede hertil, viste det sig desuden at gå meget lettere end læreren var vant til, fordi eleverne i arbejdet med ligninger og funktioner kunne trække på en god forståelse af variabelbegrebet.

*For det tredje* blev tilrettelæggelsen af forløbet lagt tæt op ad et lærebogsforløb baseret på de samme grundideer som undervisningsforløbet: stor vægt på symbolbehandlingskompetence og arbejde med variabelbegrebet som grundlag for en dybere forståelse af og et mere intensivt arbejde med lignings- og funktionsbegrebet. Se separat boks med eksempler på de opgaver der blev anvendt.

Ulempen ved denne tilrettelæggelsesform var at lærerens autonomi selvfølgelig fik dårligere udviklingsmuligheder end i et mere åbent setup, men det var tydeligt at det dobbelt uvante ved at fokusere på variabelbegrebet og symbolbehandlingskompetence blev håndterbart for læreren i kraft af denne præ-strukturering at støtte sig til.

**Eksempler på opgaver som i forsøgsundervisningen på Tingkærskolen blev brugt til at udfordre forskellige elementer i besiddelsen af matematisk symbolbehandlingskompetence**

(Opgaverne er fra lærebøgerne Matematrix 7-9 (Gregersen et al., 2001, Jensen et al., 2002 og 2004)).

*Dækningsgrad – afkodning*

Matematrix 7, s. 18: I en judoklub for børn er der D drenge, P piger, T trænere og L ledere. Hvad betyder følgende formler?

| | | |
|---|---|---|
| a) $D = P$ | b) $T < L$ | c) $D = 2P$ |
| d) $P = D + 10$ | e) $T > 0$ | f) $D + P > T + L$ |
| g) $D + P + T + L = 110$ | h) $\frac{1}{2}(D + P) = 45$ | |

Matematrix 8, s. 29: Afgør om følgende påstande er sande eller falske. Du ved at r og s begge er positive tal, og at s er større end r.

| | | |
|---|---|---|
| a) $r - s > 0$ | b) $s + r > s$ | c) $s + r > 1$ |
| d) $\frac{r}{s} > 1$ | e) $\frac{s+r}{r+s} = 1$ | f) $\frac{s-r}{r-s} < 0$ |
| g) $\frac{s-r}{s} < 1$ | h) $\frac{s+r}{s} > 1$ | |

*Dækningsgrad – oversættelse*

Matematrix 7, s. 18: Opskriv formler som beskriver følgende sammenhænge:

a) Der er en træner flere end der er ledere.
b) Der er 10 drenge flere end der er piger.
c) Der er 10 gange så mange drenge som piger.
d) Der er en træner for hver 10 drenge.
e) Der er en træner for hver 10 medlemmer.
f) Der er dobbelt så mange medlemmer som der er voksne (trænere og ledere).

*Dækningsgrad – behandling*

Matematrix 8, s. 25: Sæt den størst mulige faktor uden for parentes. Det kan både være tal og bogstaver.

a) $3a + 3 \cdot 5b$ b) $4a + 22b$ c) $6d - 15c$
d) $3b - 12bd$ e) $4a + 18ab$ f) $3ab + 4ac$
g) $8cd - 20bc$ h) $6abc + 15ab$ i ) $3de - 12ef + 6df$

*Teknisk niveau*

Matematrix 8, s. 43: Et rektangels omkreds er 90 cm. Dets ene side er tre gange så lang som den anden. Find længden af rektanglets sider.

Matematrix 9, s. 39: Angiv en formel som viser en ternings overfladeareal som funktion af:

a) sidelængden b) rumfanget

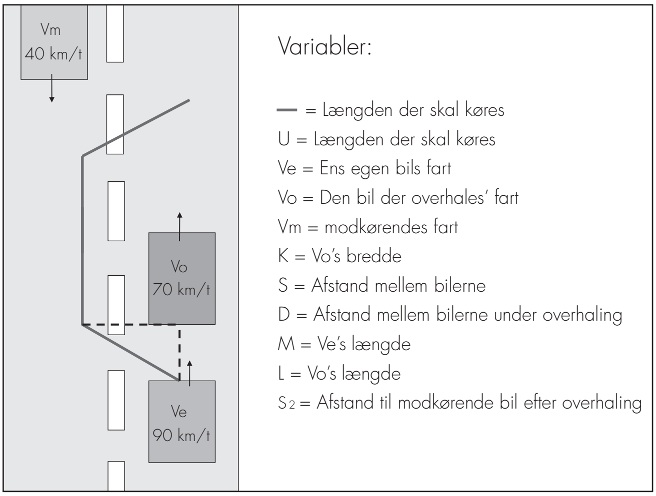
*Aktionsradius*

Her er det meningsløst med enkeltstående eksempler da aktionsradius netop handler om at kunne udfolde en kompetence i mange forskellige typer sammenhænge og situationer.

*Det andet forløb* på Tingkærskolen omhandlede funktioner og rentesregning (5 moduler) samt en projektdag (3 moduler) hvor eleverne arbejdede med modellering. Ved projektdagen arbejdede eleverne i mindre grupper med problemstillinger fra kapitlet "Matematisk modellering" fra Matematrix 9 (Jensen et al., 2002) og med undersøgelsesoplæggene bagest i samme bog.

Fra dette forløb foreligger der kun videooptagelser af projektdagen, og der er ikke foretaget transskriptioner. To af gruppernes arbejde med henholdsvis opgaven "Hvor langt fremme ad vejen skal der være fri bane, før man kan overhale sikkert?" (Matematrix 9, s. 17) og en undersøgelse om skatteberegning ("Hvad er sammenhængen mellem den indkomst man har, og den skat man betaler?", jf. Matematrix 9, s. 168-169) er imidlertid dokumenteret med regneark og for overhalingsgruppens vedkommende med en PowerPoint-præsentation gruppen lavede. Begge disse grupper må vurderes at have anvendt symbolbehandlingskompetence på højt niveau.

Figur 2 viser hvordan eleverne i arbejdet med overhalingsopgaven selv har skullet indføre en række symboler, hvilket er et element af symbolbehandlingskompetence der efter vores vurdering sjældent udfordres.




*Figur 2. Viser dele af hvordan en gruppe har modelleret overhalingsproblemet. I et tilhørende regneark har gruppen opstillet en formel der kan beregne hvor langt fremme der skal være fri bane for sikker overhaling ved indtastning af værdier for alle øvrige indgående størrelser.*

## Forløbene på Marie Jørgensens Skole

*Det første forløb* af ti moduler fokuserede på talfølger og funktionsbegrebet. Eleverne arbejdede med tre forskellige former for oplæg: først "pyramideopgaverne" fra Matematrix 8 (Gregersen et al., 2001, s. 33) i en let bearbejdet form der lagde vægt på en trinvis beskrivelse af talfølgernes udvikling, så talfølger som de selv gruppevis skulle finde på og udfordre andre grupper med, og til sidst opgaver om at bruge ligninger og funktionsudtryk som matematiske modeller, fx omhandlende vandforbrug ved brusebad.

Forløbet blev for de fleste modulers vedkommende dokumenteret ved at en af gymnasielærerne og en af forskerne fungerede som deltagende observatører. Erfaringerne herfra blev diskuteret undervejs i forløbet og indgik dermed som grundlag for lærerens løbende justering heraf.

Eleverne var generelt engagerede gennem hele forløbet. Mange af dem havde imidlertid vanskeligt ved at anvende en hensigtsmæssig symbolsk notation hvilket blev tolket som en indikation på et behov hos nogle elever for en mere systematisk indføring i notationer og symbolbehandling.

*Det andet forløb* på Marie Jørgensens Skole havde karakter af et projektarbejde. Gruppevis fik eleverne mulighed for selv at vælge hvilket emne de ville arbejde med, under den forudsætning at de skulle udføre et forsøg eller på anden måde indsamle data som kunne sammenholdes med en matematisk model. De valgte emner blev: Alkoholforbrænding (to grupper), Den hoppende bold, Konditest, Kost og Ernæring.

Forløbet blev observeret og dokumenteret på samme måde som det første forløb, suppleret med videooptagelser af de to sidste moduler i forløbet. Disse optagelser giver et indtryk af gruppernes arbejde, men giver ikke grundlag for transskription til dokumentation af elevernes brug af symbolbehandlingskompetence.

Der var meget stor forskel på kvaliteten og relevansen af gruppernes arbejde. "Boldgruppen" lavede en meget avanceret forsøgsopstilling til videooptagelse med dataopsamling på computer, og det lykkedes gruppen at opstille en matematisk model i regneark som kunne reproducere målinger for bolde af forskellig størrelse. Der var her tale om brug af symbolbehandlingskompetence på højt niveau både med hensyn til teknisk niveau og dækningsgrad. "Alkoholgrupperne" fik kun indsamlet få data for udviklingen af alkoholpromillen som funktion af tiden efter indtagelse af 2 øl per forsøgsperson, og de fik brugt politiets formel til beregning af den forventede alkoholpromille. Der var imidlertid tale om meget beskeden anvendelse af symbolbehandlingskompetence. De to andre grupper fik også kun i ringe grad brugt symbolbehandling i deres projekter.

Generelt var forløbet nok for ambitiøst i forventningen til at eleverne kunne styre et mindre projektforløb med fastholdelse af symbolbehandlingskompetence som mål, hvilket reelt var det udfordringen til dem bestod i.

## Interview med tre af forsøgseleverne

De opfølgende interviews med tre elever blev gennemført da de var halvvejs gennem 1. g på en gymnasial uddannelse. De omkring 45 minutter lange interviews blev optaget på video, og der blev lavet et kort referat med udvalgte citater af elevernes svar på de enkelte spørgsmål (se SOS-projektets hjemmeside, der som nævnt kan findes via www.dpu.dk/om/thje).

To af eleverne oplevede de nye faglige udfordringer i gymnasiet som spændende. De klarede sig godt og havde valgt matematik på A-niveau. Den tredje elev havde oplevet matematikundervisningen i grundforløbet som meget krævende og havde nu matematik på C-niveau.

Alle tre elever oplevede at symbolbehandling spiller en central rolle i matematikundervisningen på gymnasiet, og at det er endnu vigtigere at kunne manipulere med og fortolke symboludtryk i gymnasiet end i grundskolen.

Det var gennemgående at eleverne kunne huske væsentlige elementer fra forsøgsundervisningen, og de to fagligt stærke elever udtrykker et bevidst forhold til symbolbehandlingskompetence:

> Det vi lavede i 9. klasse med selv at opstille formler og bruge symboler, tror jeg har hjulpet mig i gymnasiet, men det er jo svært at vide hvordan man har lært noget.

> I gymnasiet arbejder vi hele tiden med symboler. Vi løser altid ligningerne symbolsk inden vi sætter tal ind. Selvom det er forskelligt fra 9. klasse, synes jeg ikke det er specielt svært. Jeg er rimelig nem at overbevise om at man lige så godt kan regne med bogstaver som med tal.

Under interviewene blev eleverne udfordret med konkrete opgaver i forhold til alle tre aspekter af symbolbehandlingskompetence, hvilket resulterede i dokumentation af besiddelse af kompetencen på tre forskellige niveauer: ekvilibristisk, sikker og usikker. Forskellen i kompetencebesiddelse hvad angår manipulation med symboler, var meget iøjnefaldende. Den usikre elev var således ikke i stand til at isolere b af formlen: $b\cos(A)=c$ , mens de to andre var sikre i at opstille og manipulere med udtryk som $K_{n+1}=K_n+rK_n=(1+r)K_n$ og $K_n=K_0(1+r)^n$ for fast forrentning af en kapital – i øvrigt et eksempel som de to elever selv gav til illustration af trinvis udvikling.

Alle tre interviewede elever kunne – den usikre med betydelig støtte – opstille både en formel for den trinvise udvikling i og et funktionsudtryk for antallet af klodser i en pyramidetrappe, og alle tre gav udtryk for at de kunne huske at have arbejdet med symboludtryk for trinvis udvikling af talfølger i 9. klasse. Den ene elev refererede selv til den "fede oplevelse" det havde været selv at udlede et funktionsudtryk for pyramidetrappen i forløbet i 9. klasse. Tilsyneladende er det selv at havde lavet en formel og kontrollere at den virker, noget der sætter sig markante spor i hukommelsen.

## Fortolkning

Den didaktiske analyse har givet grundlag for konkret at vurdere mulighederne for at gennemføre undervisningsforløb med et eksplicit fokus på symbolbehandlingskompetence med støtte i den gennemførte didaktificering. Herved dannes også et grundlag for kritik og videreudvikling af didaktificeringen. Den didaktiske analyse giver også – om end i mindre grad – grundlag for at vurdere vilkårene for at formidle indholdet og betydningen af symbolbehandlingskompetence til eleverne og fremme elevernes udvikling heraf. Det er klart at en mere omfattende opfølgende interviewundersøgelse ville havet givet et betydeligt bedre grundlag for en sådan vurdering.

Det skal understreges at vi i SOS-projektgruppen i høj grad anskuede det overordnede problemfelt om sammenhæng mellem grundskolens og gymnasiets matematikundervisning som en didaktisk udfordring for begge uddannelsestrin. Når vi valgte kun at gennemføre egentlig forsøgsundervisning og tilhørende didaktisk analyse på 9. klassetrin, var det på grund af ressourcemæssige begrænsninger. Selv om den konkrete didaktificering var rettet mod udvikling af undervisningsforløb til 9. klassetrin, var det et væsentligt element i projektet at både seminarielærerne og gymnasielærerne medvirkede i hele den didaktiske modelleringsproces, herunder forsøgsundervisningen.

For gymnasielærernes vedkommende har projektet givet anledning til øget fokus på at støtte elevernes udvikling af symbolbehandlingskompetence i deres egen undervisning. Som et vigtigt element heri fremhæver gymnasielærerne specielt analysen af hvad symbolbehandlingskompetence kan omfatte på 9. klassetrin og i gymnasiet, samt arbejdet med at udvikle undervisningsoplæg og opgaver ud fra et kompetenceperspektiv.

Seminarielærerne havde naturligt en interesse i den samlede didaktiske modelleringsproces der ligger tættest på et matematikdidaktisk forskningsperspektiv. Mere specifikt er en kompetenceorienteret tilgang til matematikundervisning i sig selv særdeles relevant som indhold i læreruddannelsen. Metodisk set er brugen af "konstruktion af episoder" et oplagt didaktisk virkemiddel til dels at støtte de lærerstuderendes udvikling af en didaktisk fantasi i forhold til samspillet med eleverne, dels til at etablere et fælles udgangspunkt for diskussion af det faglige og didaktiske indhold i en konkret undervisningssituation.

Det har imidlertid ikke været sigtet med denne artikel at give en nærmere belysning af udbyttet af projektet i forhold til gymnasiet og læreruddannelsen. Som perspektiv på didaktisk modellering som metode er det imidlertid en pointe at man på grundlag af de samme indledende faser som i SOS-projektet kunne have foretaget andre former for didaktisk analyse. Det kunne fx dreje sig om tilrettelæggelse af forsøgsundervisning målrettet gymnasiets eller læreruddannelsens matematikundervisning eller om analyser som slet ikke havde forsøgsundervisning som omdrejningspunkt, men fokuserede på fortsatte teoretiske analyser ud fra forskellige positioner.

Sammenfattende giver den didaktiske modellering i SOS-projektet anledning til at fremhæve følgende forhold:

- Arbejde med både afkodning, oversættelse og symbolbehandling som elementer i symbolbehandlingskompetence kan kvalificere både lærere og elevers beskæfti-

gelse med symboler i matematikundervisningen, ikke mindst ved at udgøre et for alle parter meningsfuldt perspektiv på dette arbejde.
- Et sådant "bredspektret" kompetenceperspektiv kan støttes gennem opmærksomhed på dækningsgrad som en af flere dimensioner i besiddelsen af en kompetence.
- De kvalificeringsmæssige potentialer ved at arbejde med alle aspekter af symbolbehandlingskompetence drejer sig både om tilrettelæggelse, gennemførelse og formativ evaluering af undervisningen.
- Den summative evaluering af elevernes læring er derimod ikke blevet kvalificeret af det brede og flerdimensionelle kompetenceperspektiv på matematikundervisningen, snarere tværtimod. Ved at arbejde indgående med den formative evaluering er den summative evaluerings begrænsninger blevet tydeliggjort uden at det har ligget inden for dette projekts rammer at arbejde med dette skisma.
- Der er et stort potentiale i at gøre forståelsen af variabelbegrebet til omdrejningspunkt for udvikling af symbolbehandlingskompetence i matematikundervisningen.
- Eksplicit opmærksomhed på udvikling af symbolbehandlingskompetence med variabelbegrebet som omdrejningspunkt kan virke både motiverende og udfordrende på lærere i grundskolen og gymnasiet. Motiverende fordi det italesætter og konkretiserer nogle allerede eksisterende ambitioner hos matematiklæreren, udfordrende fordi man bliver forpligtet på disse ambitioner når først de er italesat, og – ikke mindst – fordi det er uvant.
- Konstruktion af episoder i matematikundervisningen kan i den forbindelse af lærere opleves som et refleksionsværktøj det er vanskeligt at deltage i udviklingen af, men som er nyttigt at bruge, ikke mindst hvis konstruktionerne foretaget af andre ledsages af diskussioner om deres relevans og anvendelse.

Overordnet bestyrker erfaringerne fra SOS-projektet tesen om at kravene til elevernes symbolbehandlingskompetence er kvalitativt forskellige i grundskole og gymnasium, og at denne forskellighed er væsentlig for hvordan eleverne oplever overgangen. Projektet har bevirket at lærerne i både grundskolen og gymnasiet efter egne udsagn fokuserer meget mere eksplicit på symbolbehandlingskompetence i deres undervisning end tidligere, fordi deres oplevelse er at en sådan fokusering giver god mening i forhold til elevernes vanskeligheder. Inden for projektets rammer er det imidlertid ikke muligt at vurdere om forsøgsundervisningen har bevirket at de berørte elever klarer sig bedre og/eller oplever bedre sammenhæng i matematikundervisningen ved overgangen fra grundskole til gymnasium.

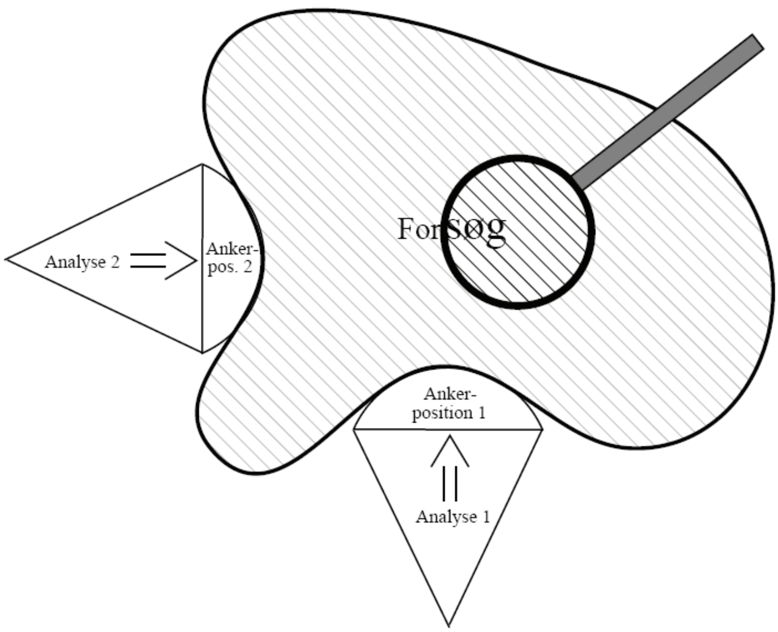
## Procesevaluering

Da vi besluttede at gå ind i SOS-projektet, var det med en eksplicit udtrykt ambition: Vi ville eksperimentere med hvordan vi kunne bidrage til at gøre det både forskningsog udviklingsmæssigt relevant og vedkommende.

Denne ambition har haft stor betydning for vores bidrag til og oplevelse af projektet, og i det følgende vil vi se tilbage på processen som helhed i lyset af vores dobbelte sigte hermed. Det vil vi gøre ved at kombinere nogle forskningsmetodiske refleksioner og fordringer (jf. Jensen, 2007a, kap. 8 og 11, som afsnittet her rummer lettere redigerede uddrag af) med vores evaluering af SOS-projektet i dette metodiske perspektiv.

## Determinismefælden og dens "omvendte"

Forsøgsbaserede undersøgelser har en cyklus som i første omgang kan deles op i faserne etablering, gennemførelse og efterbearbejdning – uanset om genstandsfeltet for forsøget er undervisning, fysik, medicin eller noget helt andet. Etableringen handler om at skabe en ramme om forsøget, herunder at beslutte sig for hvilke karakteristika – hvilke "deformeringer" af rammen – man anser som særligt vigtige i forhold til målet med forsøget. Under og efter forsøgets gennemførelse kan man så "sætte lup" på udvalgte aspekter, herunder en eventuel forbindelse tilbage til de deformeringer man omhyggeligt påførte forsøgsrammen, jf. visualiseringen af denne beskrivelse i figur 3.




*Figur 3. En visuel model af forsøgsundervisning som didaktisk virkemiddel (Jensen, 2007a, s. 177).*

Etablerings- og efterbearbejdningsfaserne inviterer til det man med reference til forsøgets gennemførelse kan kalde henholdsvis præ- og post-analyse. Metodisk set spiller de en vidt forskellig rolle: Præ-analysen *danner grundlag* for etableringen af forsøgsrammerne mens post-analysen handler om *konsekvenserne af* disse rammer.

Denne forskellighed gør at man skal passe på ikke at falde i *determinismefælden*, som vi bruger som betegnelse for det at arbejde ud fra en hypotese om at der analytisk set kan sættes implikationstegn fra teoretiske studier af undervisning til det læringsmæssige udbytte af at deltage heri. I forhold til det at gennemføre forsøg svarer det til en forestilling om at man kan "diktere" bestemte (ønskede) forsøgsresultater ved at være tilstrækkeligt omhyggelig med præ-analysen. Det er nok en rimelig ambition af have inden for visse dele af eksperimentel fysik og medicin, men med fokus rettet mod en så "uregerlig" og indeterministisk størrelse som undervisning er det en naiv og fordummende tilgang til både videnskab og mere konkret udviklingsarbejde.

*Den "omvendte" determinismefælde* handler om at overse de metodiske begrænsninger ved post-analysen af forsøgsresultaterne. Fokus er her rettet mod dels at forstå de resultater som forsøget har genereret, dels at identificere på hvilken måde og i hvilken grad disse resultater er et resultat af forsøgsrammens karakteristika. Motivationen for at det er netop disse karakteristika forsøget er underlagt, er derimod ikke en del af post-analysen. En forståelse heraf udgør en selvstændig og epistemologisk set uafhængig del af præ-analysen, hvilket er vigtigt at være opmærksom på for at undgå analytiske "kortslutninger". Hvis man – jf. figur 3 – med "luppen" i hånden er på udkig efter konsekvenserne af nogle påførte deformeringer af en forsøgsramme, kan man ikke i samme ombæring dissekere de "vaffelis" som har afstedkommet disse deformeringer.

I *SOS-projektet* har en del af vores bidrag bestået i at tage disse to varianter af determinismefælden i ed. I dette perspektiv har brugen af didaktisk modellering som metode af flere grunde været en ubetinget succes.

*For det første* har faseopdelingen af et forsknings- og udviklingsarbejde, som vores model af en didaktisk modelleringsproces jo er udtryk for, været en måde at *eksplicitere* på at der både er og bør være en præ- og en post-analyse i et sådant forløb. Og eksplicitering af og dermed bevidstgørelse om dette grundvilkår er i sig selv et godt udgangspunkt for at undgå at falde i determinismefældens forskellige varianter.

*For det andet* har det analytisk set været nyttigt at *detaljere* faserne i processen rundt omkring forsøgsundervisningen i forhold til den simple præ- og post-tilgang. Visualiseringen i figur 3 er god når man skal forklare dynamikken i denne proces, netop fordi sagen er simpelt stillet op, men da vi mere konkret skulle tilrettelægge en sådan proces var faseopdelingen i figur 1 et nyttigt struktureringsværktøj. Den – faseopdelingen – gjorde det muligt for os både at fastholde en ambition om at projektet i sidste ende skulle udgøre et sammenhængende hele, og at dele det op i mindre bidder når der skulle analyseres, konkluderes og rapporteres, jf. struktureringen af denne artikel og forrige afsnits fasespecifikke (og ikke-deterministiske) konklusioner.

*For det tredje* har arbejdet med didaktisk modellering synliggjort et behov for at kunne *kommunikere og diskutere* internt i SOS-projektgruppen om forholdet mellem præ-analysen og selve gennemførelsen af forsøgsundervisningen. Specielt arbejdet med didaktificering som en del af præ-analysen viste sig nyttigt i den forbindelse, med udarbejdelsen af ankerpositioner og episodekonstruktioner som det mest synlige resultat.

## Arbejdet med ankerpositioner og episodekonstruktioner

En positivt fremadrettet effekt af at være opmærksom på determinismefælden er at det bliver tydeligt hvor uundværlig læreren er som "brobygger" mellem præ-analysen af et undervisningsforløb og elevernes udbytte heraf, når man nu ikke kan forlade sig på et deterministisk forhold mellem de to. Brobygger-udfordringen gør at en god lærer bl.a. er karakteriseret ved konstant at stille to former for kritiske spørgsmål til sin egen tilrettelæggelse af undervisningen (jf. omtalen af "den gode matematiklærer" i Niss & Jensen, 2002, s. 158ff): Er den – tilrettelæggelsen – i overensstemmelse med og inspireret af forskellige mere overordnede (teoretiske) perspektiver på undervisningen af lærings- og begrundelsesmæssig karakter? Giver den observerede respons på undervisningens gennemførelse anledning til at revidere tilrettelæggelsen heraf?

Dette perspektiv på den gode lærer har været med til at forme vores arbejde i SOS-projektet. Det hænger sammen med at et af vores bagvedliggende motiver for at deltage i projektet som tidligere nævnt var at blive klogere på hvordan forskningsbaseret viden om og praksis inden for matematikundervisning kan virke gensidigt inspirerende. Den stramme fokusering på symbolbehandlingskompetence har været en væsentlig forudsætning for det forskningsmæssige udbytte af projektet.

Ville vores bidrag til projektet mon så være inspirerende for de andre i projektgruppen, der som nævnt i indledningen alle var lærere på forskellige uddannelsestrin? Ville vores perspektiver på sagen være interessante at følge og høre om – fx i artikler som denne – for lærerkolleger og andre personer involverede i matematikundervisningens organisering og tilrettelæggelse? Positive svar på disse spørgsmål troede og tror vi er betinget af at didaktificeringen dels knytter an til den eksisterende undervisningspraksis som disse personer oplever den, dels ikke forsøger at fastlægge tilrettelæggelsen ned til mindste detalje og derved gøre det svært for den enkelte at forestille sig personligt tilpassede varianter.

Med andre ord: Selv om vi havde troet på en entydig sammenhæng mellem bestemte teoretiske studier og en nøje fastlagt måde at tilrettelægge undervisningen på, ville en sådan analyse ikke være et konstruktivt bidrag til et forsknings-udviklingssamarbejde fordi det ikke stimulerer de former for refleksion som vi netop mener er med til at karakterisere den gode lærer.

Opmærksomheden på determinismefælden og ønsket om at stimulere andre deltagere i projektets tilrettelæggelsesmæssige refleksioner pegede i samme retning: Didaktificeringen skulle munde ud i nogle overordnede principper for undervisningens tilrettelæggelse som dels skulle være så konkrete at de kunne bidrage til at sikre at resultaterne af systematiseringen blev respekteret, dels så åbne at de ikke sendte det signal at der nu forelå en "opskrift" på hvordan der skulle undervises, som overflødiggjorde lærerens personliggørelse af didaktificeringen og yderligere selvstændige tilrettelæggelsesovervejelser.

Denne fordring blev delvist realiseret med "ankerpositionerne" i relation til undervisningens tilrettelæggelse, som hele projektgruppen var med til at formulere og bakke op om. Efter diskussioner i projektgruppen blev det imidlertid tydeligt at grundskolelærerne følte sig usikre på hvad ankerpositionerne mere konkret indebar. Hvordan kunne de bruge dem konstruktivt i deres arbejde med at tilrettelægge forsøgsundervisningen? Det var i dette perspektiv at de konstruerede episoder blev til, og det var i relation til denne usikkerhed at episoderne som tidligere nævnt virkede inspirerende på lærerne. De fungerende som en udfoldning af de fagdidaktiske ambitioner "på klasserumsniveau" der skaber en ikke-deterministisk forbindelse mellem præ-analysen og tilrettelæggelsen af forsøgsundervisning.

## Tidsperspektivet i forsøgsundervisningen

Det forsknings- og udviklingsmæssige sigte med SOS-projektet trak umiddelbart i hver sin retning med hensyn til forsøgsundervisningens tilrettelæggelse og omfang. Forskningsmæssigt bliver forsøgsundervisning metodisk set mest "håndterbart" hvis der er tale om så kort et forløb at man indholdsmæssigt kan fastholde et valgt fokus hele vejen igennem og ressourcemæssigt kan overkomme at analysere alle de fremkomne data i detaljer. Samtidig er disse karakteristika med til at gøre kortvarig forsøgsundervisning urealistisk snævert i et udviklingsperspektiv. Med udviklingspotentiale for øje vil det alt andet lige være hensigtsmæssigt at tilrettelægge forsøget med respekt for den kompleksitet og tidsmæssige udstrakthed som karakteriserer al undervisning, men det bevirker altså samtidig et træk i retning af forskningsmæssig "uhåndterbarhed".

Dette skisma er vi overbeviste om er en af de væsentlige årsager (de forskningsmæssige ressourcer er en anden) til at forsøgsundervisning med et langt tidsperspektiv forskningsmæssigt er underbelyst inden for matematikkens didaktik (Niss, 2001). Denne underbelysning rummer efter vores vurdering en betydelig forklaringskraft i forhold til at forstå og arbejde med det vel nok største problem inden for matematikkens didaktik: afstanden mellem den forskningsmæssige viden og den undervisningsmæssige praksis. Der er således efter vores mening gode grunde til at vælge et langt tidsperspektiv når man skal tilrettelægge forsøgsundervisning som indgår i en forskningsproces.

I SOS-projektet fandt vi et kompromis mellem de forskellige hensyn. På den ene side var rammen om forsøgsundervisningen helårlige tidsmæssigt autentiske gennemførelser af 9. klassetrin. På den anden side havde vi i projektgruppen ikke ressourcer til at være massivt til stede gennem et helt år, hvilket er baggrunden for modellen med et mere afgrænset efterårs- og forårsforløb på hver skole, som alle blev fulgt og dokumenteret så tæt som der i situationen og i forhold til SOS-projektets samlede timebudget var ressourcer til.

## Samarbejdet mellem forskere og praktikere

En af fordelene ved i udgangspunktet at medindtænkte undervisningen som helhed i et forsøg er at det imødekommer lærerens dagsorden. Ud over sin pædagogiske interesse for helheden i skoleforløbet er han/hun jo både moralsk og juridisk forpligtet på at tage hånd om det samlede undervisningsforløb lige fra opstart til den summative evaluering ved udgangen, ikke kun de enkeltelementer som man ud fra en forskningsinteresse kunne være interesseret i at kigge isoleret på og koncentrere kræfterne om.

Ved på denne vis at skabe et interessefællesskab og generelt vise imødekommenhed over for læreren som samarbejdspartner bliver det muligt at etablere den form for samarbejde mellem forsker og praktiker som Wagner (1997, s. 15) med reference til udannelsesforskning generelt kalder et *klinisk partnerskab* og karakteriserer ved følgende forhold (ibid., s. 17, vores oversættelse):

> *Fokalt forskningsspørgsmål*: Hvordan kan praktikere og forskere arbejde sammen for at forbedre viden om skolegang og praksis i skolerne?
> *Forskningsproces*: Systematisk undersøgelse tilrettelagt og rapporteret af forsker og praktiker i fællesskab.
> *Kontekst og ståsted*: Forskeren står uden for skolesystemet og er involveret i refleksion; praktikeren er inden for skolesystemet og er involveret i handling og refleksion.
> *Model til at stimulere forandring*: Forskere og praktikere gennemfører i samarbejde forskning vedrørende problemer i tilknytning til praksis for at hjælpe praktikere med at forbedre deres egen effektivitet.
> *Ekspertroller*: Forskeren er forsker og samarbejdspartner; praktikeren er praktiker og samarbejdspartner.

De valg som således ifølge Wagner karakteriserer et klinisk partnerskab – som vi vil foreslå på dansk får den mindre afskrækkende betegnelse "rollebevidst partnerskab" – svarer rigtig godt til den form for samarbejde som vi i udgangspunktet gerne ville etablere, og som efter vores vurdering også lykkedes for os i projektgruppen.

At det lykkedes, var på helt afgørende måde med til samlet set at gøre SOS-projektet til en succes. Når vi tillægger det stor betydning, skyldes det dels vores almindelige tilfredsstillelse ved godt samarbejde, dels en oplevelse af at forskning inden for matematikkens didaktik først og fremmest medvirker til forbedringer af undervisningens praksis gennem udviklingsprocesser der involverer aktiv deltagelse af lærere og administratorer.

## Referencer

Blomhøj, M. (2006b). Konstruktion af episoder som forskningsmetode – læringsmuligheder i IT-støttet matematikundervisning. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes? – om matematiklæring* (s. 228-254). København: Malling Beck.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competence? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. I: W. Blum et al. (red.), *Modelling and applications in mathematics education – The 14th ICMI-study* (s. 45-56). New York: Springer.

Gregersen, P., Jensen, K., Jensen, T.H. & Pedersen, B.B. (2001). *Matematrix 8*. København: Alinea.

Jensen, T.H. (2007a). Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt – hvorfor ikke? *IMFUFA-tekst, (458)*. Roskilde: Roskilde Universitetscenter. Ph.d.-afhandling. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Jensen, T.H. (2007b). Assessing mathematical modelling competency. I: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (red.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (s. 141-148). Chichester, UK: Horwood.

Jensen, T.H., Larsen, L.H., Pedersen, B.B. & Sonne, H. (2002). *Matematrix 9*. København: Alinea.

Jensen, T.H., Larsen, L.H., Pedersen, B.B. & Sonne, H. (2004). *Matematrix 7*. København: Alinea.

Kieran, C. (2007). Research on the learning and teaching of school algebra at the middle, secondary and college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. I: F.K. Lester Jr., *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 707-762). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mellin-Olsen, S. (1997). *Indlæring som social proces – fra Piaget til Marx*. Oslo: Gyldendal.

Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. I: J.F. Matos, W. Blum, K. Houston & S.P. Carreira (red.), *Modelling and mathematics education (ICTMA 9): Applications in science and technology* (s. 72-88). Chichester, UK: Horwood.

Niss, M. & Jensen, T.H. (red.) (2002). Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, 2002(18)*. København: Undervisningsministeriet.

Schultz, R. (red.). (2005). *Matematiske kernekompetencer i folkeskolen, i de gymnasiale uddannelser og i læreruddannelsen – 1. delrapport*. Odense: CVU Fyn.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, (22)*, s. 1-36.

Skemp, R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Arithmetic Teacher, 26(3)*, s. 9-15.

Skovsmose, O. (2006). Kritisk forskning – pædagogisk udforskning. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes?* (s. 255-272). København: Malling Beck.

Sutherland, R. et al. (red.). (2001). *Perspectives on school algebra*. Dordrecht, Holland: Kluwer.

Wagner, J. (1997). The Unavoidable Intervention of Educational Research: A Framework for Reconsidering Researcher-Practitioner Cooperation. *Educational Researcher, 26(7)*, s. 13-22.