Kursusundervisning og løsningsprocesser i universitetsmatematik: En kamp mellem "stort" og "småt"

Stine Timmermann, IMFUFA, Institut for Natur, Systemer og Modeller, RUC

På videregående universitetskurser i matematik bruger studenter en stor del af tiden på at prøve at forstå beviser i lærebøger og på selv at lære at konstruere beviser i form af løsninger til opgaver. I denne artikel præsenterer jeg et analyseværktøj der både kan bruges til at analysere en lærers gennemgang af et lærebogsbevis samt måden hvorpå studenterne selv konstruerer beviser. Analysen skelner mellem hvad der er "stort" og "småt" i beviset, det vil sige bevisets struktur, dets komponenter og detaljer, hvilket gør det muligt at forklare miskommunikationen mellem studenterne og læreren, og hvordan studenternes opmærksomhed på de forskellige bevisaspekter influerer på løsningsprocessen.

Introduktion

Den matematikdidaktiske forskning i undervisning og læring på universitetsniveau fik en seriøs saltvandsindsprøjtning med publiceringen af den siden meget refererede bog "Advanced Mathematical Thinking", redigeret af David Tall (Tall, 1991). Heri giver førende matematikdidaktiske forskere deres bud på hvordan den didaktiske forskning kan bidrage til viden omkring undervisning og læring af matematik på universitetsniveau. Siden er antallet af videnskabelige artikler på området steget betydeligt, hvor litteraturen deler sig mellem forslag til og undersøgelser af nye undervisningsmåder på den ene side og afdækning af studenters vanskeligheder med læring af forskellige konkrete matematiske emner (såsom grænseværdibegrebet) samt problemløsning (herunder også beviskonstruktion) på den anden. Studier af studerendes løsningsprocesser har vist at studenter ofte bruger betragtninger og ræsonnementer som ikke er forankret i egenskaber ved de matematiske objekter og begreber der er på banen, men derimod bygger på genkendelige og overfladiske sammenligninger med tidligere opgaver eller eksempler (Lithner, 2003). Ofte har disse strategier ikke den store succes. En ting er at studenterne ikke kan løse opgaverne, en anden og måske mere alvorlig er at de tilsyneladende træner "ikke-matematiske" strategier i en opgaveløsningssituation hvilket ikke er hensigtsmæssigt i og med at meningen med at løse opgaver er at studenterne skal øge deres matematiske viden og træne deres matematiske kompetencer. For at komme problemet til livs er det selvfølgelig nødvendigt at undersøge *hvorfor* studenter bruger disse strategier. Kan man finde belæg for at det skyldes undervisningen? Og er det egentlig muligt at relatere studenternes løsningsprocesser til undervisningen?

Denne artikel præsenterer et analytisk værktøj som kan bruges både til at analysere aspekter af undervisningen samt til at analysere studenternes løsningsprocesser. Den bagvedliggende tanke er at hvis undervisningen og løsningsprocesserne kan beskrives på samme måde, vil det give mulighed for en undersøgelse af i hvilken grad og på hvilken måde studenternes løsningsprocesser kan siges at være påvirket af den undervisning studenterne har deltaget i. En sådan undersøgelse udgør hoveddelen af mit igangværende ph.d.-projekt. I denne artikel fokuseres der på præsentationen af analyseapparatet. Undersøgelserne der skaber grundlaget for denne artikel, omhandler universitetsundervisning i matematisk analyse, den Weierstrass'ske analyse (se tekstboks 1 for yderligere oplysninger om undersøgelserne). På alle niveauer i uddannelsessystemet og inden for alle naturvidenskabelige fag er det imidlertid interessant at spørge om og undersøge sammenhængen mellem klasserumsundervisning og elevers/studerendes opgaveløsningsprocesser, og derfor vil denne artikel også have interesse for undervisere og studerende på andre niveauer og i andre fag end universitetsmatematik.

I særlig grad belyser denne artikel hvordan lærer og studerende kan gå fejl af hinanden i undervisningen. Det ene eksempel jeg giver, omhandler lærerens gennemgang af et lærebogsbevis, og her er både lærer og studerende enige om det overordnede "projekt" (studenterne skal forstå beviset), men alligevel opstår der misforståelser fordi læreren bevæger sig på et andet niveau og har en anden matematisk dagsorden end studenterne. Dernæst illustrerer jeg hvordan de samme problemstillinger kan genfindes i situationer hvor studenterne selv arbejder med stoffet, det vil sige i situationer hvor de forsøger at løse opgaver, og at dette kan forklare aspekter af studenternes løsningsprocesser.

Udvikling af et analyseredskab

På baggrund af klasserumsobservationer, observationer af opgaveløsningsprocesser samt i særlig grad interviews af læreren og studenterne (se tekstboks 1) har jeg udviklet en måde hvorpå undervisningen, med specielt fokus på bevisgennemgang, og løsningsprocesserne kan analyseres. I det følgende vil jeg præsentere ideen bag analysen, og senere i artiklen analyseres to eksempler, et fra undervisningen og et af studenternes løsningsproces.

Tekstboks 1: Fakta om det observerede kursus og undersøgelsesdesignet
Artiklen bygger på observationer foretaget på et analysekursus på et dansk universitet. På kurset blev der undervist efter lærebogen "An Introduction to Analysis" af William R. Wade (Wade, 2004). Pensum omfattede kontinuitet, differentiabilitet og integrabilitet af funktioner på de reelle tal samt tal- og funktionsfølger og tal- og funktionsrækker. Bevisførelse og beviskonstruktion blev vægtet meget højt. Denne type kursus tages normalt som det andet analysekursus i en matematikuddannelse og ligger derfor typisk på andet eller tredje semester. Der var to kursusgange om ugen, hver af tre timers varighed hvor de første 1-2 timer blev brugt på forelæsning mens den resterende tid blev brugt til "lektiecafé" hvor studenterne arbejdede alene eller i mindre grupper omkring løsning af opgaverne. Læreren var ansvarlig for begge aktiviteter, og der var ikke tilknyttet en undervisningsassistent til kurset. Kun enkelte gange blev opgaveløsninger gennemgået for den samlede klasse. 24 studerende var tilmeldt kurset.
Ud over "ikke-deltager"-observationer af forelæsningerne og studenternes opgaveløsning (Bryman, 2001) blev både læreren og studenterne interviewet omkring deres syn på og forestillinger omkring undervisning, specielt med fokus på dialogen i undervisningen samt på opgaveregning. Læreren blev derudover også interviewet omkring hans syn på indholdet i forelæsningerne, specielt med hensyn til formålet med at gennemgå beviser fra lærebogen på tavlen. 9 studerende meldte sig til at udfylde en forberedelseslogbog til hver kursusgang hvor de noterede deres tidsforbrug samt hvordan de forberedte sig.

Fra studenter-interviews fremgik det at størstedelen af studenterne oplevede at læreren fokuserede meget på "tekniske detaljer" og ikke på "konceptuelle ting". Det var ofte svært for dem at følge med når et bevis blev gennemgået på tavlen, og de oplevede et manglende overblik over pensum og sammenhæng mellem de forskellige begreber de blev introduceret til. Flere udtalte at de ville have lettere ved at løse opgaverne hvis undervisningen fokuserede mere på "det konceptuelle".

Læreren på den anden side oplevede at de studerende ikke deltog tilstrækkeligt aktivt i undervisningen, og at de derfor ikke fik nok ud af deres deltagelse. Han prøvede at opnå en dialogisk undervisning hvor begreber, strukturer og sammenhænge kunne diskuteres, men følte ikke at de studerende bed på krogen når han lagde op til det. Samtidig ønskede han at give de studerende eksempler på hvordan et matematisk område kan opbygges helt fra grunden, og beviserne spillede for ham en vigtig rolle i den sammenhæng. Tavlegennemgangen af beviserne var for læreren en nødvendig måde at give de studerende en fornemmelse af "fast grund under fødderne" samt mulighed for bedre at kunne huske sætninger senere.

Denne modstrid mellem lærerens og studenternes opfattelser af undervisningen fandt jeg relevant for analysen af studenternes løsningsprocesser. Udtalelserne centrerede sig om samspillet eller måske mere præcist kampen mellem detaljerne i beviserne på den ene side og overblikket over og strukturen af de involverede matematiske begreber på den anden. Jeg havde selv en fornemmelse af hvad de studerende mente med detaljer og "det konceptuelle", men for at gøre det muligt at foretage en videnskabelig undersøgelse af hvilket fokus der var på detaljerne og "konceptualiteten" i undervisningen, var det nødvendigt med en præcisering. Præciseringsarbejdet bestod i på baggrund af eksempler fra forelæsningerne samt fra opgaveløsningsprocesserne at konkretisere "detaljerne" og "det konceptuelle/strukturelle". Undervejs i dette arbejde udviklede analyseapparatet sig, og det blev hensigtsmæssigt at skelne mellem de tre begreber *struktur*, *komponenter* og *detaljer*, som vil blive konkretiseret nærmere i det følgende. En struktur består af et netværk af komponenter, og komponenterne består igen af detaljer der kan variere i antal og kompleksitet. Strukturen lader sig ikke forstå uden et kendskab til detaljerne mens detaljerne er svære at tillægge mening uden en forståelse af komponenternes rolle i strukturen. Denne beskrivelse er imidlertid meget lidt operationaliserbar. For at konkretisere diskussionen præciseres og uddybes brugen af struktur, komponent og detalje i følgende sammenhænge:

- Dissektion af et foreliggende matematisk bevis
- Konstruktion af et bevis/undersøgelse af en egenskab

Hvad indeholder disse punkter? Traditionel universitetsundervisning er typisk opdelt i forelæsninger hvor læreren gennemgår en på forhånd angivet tekst, og øvelsestimer hvor en undervisningsassistent typisk er ansvarlig for at gennemgå opgaver. Gennem et universitetsstudium i matematik øges fokus på bevisførelse både i lærebøger og i forelæsningerne. En af pointerne ved at gennemgå lærebogsbeviser i undervisningen kunne være at lære de studerende at "dissekere" et matematisk bevis, hvilket vil sige at forstå opbygningen af beviset, den bærende idé eller ideer der ligger til grund for beviset, og også de tekniske detaljer der muliggør beviset (en anden pointe kunne være at vise de studerende prototyper på beviser som de kan bruge til løsning af opgaver). At dissekere et bevis eller at forstå et bevis handler om mere end blot at forstå de enkelte deduktive trin, hvilket Bourbaki pointerer:

> Indeed every mathematician knows that a proof has not really been "understood" if one has done nothing more than verifying step by step the correctness of the deductions of which it is composed, and has not tried to gain a clear insight into the ideas which have led to the construction of this particular chain of deductions in preference to every other one. (Bourbaki, 1950, s. 223, fodnote)

Man kan populært sige at de studerende skal lære at skelne mellem hvad der er "stort" og "småt". Efter et vist trin i matematikuddannelsen begynder de opgaver studenterne skal løse, typisk at være bevisopgaver og i mindre grad regneopgaver. I bevisopgaver kan studenten blive bedt om at bevise en given påstand af typen "vis at funktionen er differentiabel", eller det kan dreje sig om opgaver hvor studenten skal undersøge om objekter besidder en given egenskab, som for eksempel "undersøg om funktionen er kontinuert". I den sidste type af opgaver spørges der ikke direkte efter et bevis, men det ligger implicit at svaret kræver en matematisk acceptabel retfærdiggørelse. I denne artikel bruges beviser altså i bred forstand som komplette formelle matematiske retfærdiggørelser af matematiske påstande, hvad enten påstandene fx er generelle sætninger i en lærebog eller fremsat i en opgavesituation (Niss & Jensen, 2002). Afgørelsen af hvad der udgør en "acceptabel formel retfærdiggørelse", ligger i den undervisningsmæssige kontekst:

> Et bevis er et matematisk argument, det vil sige en sammenhængende sekvens af udsagn for eller imod en matematisk påstand, med de følgende karakteristika:
> (i) beviset benytter påstande som er accepteret af klasserumssamfundet, og som er sande og til rådighed uden yderligere retfærdiggørelse,
> (ii) beviset benytter ræsonnementsformer som er valide og kendte, eller inden for begrebslig rækkevidde, af klasserumssamfundet, og
> (iii) beviset kommunikeres ved hjælp af ytringsformer som er passende og velkendte, eller inden for begrebslig rækkevidde, af klasserumssamfundet.
> (forfatterens egen oversættelse af (Stylianides, in press))

Det er således det konkrete klasserumssamfund – hvilket inkluderer læreren – der afgør om en sekvens af matematiske udsagn kan defineres som et bevis. Det er (selvfølgelig) ikke til diskussion hvorvidt en matematisk udsagnssekvens der i klassens lærebog har overskriften "bevis", faktisk kan defineres som et bevis. En definition der ville lede til det modsatte, er absurd. Men i en opgavesituation hvor der efterspørges et bevis, er der spillerum for fortolkning. Jeg har valgt at det er "tilstrækkeligt" at løseren af opgaven mundtligt har formuleret en sekvens af udsagn der kan accepteres som et bevis i den pågældende kontekst (analysekurset). Denne definition mener jeg ligger inden for ovenstående definition af et bevis, jf. punkt (iii).

Dissektion af et matematisk bevis

Følgende definition på struktur, komponent og detaljer i et matematisk bevis benyttes:

> *Strukturen af et bevis er et hierarkisk netværk bestående af hovedtrinene/komponenterne i den valgte bevisstrategi. Elementerne i realiseringen af komponenterne betegnes detaljerne i beviset.*

Bevisstrategien i et lærebogsbevis er allerede valgt, og studentens job er derfor ikke at vælge en bevisstrategi men derimod at identificere lærebogens bevisstrategi. Derudover kræver en dissekering af beviset en identifikation af komponenterne og detaljerne i disse skridt. Komponenterne i et bevis er som oftest relaterede, og på samme måde er detaljerne i en komponent internt relaterede, men detaljerne for en komponent kan også være relaterede til detaljer for en anden komponent. Relationerne mellem komponenter og detaljer i et bevis giver således anledning til et netværk i hierarkiet. Dette vil blive eksemplificeret nedenfor. Med denne karakteristik af bevisstruktur, komponenter og detaljer bliver det muligt at analysere hvorvidt der i en bevisgennemgang i en undervisningssituation tales om strukturen, komponenterne eller detaljerne.

Lad os se på et konkret eksempel, nemlig sætningen som forbinder grænseværdibegrebet med følgekonvergens (se tekstboks 2). Grænseværdibegrebet er centralt i formuleringen af kontinuitet og præsenteres typisk i gymnasiet. I nutidens gymnasium defineres funktionsgrænser med limes-notationen mens man først på universitetsniveau indfører den formelle epsilon-delta-definition (se tekstboks 3). Grænseværdibegrebet præsenteres i forbindelse med studiet af funktioner. En funktion $f(x)$ siges at have en grænseværdi eller konvergere i et bestemt punkt a hvis funktionsværdierne nærmer sig en bestemt værdi når x nærmer sig a. Men man kan også tale om grænseværdi for en reel talfølge, der er en ordnet mængde af uendelig mange reelle tal hvor det n'te tal i følgen noteres x_n. Hvis følgens værdier nærmer sig en bestemt værdi a når n vokser, siger man at talfølgen har en grænseværdi, at den konvergerer (den formelle definition siger at der givet et positivt tal epsilon eksisterer et naturligt tal N således at afstanden $| x_n - a |$ er mindre end epsilon når n er større end N). Intuitivt er der således en sammenhæng mellem grænseværdibegrebet for funktioner og konvergens af følger, og det er præcis den sammenhæng den valgte sætning handler om.

Tekstboks 2: Sætning om følgekarakteristik af grænser
Lad $a \in \mathbf{R}$, lad I være et åbent interval som indeholder a, og lad f være en reel funktion defineret overalt på I muligvis fraregnet a. Så vil

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

eksistere hvis og kun hvis $f(x_n) \to L$ for $n \to \infty$ for enhver følge $x_n \in I \setminus \{a\}$ som konvergerer mod a for $n \to \infty$. (Egen oversættelse af sætning 3.6 i (Wade, 2004, s. 60))

Jeg vil i den følgende analyse tage udgangspunkt i lærebogens formulering af beviset for sætningen. Beviset henviser undervejs til definitionen for konvergens af funktioner (se tekstboks 3).

Tekstboks 3: Definition af funktionskonvergens
Lad $a \in \mathbf{R}$, lad I være et åbent interval som indeholder a, og lad f være en reel funktion defineret overalt på I muligvis fraregnet a. Så siges $f(x)$ at *konvergere mod L* for *x gående mod a* hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$ (som generelt afhænger af ε, f, I og a) således at

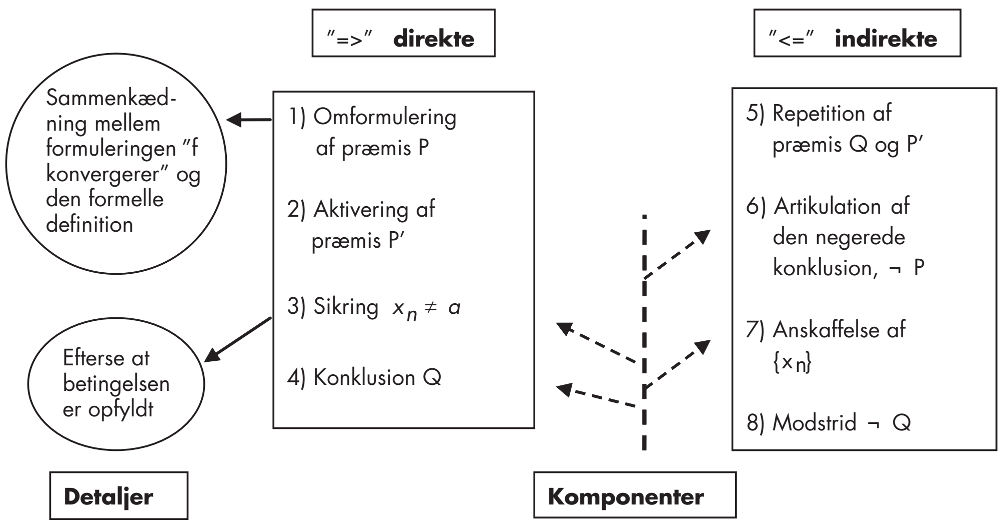
(1) $0 < | x - a | < \delta$ medfører $| f(x) - L | < \varepsilon$.

(Egen oversættelse af definition 3.1 i (Wade, 2004, s. 58))

Sætningen angivet i tekstboks 2 involverer en biimplikation, det vil sige der er to påstande i den samme sætning. Den første implikation (angives med "$\Rightarrow$") siger at hvis grænsen for en funktion f findes i et punkt a, så vil f's billedværdier af en følge som konvergerer mod a, have den samme grænse. Den anden implikation (angives med "$\Leftarrow$") siger det omvendte, nemlig at hvis billedværdierne af enhver følge der konvergerer mod a, også konvergerer mod en bestemt grænseværdi, så vil funktionen have den samme grænseværdi i a. Størstedelen af beviser for sætninger indeholdende biimplikationer opdeles i to dele hvor hver implikation vises for sig. I den valgte bevisstrategi vises først implikationen "$\Rightarrow$" ved et direkte bevis, mens implikationen "$\Leftarrow$" herefter vises ved et modstridsbevis. Jeg vil koncentrere mig om beviset for den første implikation. Hele beviset for sætningen som den er angivet i lærebogen, findes i tekstboks 4. For at lette gennemgangen af analysen er der indsat tal (i kantede parenteser) til at angive de forskellige komponenter i bevisstrukturen.

Beviset kompliceres af at sætningen indeholder *to* præmisser. I den første implikation opereres der således med de to præmisser P: "$f(x) \to L$ *for* $x \to a$" og P': "$x_n \to a$ *for* $n \to \infty$" samt konklusionen Q: "$f(x_n) \to L$ *for* $n \to \infty$". Bevisstrategien er "*hvis* P og P', *så* Q". I første skridt formuleres præmissen P mens præmis P' formuleres i andet trin. Der er ikke tale om to ens formuleringer idet der i andet trin drages konsekvenser af præmis P' hvor der i første skridt kun sker en omformulering af præmis P. Derfor kaldes den første komponent en omformulering mens anden komponent indeholder en aktivering af præmis P'. Detaljerne i de to komponenter er relaterede, idet det fundne delta i første komponent benyttes som "epsilon" i definitionen på en konvergerende følge i anden komponent. I det tredje skridt sikres det at $x_n \neq a$, hvilket er en nødvendig betingelse for at resultaterne i komponent ét og to kan kombineres, og på denne måde er de tre første komponenter relaterede. I fjerde skridt samles resultaterne fra de tidligere komponenter, og konklusionen kan drages. Detaljerne i beviset udgør realiseringen af komponenterne. Eksempelvis kræver en realisering af den tredje komponent blot at man tjekker eller efterser at den ønskede betingelse er opfyldt, så detaljerne for denne komponent er relativt enkle. Anden del af beviset kan analyseres på tilsvarende vis. Den samlede analyse er anskueliggjort i figur 1.

Tekstboks 4: Bevis
[1] Antag at *f* konvergerer mod *L* for *x* gående mod *a*. Givet $\varepsilon > 0$, så eksisterer et $\delta > 0$ således at (1) er opfyldt. [2] Hvis $x_n \in I \setminus \{a\}$ konvergerer mod *a* for $n \to \infty$, så er det muligt at vælge et $N \in \mathbf{N}$ således at $n > N$ medfører $| x_n - a | < \delta$. [3] Da $x_n \neq a$, [4] følger det fra (1) at $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ for alle $n > N$. Det betyder at $f(x_n) \to L$ for $n \to \infty$.
[5] Omvendt, antag at $f(x_n) \to L$ for $n \to \infty$ for enhver følge $x_n \in I \setminus \{a\}$ der konvergerer mod *a*. [6] Hvis *f* ikke konvergerer mod *L* for *x* gående mod *a*, så eksisterer et $\varepsilon > 0$ (kaldet ε_0) således at implikationen "$0 < |x - a| < \delta$ medfører $|f(x) - L| < \varepsilon_0$" ikke holder for ethvert $\delta > 0$. [7] Derfor eksisterer der for ethvert $\delta = 1/n$, $n \in N$, et punkt $x_n \in I$ som opfylder to betingelser: $0 < |x_n - a| < 1/n$ og $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. [8] Den første betingelse og klemme-sætningen medfører at $x_n \neq a$ og $x_n \to a$, så ifølge hypotesen fås $f(x_n) \to L$ for $n \to \infty$. Specielt gælder $|f(x_n) - L| < \varepsilon_0$ for store *n*, som er i modstrid med den anden betingelse. (Egen oversættelse (Wade, 2004, s. 60). Tallene der henviser til analysen, er tilføjet)



Figur 1. En skematisk oversigt over strukturen i beviset. Den første implikation vises ved et direkte bevis mens den anden vises ved et indirekte bevis, et modstridsbevis. Cirklerne længst til venstre giver eksempler på to detaljer, nemlig detaljen for den første og den tredje komponent i den direkte del af beviset.

I det efterfølgende vil jeg illustrere at denne måde at analysere et lærebogsbevis på faktisk kan bruges til at forstå dialogen i klassen når læreren gennemgår beviset.

Analyse af en bevisgennemgang i klassen

Lærerens gennemgang af beviset tager 25 minutter. Jeg har udvalgt to situationer som har flere illustrative pointer. Læreren lægger ud med at proklamere at første del af beviset næsten er trivielt. Herefter laver han en illustration på tavlen som i det følgende uddrag kommenteres (bemærk at læreren har valgt en anden notation end lærebogen: a i stedet for grænsen L og x_0 i stedet for punktet a):

Lærer: Øh, her har vi a. Vi har en graf f. Vi har et epsilon-vindue. Vi har et delta der matcher. … og vi har en følge, øh, x_n, som konvergerer ned mod x_0, og vi vil gerne vise at følgen af funktionsværdier $f(x_n)$ konvergerer mod a, og det vi ved, det er at hvis bare x holder sig inden for det der delta-interval omkring x_0, så ligger alle $f(x)$-værdierne inden for epsilon-intervallet omkring a. Og så siger jeg, hvis nu vi skal sikre os at $f(x_n)$ højst er epsilon væk fra a, så er det jo sådan set nok bare at bure x_n inde i det her interval fra minus delta til delta, for så ved vi at funktionsværdierne ligger inden for det rigtige interval … og der … Kan vi sikre os at x_n kommer til at ligge inden for intervallet fra x_0 minus delta til x_0 plus delta?

Karin: Er det noget med at vælge et n der er tilpas stort?

Lærer: Det lyder som en rigtig god ide, synes jeg. Kan vi det?

Karin: Det kan vi godt.

Lærer: Det kan vi godt. Hvad, øh, hvad, hvor stort skal det være?

Thomas: Større end store N.

Karin: Ja, det skal være større end store N.

Lærer: Neej, det er store N vi er ved at vælge, ikke også? Hvor stort skal vi vælge store N?

Kasper: Så stort, sådan at differensen mellem følgen og grænseværdien er mindre end, numerisk mindre end delta.

I uddraget starter læreren med at repetere konklusion Q ("og vi vil gerne vise …") og går derefter videre med komponent 1 ("det vi ved, det er …"). Herefter foretager han faktisk en reformulering af den logiske struktur ("Og så siger jeg, …") og afslutter med en henvisning til komponent 2 ("Kan vi sikre os, …"). Efter Karins spørgsmål som henviser til komponentens detaljer, responderer læreren igen med en henvisning til komponent 2 ("Kan vi det"). Her ville et fornuftigt svar nemlig være "ja, det kan vi idet $\{x_n\}$ konvergerer", hvilket ville være at henvise til præmis P' og ikke til detaljen af den anden komponent. I lærerens næste replik skifter han imidlertid til et detaljefokus ("hvor stort skal det være?"), og Kasper er sidst i uddraget i stand til at udspecificere detaljen.

Uddraget viser tre interessante ting. Dels foretager læreren en ændring af den logiske struktur i beviset uden at gøre det klart for de studerende. Derudover skifter læreren mellem et komponentperspektiv og et detaljeperspektiv mens studenterne i deres spørgsmål og svar fastholder et fokus på detaljerne. Man kan således sige at læreren her lader sig styre af studenternes detaljefokusering.

Et minut senere i gennemgangen forekommer følgende dialog omkring den tredje komponent:

Lærer: Og så vil jeg lige skynde mig at tilføje sådan lige at nul er mindre end afstanden fra x_n til $x_{0,}$ og det kommer af at min følge aldrig tager værdien x_0. Ikke også? Det er bare gratis med.

Karin: Det er bare gratis med?

Lærer: Ja, altså, det var bare med, min følge, den var indeholdt i I fraregnet x_0, så der er ikke nogle af x_n'erne der kan være x_0.

Karin: Hvorfor er det gratis?

Lærer: Jamen, jeg mener, så sikrer det mig at afstanden er større end nul. Det er det der er gratis. Når jeg først har betalt den anden pris, ikke også?

Her tager læreren først et komponentperspektiv ("Og så vil jeg lige ..."), men afslutter med detaljen ("Det er bare gratis med"), som jo netop bestod i at man blot skulle indse at betingelsen var opfyldt. Karin forstår tydeligvis ikke detaljen, og det hjælper ikke at læreren prøver at forklare komponentens detaljer igen. Læreren prøver at vende tilbage til komponenten ("Jamen, jeg mener ..."), men vil alligevel gerne forklare detaljen, nemlig hvorfor det er gratis.

Igen skifter læreren mellem at tale om komponenten og dens plads i beviset, altså strukturen, og detaljerne bag realiseringen af komponenten. Karin fastholder et fokus på detaljen; hun vil forstå hvorfor det er gratis, men det er tilsyneladende ikke muligt for hende at forstå detaljen uden en forestilling om hvor i bevisstrukturen komponenten og derved detaljen hører hjemme.

De to uddrag illustrerer at studenterne har "ret i" at undervisningen fokuserer på detaljerne i beviserne, men det er tilsyneladende ikke læreren der udelukkende kan holdes ansvarlig for det. Studenternes spørgsmål og kommentarer omhandler i disse uddrag kun detaljerne, og læreren synes at prøve at fange hvor de studerende er. Men uddragene viser også at læreren ikke er eksplicit omkring bevisets struktur, komponenterne og detaljerne, og at han ændrer og sammenblander disse dele af beviset uden at de studerende gøres det klart.

Analyse af en løsningsproces

Hele øvelsen med at udvikle en måde at analysere data på handlede om at gøre det muligt at sammenholde undervisningen med studenternes løsningsprocesser. I dette afsnit anvendes en lignende analyse derfor på to studerendes forsøg på at løse en bevisopgave fra lærebogen. Situationen foregår i kursustiden, hvilket betyder at læreren er til stede i lokalet mens de to studerende forsøger at løse opgaven. Idet der ikke på forhånd foreligger et færdigt lærebogsbevis der kan ligge til grund for en analyse svarende til analysen af bevisgennemgangen, baseres analysen på en (af mig) konstrueret løsningsproces. Der er således ikke tale om et formelt bevis der ville kunne forekomme i en lærebog. Ligesom to lærebogsbeviser for den samme sætning sjældent er identiske, vil løsninger til den samme opgave således også kunne variere. Og det vil kunne give anledning til forskellige analyser. I den forstand er den følgende analyse ikke entydig. Opgaven lyder:

Opgave: Antag at $\{b_n\}$ *er en følge af ikke-negative tal der konvergerer mod 0, og at* $\{x_n\}$ *er en følge af reelle tal som opfylder* $|x_n - a| < b_n$ *for store n. Vis at* x_n *konvergerer mod a.* (Egen oversættelse af opgave 2.4 i (Wade, 2004, s. 38))

Der er følgende præmisser i opgaven:

- P1: $\{b_n\}$ er en følge af ikke-negative tal, $b_n > 0$ for alle $n \in N$.
- P2: $\{b_n\}$ konvergerer mod 0.
- P3: $|x_n - a| < b_n$ for store n.

Samt en konklusion:

- Q: $\{x_n\}$ konvergerer mod a.

Strukturen i sætningen/opgaven er således at "*hvis* P1, P2 og P3, *så* Q". Et første fornuftigt skridt på vejen til en løsning kunne være at beskrive følgekonvergens mere operationelt end den står i konklusionen. Her skal løseren af opgaven altså kunne huske eller på anden måde blive klar over at der findes en formel definition af følgekonvergens. Hvis den formelle definition ikke indføres undervejs, vil studenten muligvis kunne overbevise sig selv om rigtigheden af påstanden, men argumentationen vil aldrig gælde som et formelt matematisk bevis. Det er derfor nødvendigt at der først foretages en oversættelse af konklusionen ved hjælp af den formelle definition af følgekonvergens. Ifølge definitionen konvergerer en følge af tal hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et naturligt tal N således at hvis man ser på de elementer i følgen med indeks større end N, så vil forskellen mellem disse elementer og grænsen numerisk være mindre end ε. Løseren skal altså for et givet epsilon på jagt efter et sådant naturligt tal N.

Hvilken information er der til rådighed? Der er de tre præmisser. Da oversættelsen af konklusionen pegede på at der skal findes et naturligt tal N, er det mest oplagt at springe P1 over og gå i gang med P2. Her bruges definitionen for følgekonvergens igen til at oversætte præmissen. Dette giver et naturligt tal N hvorom det vides at $|b_n| < \varepsilon$ når blot $n > N$. Nu skal konvergensen af de to følger $\{x_n\}$ og $\{b_n\}$ blot kombineres, og præmissen P3 er her den eneste hjælp. Oversættelsen af konklusionen peger på at afstanden $|x_n - a|$ skal vurderes, og det er derfor naturligt at begynde med den. Ved brug af først P3 og dernæst P1 fås følgende relation $|x_n - a| < b_n = |b_n|$. Præmissen P2 giver at der findes et naturligt tal N således at hvis elementer i følgen $\{b_n\}$ med indekstal større end N betragtes, så vil $|b_n| < \varepsilon$, og derved eksisterer der et N således at $|x_n - a| < \varepsilon$ for $n > N$. Bruges definitionen på følgekonvergens endnu engang kan løseren konkludere at følgen $\{x_n\}$ konvergerer mod a.

Jeg benytter her samme definition på struktur, komponenter og detaljer som i den foregående analyse af en bevisdissektion. Strukturen i opgaven og derved i beviset er blevet beskrevet ovenfor. En oversigt over komponenterne i den skitserede løsningsproces ser således ud:

- Komponent 1: Oversættelse af Q.
- Komponent 2: Udvælgelse og aktivering af P2.
- Komponent 3: Sammenkædning af Q og P2 – gennem P3 og P1.
- Komponent 4: Tilbageoversættelse af Q.

Detaljerne i beviset er realiseringen af komponenterne, og de er beskrevet i ovenstående løsningsproces. Eksempelvis kræver realiseringen af den første komponent at løseren kan etablere en sammenhæng mellem ordlyden i konklusionen og den formelle definition. Der skal altså etableres en forbindelse mellem løserens begrebsbillede som er en betegnelse for den samling af billeder, forestillinger og eksempler løseren umiddelbart forbinder med et begreb, og den formelle begrebsdefinition der dækker over den formelle definition accepteret af det matematiske samfund på det pågældende niveau (Tall & Vinner, 1981).

Med analysen af den konstruerede løsningsproces er det nu tid til at se på den virkelige løsningsproces. De første ti minutter bruger de to studerende på at lede i bogen (også på sider der følger *efter* opgaven) efter resultater og eksempler som har overfladisk lighed med detaljer i opgaven. De hæfter sig eksempelvis ved en sætning hvor der indgår en følge der er mindre end en anden følge, i lighed med at $|x_n - a|$ er mindre end b_n. De bliver dog enige om at de "kun må bruge" oplysninger der er præsenteret *før* opgaven, og den ene studerende begynder derfor at se på definitionen for følgekonvergens (omtales som "2.1"):

Lise: Jamen. Vent lidt. Jeg skal lige prøve at lege lidt med den 2.1'er dér. Og så prøver jeg at sætte b_n ind, øhm. b_n minus 0 er mindre end epsilon. For store n'er, og det er jo alligevel med i det. ... Og ... altså, Mette.

Mette: Hmm.

Lise: ... så kan man jo så sætte, så tager man jo den her, x_n minus a, den er jo så mindre end b_n minus 0, og den er jo så mindre end b_n, og den er mindre end epsilon. Og hvis den her er mindre end epsilon … så koverer, så konvergerer den til, mod, mod a.

Mette: Sig det lige en gang til. (Mette har siddet og skrevet selv og har ikke hørt efter Lise)

Lise: Altså, først, så sætter jeg b_n ind.

Mette: Ja.

Lise: Ja, det har du også gjort, og ifølge definition 2.1, så er b_n minus 0 mindre end epsilon.

Mette: Ja.

Lise: … så er b_n også mindre end epsilon. Og den her følge, den var jo mindre end b_n, og b_n er mindre end epsilon …

Mette: Ja.

Lise: … så må det også gælde at den her er mindre end epsilon. Og når den er skrevet på den form, så er det jo sådan et klart eksempel på definition 2.1 som netop er definitionen på hvornår en "sequence converger" (de griner) konvergerer.

Mette: En følge konvergerer.

Lise: Konvergerer, ja. … så det er vel egentlig ikke meget mere end det?

Mette: Næh.

(Et minut senere; de venter på at læreren kommer over og kontrollerer deres løsning)

Mette: Man skal jo … bevise at x_n går mod a.

Lise: At x går mod a?

Mette: Ja.

Lise: Ja.

Mette: Har vi gjort det? (de fniser lidt)

Lise: Skal vi lige tjekke selv inden vi spørger? Her … vis at x_n konvergerer mod a, jamen, det synes jeg også vi gør, fordi vi viser at den er mindre end epsilon for et tilpas stort n.

Mette: Okay.

Lise: Altså, det her, det er definitionen på om noget konvergerer, at den hersens ting her skal være mindre end epsilon for store, for store, for n'er større end N.

I Lises første replik går hun i gang med at benytte definitionen på følgekonvergens på følgen $\{b_n\}$. Hun kan se i definitionen at udsagnet skal gælde når n er større end et N, og hun kommenterer at den betingelse er opfyldt ("For store n'er, og det er jo alligevel med i det"). Så Lise berører her oversættelsen af konvergens af følgen $\{b_n\}$, hvilket er en detalje i den anden komponent. Dernæst ser hun på differensen mellem x_n og a og benytter præmis P3 til at konkludere at differensen er mindre end epsilon. Bortset fra at hun springer over argumentet med at følgen $\{b_n\}$ er positiv, så beskriver hun her detaljerne i komponent 3. Hun afslutter med at konkludere at følgen $\{x_n\}$ derfor konvergerer, det vil sige komponent 4.

Lise repeterer sin argumentation for Mette ("Altså, først så sætter jeg b_n ind.") og uddyber komponent 4 med de tilhørende detaljer ("Og når den er skrevet på den form ..."). Der er på dette sted nogle enkelte huller og uklarheder i deres bevis, fx benyttes P1 ikke, og det er uklart hvilket N der vælges hvornår (Lise taler blot om store n'er), men ellers foreligger løsningen på opgaven. Hvad sker der så? De to studerende venter på at læreren skal komme og tjekke deres løsning, og så bliver Mette i tvivl og vender tilbage til konklusionen ("... bevise at x_n går mod a"). Mette har ikke deltaget aktivt i løsningsprocessen, så det er ikke så overraskende at hun kommer i tvivl. Det samme kan man ikke sige om Lise. Hun har tidligere argumenteret overbevisende for at $\{x_n\}$ konvergerer, og alligevel drages hun i tvivl om deres løsning. Hun er dog i stand til at tjekke det og bliver igen overbevist om rigtigheden af deres konklusion. Men hvorfor tvivler hun? Indtil det punkt hvor Mette bliver i tvivl, har Lise behandlet detaljerne i komponent 2, 3 og 4. Men det er faktisk først til sidst da hun igen tjekker deres løsning at hun inddrager detaljerne i komponent 1. Hun er nødt til at gennemgå alle komponenterne i beviset før hun selv er overbevist om at hun har løst opgaven.

Analysen giver således en indsigt i den proces især Lise gennemgår.

Afsluttende bemærkninger

Med udgangspunkt i en matematikrelateret analyse har jeg i denne artikel præsenteret en måde hvorpå jeg kan beskrive, karakterisere og fortolke dialogen mellem lærer og studerende under gennemgangen af et bevis. Analysen er også forsøgt anvendt til at beskrive studerendes løsningsprocesser i forbindelse med selvstændig konstruktion af et bevis.

Analysen af lærerens bevisgennemgang viste at læreren i den specifikke bevisgennemgang hverken var eksplicit omkring strukturen i beviset eller omkring den måde han fremlagde strukturen på, eller hvilke komponenter og detaljer han talte om. Studenterne fokuserede på detaljer, og det virkede som om lærerens skift mellem et komponentperspektiv og et detaljeperspektiv var styret af studenterne. En studerendes manglende forståelse af lærerens forklaringer kunne forklares ved at hun ikke havde overblik over strukturen, komponenterne og detaljernes indbyrdes forhold.

Opgaveløsningseksemplet viste at en analyse baseret på struktur, komponenter og detaljer i beviskonstruktionen kunne forklare elementer i studenternes konkrete proces. Den ene studerende viste tegn på at have forstået strukturen i beviset, idet hun først opfattede beviset som afsluttet da alle komponenter i strukturen var gennemgået.

Selvom studenternes forestillinger om hvad der er "stort" og "småt", synes at påvirke deres muligheder for at forstå bevisgennemgangen og konstruere beviser selv, så er det i sig selv ikke nok til at påstå at der derved er etableret en årsagssammenhæng mellem undervisningen og det læringsmæssige udbytte. Men hvis tilstrækkeligt meget empirisk materiale ikke er i modstrid med denne fortolkning men derimod underbygger den, så kan forklaringsmodellen betragtes som en succes. Dermed ikke sagt at der ikke kan findes andre forklaringsmodeller der kunne have en lignende succes.

Fra et matematisk synspunkt er det ikke "nyt" at anskue et bevis som bestående af bærende elementer eller idéer og detaljer. Og analysen af lærerens gennemgang indikerer da også at han selv ser beviset som mere end en samling af detaljer. Men det er på ingen måde klart for de studerende. Efter at have fremlagt mine analyser for nogle af de studerende der deltog i observationerne, blev det klart for mig at denne måde at analysere undervisningen og løsningsprocesserne på ikke kun havde en beskrivende/forklarende pointe, men at analysen også kunne have en didaktisk pointe. De studerende mente at analysen gjorde beviset nemmere at overskue og gav dem en anden forståelse af beviset end de ville have fået ved at læse detaljerne i bogen og set læreren gennemgå dem ved tavlen. Analyseværktøjet kan derfor både finde anvendelse i konkrete forelæsninger hvis læreren eksplicit fremlægger bevisets struktur for de studerende, men værktøjet kunne også gøres til genstand for studenternes måde at forberede sig på. På baggrund af forberedelseslogbøgerne (kort omtalt i tekstboks 1) kunne jeg se at de fleste studerende læste beviserne lineært når de forberedte sig. Dette kan skyldes at de ikke var interesseret i at bruge for meget tid på at forberede sig. En anden forklaring kan være at den lineære læsning af et bevis er den eneste måde de kender til. Hvis de i undervisningen bliver præsenteret for analyseværktøjet, vil det give dem en meget konkret måde hvorpå de kan studere et bevis, og hvis læreren samtidig gennemgår beviset på denne måde, vil både forberedelsen og gennemgangen understøtte et fokus på strukturen og nedtone detaljerne. I litteraturen findes der lignende didaktiske forslag. Leron (1983) foreslår at beviser gennemgås ved den "strukturelle metode" (en flertrinsmetode med fokus på den bærende idé i beviset) i stedet for efter den "lineære metode" (detaljerne i beviset gennemgås successivt). Didaktisk set adskiller den strukturelle metode sig ikke væsentligt fra den metode jeg har præsenteret i denne artikel, idet pointen stadig er at få de studerende til at fokusere på strukturen i stedet for detaljerne. Lerons model egner sig imidlertid ikke til at analysere "lineære" bevisgennemgange og har derfor ikke været brugbar til at analysere datamaterialet med.

Mange universitetsundervisere i matematik ville sandsynligvis være enige i at det er meningen at de studerende gennem deres studium skal blive i stand til selv at dissekere beviser. Nogle vil måske mene at det er en del af "legen" at de selv skal finde ud af det. Denne holdning deler jeg imidlertid ikke. Tværtimod mener jeg at enhver hjælp der kan tilbydes de studerende så de undgår en ren detaljefokusering, vil være positivt. Fokuseres der eksplicit på strukturen og de bærende idéer i beviserne, vil det sandsynligvis give dem et bedre udgangspunkt for at forstå lærebogsbeviserne og samtidig gøre dem i stand til at konstruere beviser uden at være nødt til at tage "overfladiske" og ikke-matematik-relaterede strategier i brug.

Referencer

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 57(4)*, s. 221-232.

Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press. USA.

Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly, 90(3)*, s. 174-185.

Lithner, J. (2003). Students' Mathematical Reasoning in University Textbook Exercises, *Educational Studies in Mathematics, 52*, s. 29-55.

Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Undervisningsministeriet, Uddannelsesstyrelsen.

Stylianides, A.J. (in press). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education.*

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, s. 151-169.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Wade, W.R. (2004). *An Introduction to Analysis* (3. udgave). Pearson Prentice Hall, USA..