

Matematikvanskeligheder og lavt præsterende elever i Danmark

Lena Lindenskov & Peter Weng

Danmarks Pædagogiske Universitet

Artiklen beskriver som sit udgangspunkt at der gennem de seneste år har vist sig en voksende dansk interesse for matematikvanskeligheder og for den gruppe af unge og voksne danskere der præsterer lavt i internationale undersøgelser, men at dansk teoretisk og empirisk belysning af disse områder er sparsom. Som teoretisk belysning af begrebet matematikvanskeligheder peges der på tre aktuelle nordiske bidrag: livsmatematik, mestring og regnehuller, og mulighederne for at udnytte forskellige typer empiriske data i relation til disse diskuteres. Det fremlægges eksemplarisk hvilken kvalitativ indsigt der kan peges på ud fra danske 15-åriges svar på enkeltopgaver i PISA 2003, som muligvis kan være med til at belyse begrebet matematikvanskeligheder. Dette sammenholdes i en diskussion af hvordan man – ved at kombinere PISA-undersøgelseernes teoretiske beskrivelser af niveauer for elevpræstationer gennem analyser af enkeltopgaver – kan bidrage til videreudvikling af dansk evalueringskultur der kan støtte forebyggelsen og afhjælpningen af elevers vanskeligheder med læring af matematik.

Introduktion

Med oprettelse af et nordisk netværk¹ og gennemførelse af to konferencer med fokus på matematikvanskeligheder² er der ved starten af det nye århundrede skabt en fornyet interesse for den gruppe af elever der har vanskeligheder med at lære matematik, samtidig med at der også er sket en øget fokusering på de såkaldt stærke eller særligt begavede elever i matematik (Mogensen, 2004). I forbindelse med analyse og fortolkning af de danske resultater fra PISA 2003 har vi vurderet at resultaterne indikerer behov for fokus på netop disse to grupper, og derfor har vi givet dem en særlig betegnelse, nemlig *de to marginalgrupper*. Vi definerer dem i denne sammenhæng som de elever der præsterer henholdsvis lavt og højt ved testning i PISA 2003. Det

1 Nordic Research Network on Special Needs Education in Mathematics. Se (Engström, 2004).

2 Se (Forum for matematikkvansker, 2002) og (Engström, 2004).

er relevant at diskutere matematikvanskeligheder i relation til de lavt præsterende elever og hvad det er de stærke elever kan i forhold til andre elever, og som skaber behov for specielle udfordringer til netop denne gruppe elever. Denne artikel vil kun omhandle den ene af de to marginalgrupper: den gruppe elever der præsterede lavt i PISA 2003-undersøgelsen, og som i det følgende blot kaldes *marginalgruppen*.

Det er en særskilt diskussion hvordan man opfatter fænomenet matematikvanskeligheder, og der er for eksempel ikke nogen automatik i at fordi man præsterer lavt ved en test, så har man matematikvanskeligheder eller vice versa. Det afhænger i høj grad af hvordan matematikvanskeligheder diskuteres og forstås. Denne artikels bidrag til diskussionen er at vi præsenterer forskellige karakteriseringer af indgange til at diskutere matematikvanskeligheder, og at vi inddrager test i denne diskussion som et af mange redskaber der kan anvendes i indikationen af matematikvanskeligheder. Herefter anvendes de forskellige teoretiske indgangsvinkler på udvalgte opgaveeksempler fra PISA 2003-undersøgelsen, hvilket efterfølgende knyttes til den evalueringskultur der er under udvikling på alle uddannelsesniveauer.

Internationale undersøgelser og Fælles Mål

Det er en grundlæggende forudsætning for relevansen af at beskæftige sig med matematikvanskeligheder at matematik er et relevant område at have kendskab til og kompetencer i for en bred del af befolkningen eller for alle. Hvis ikke den forudsætning er holdbar, kan al overvejelse om matematikvanskeligheder standses. Vi går i denne artikel ud fra at forudsætningen er holdbar, og vi ser det som et symptom på holdbarheden at matematik indgår som et område der testes i internationale undersøgelser. I år 2000 kom rapporten *Danskernes læse-regne-færdigheder i et internationalt lys* med resultaterne af den danske deltagelse i SIALS, Second International Adult Literacy Survey (Jensen & Holm, 2000). Undersøgelsen beskriver de relevante krav og behov som OECD tillægger læsning, dokumentforståelse og regnefærdigheder for at kunne behandle skriftlige informationer. Dokumentforståelse i SIALS omhandler at læse, at forstå og at udfylde blanketter, manualer, køreplaner osv. Regnefærdigheder i SIALS omhandler at finde relevante talbeskrivelser i dagligdags tekster og at opstille og udføre relevante beregninger med de fire regningsarter og procent. Beskrivelsen af de voksnes regnefærdigheder, på engelsk kaldet quantitative literacy, sker ved hjælp af 5 niveauer. Det skønnes i undersøgelsen at regnefærdigheder beskrevet ved de to første niveauer er utilstrækkelige i forhold til krav og behov i et moderne samfund. Denne niveaubeskrivelse har en pendant i PISA-undersøgelserne, der vil blive inddraget senere.

I sammenligningen i SIALS, hvor der deltog 20 lande, er den danske voksenbefolkning højt præsterende, især med regnefærdigheder og dokumentforståelse. Men samtidig præsterer næsten 28 % af de 16-65-årige danske deltagere på de to første

niveauer som i undersøgelsen beskrives som værende utilstrækkelige. Resultatet 28 % kan man enten arkivere på reolen eller opfatte som en udfordring til politikerne som de må handle på, ikke mindst på grundlag af at der siden starten af 60'erne mere eller mindre eksplicit har været en agenda om at matematikundervisning skulle udvikle sig til et fag "for alle" (Damerow et al, 1986).

Offentliggørelsen i 2000 af danske resultater fra SIALS fungerede således som anledning til den uddannelsespolitiske satsning FVU, forberedende voksenundervisning i læsning og matematik, der blandt andet har fokus på den del af befolkningen der af den ene eller anden grund har haft vanskeligheder med at få lært matematik.

Også i PISA-undersøgelserne, Programme for International Student Assessment, der sammenligner 15-årige i en række lande, indgår matematik som et område. Det bliver formuleret at der i dagens og morgendagens samfund er krav og behov for kompetencer inden for *læsning, matematik, naturfag, IT og generel problemløsning* sammen med parathed til fortsat læring (Andersen et al, 2001; Mejding (red.) 2004). Beskrivelsen af de unges kompetencer i matematik knytter sig til begrebet *mathematical literacy*, som har fællestræk med men også afviger fra det danske begreb *numeralitet* (Lindenskov & Wedege, 2000), og som er bredere formuleret end det tilsvarende begreb *quantitative literacy* i SIALS-undersøgelsen. Beskrivelsen af elevernes præstationer i PISA 2003 sker ligesom i SIALS ved niveaubeskrivelser. Der er seks niveaubeskrivelser, hvor vi som nævnt har valgt betegnelsen marginalgrupper for de højt præsterende på niveau 6 og derover samt for gruppen vi interesserer os for i denne artikel, nemlig gruppen af elever der præsterer på niveau 1 og derunder.

Præstationerne af eleverne i den sidstnævnte gruppe beskrives i PISA-2003 som utilstrækkelige for at kunne leve op til morgendagens krav og behov. Dette gælder ifølge undersøgelsen for 16 % af de danske 15-årige. I sammenligning internationalt med 41 lande i undersøgelsen er det ikke et højt tal, og det er kun de finske unge der er bedre stillede i de nordiske lande. Igen står valget mellem at arkivere resultatet på hylden eller lade det være udgangspunkt for yderligere overvejelse og indsats.

Vi ser det som et symptom på politisk opmærksomhed om matematikvanskeligheder at der i folkeskolens Fælles Mål for Matematik, faghæfte 12, der udkom i 2003, som noget nyt er kommet et afsnit om "Matematik og specialundervisning", "Matematikvanskeligheder" og "Undervisningsdifferentiering" med i undervisningsvejledningen, hvor der under det første afsnit står "Mellem 10 og 12 % af eleverne i grundskolen har så store vanskeligheder med matematik, at de har brug for specialpædagogisk støtte; men over 15 % af eleverne har vanskeligheder ved at løse mere sammensatte opgaver i matematik". Man bør naturligvis sætte spørgsmål ved om disse procenter, som tilsyneladende er norske tal (Lunde, 2002b), også gælder for danske elever. Ministeriets fagkonsulent Karsten Enggaard skriver om medtagelsen af de nye afsnit: "Dette selvfølgelig på grund af den øgede mængde af elever, der har

behov for en særlig tilrettelagt undervisning, og fordi mange lærere giver udtryk for et ønske om retningslinjer for deres indsats i forbindelse med differentiering af matematikundervisningen”, hvilket igen hænger sammen med at “Læseplanen skal ikke være så bindende i sin beskrivelse, at den på den ene side ikke giver mulighed for udfordringer til de dygtigste elever og på den anden side er uopfyldelig for de svageste elever” (Enggaard, 2003).

Resultaterne fra SIALS og PISA 2003 indikerer at der er en relativt stor del af den danske befolkning som antagelig ikke har de matematiske kompetencer og den matematiske viden og kunnen der er ønskelig og rimelig set ud fra et personligt og samfundsmæssigt perspektiv. Oprettelsen af FVU med FVU-matematik er sammen med faghæftets inddragelse af afsnittene med matematikvanskeligheder og specialundervisning symptomer på at man fra politisk hold er blevet opmærksom på at matematikvanskeligheder er et problem som der i lighed med læsevanskeligheder bør fokuseres på. Det nævnes da også i OECD’s review af den danske folkeskole 2004 når der fremhæves svage sider og fremlægges anbefalinger. Der udtales bekymring for

det tilsyneladende fravær af en systematisk uddannelse i læsning og regnefærdigheder for børn med indlæringsproblemer. (...) Der er (...) behov for en vis form for specifik uddannelse i talforståelse, som gør mere end blot at gentage de indlæringsmetoder, som allerede har vist sig at være ineffektive for elever med indlæringsproblemer. Vi anbefaler, at Kommunernes Landsforening gennemgår programmet for efteruddannelse med henblik på at sikre, at tilstrækkeligt mange lærere tager en efteruddannelse, så de bliver rustet til at tage sig af elever med særlige behov for almindelig specialundervisning. (Mortimore et al, 2004)

Samlet set er der således indikationer på at der er interesse for eleverne med særlige behov i grundskolen, herunder den del der har vanskeligheder med matematikken.

Nordiske teoretiske bidrag til belysning af matematikvanskeligheder

I det følgende gives eksempler fra Sverige, Norge og Danmark på hvordan vanskeligheder med matematik kan anskues på forskellig måde. I Danmark har der ikke været den interesse for matematikvanskeligheder som der har været i Sverige i de seneste årtier og i Norge i de seneste år. Vi har valgt at pege på deres “Livsmatematik” og “Matematikmestring” samt vores egen metafor “Regnehuller” som eksempler på forskellige måder at anskue vanskeligheder med matematik på.

Livsmatematik

Oluf Magne har beskæftiget sig med matematikvanskeligheder i måske længere tid end nogen anden og dermed fulgt udviklingen på området. Han beskriver hvordan undervisning af de der har vanskeligheder med matematik, har ændret sig gennem tiderne (Magne, 2002a). Ved begyndelsen af 1900-tallet var opfattelsen at matematikundervisningen var lig med matematikken, og at det derfor var en elevs relation til det matematiske indhold der var den afgørende faktor i vurderingen af om en elev havde vanskeligheder eller ikke med matematik. Opfattelsen var at matematik er svært, og at man bare må acceptere at nogle kan klare det mens andre ikke kan. For eksempel var det for mange helt naturligt at matematik i almindelighed ikke var noget for piger. Denne opfattelse af matematik og matematikundervisning som værende mere eller mindre synonyme begreber ændredes, og dermed begyndte man i stedet at placere vanskeligheder ved læring af matematik hos eleven selv ved at tillægge eleven en eller flere defekter som årsag til at eleven ikke kunne få succes med læring af matematik. Defekterne konstateredes ofte ved testning, og diagnoserne var ofte af medicinsk art.

Dette klassiske syn på matematikvanskeligheder, med vanskelighederne placeret hos eleven, er stadig gældende, hvilket begreberne *dyskalkuli* (Adler, 2005) og *talblindhed* (www.talblindhed.dk) er eksempler på. Der startede i 60'erne en opposition til dette syn, og der udvikledes nye modeller til at vurdere og afhjælpe elevers vanskeligheder ved læring af matematik. Oluf Magne anvender nu terminologien SUM-elever (Särskilda Utbildningsbehov i Matematik) om elever der har vanskeligheder med matematik. Undervisningen af SUM-elever knytter han til en økologisk systemtænkning i tilknytning til de tre aktører som han mener er involveret omkring elevens vanskeligheder: eleven selv, matematikken og det "netværk" der afgør at eleven har vanskeligheder. Det er helt afgørende for Magne at indholdet i matematikundervisningen bliver gjort relevant for eleven og elevens videre liv, og det giver han en nærmere beskrivelse af. Derfor betegner han selv sin tilgang til matematikvanskeligheder som livsmatematik. Matematikken skal være livsmatematik, "livsmatematik är vanlig matematik, tillämpad på vardagens verklighet" (Magne, 2004, s. 21).

Matematikmestring

Olav Lunde tager sit udgangspunkt i at 10-15 % af eleverne risikerer at forlade skolen uden at mestre de fire regningsarter (Ostad, 1999), at 20 % blandt de der er på året efter hvad der svarer til endt dansk folkeskole, på norsk "grunnkurselever i videregående skole", mangler matematikfærdigheder for at kunne følge undervisningen, få udbytte af den og bestå eksamen, og at det på visse erhvervsfaglige uddannelser snarere drejer sig om halvdelen af eleverne (Knudsen, 1999). Endvidere anvender Lunde parallelt med Magne en model til forståelse af matematikvanskeligheder ud fra en helhedsvurdering

der inddrager følgende temaer: læreforudsætninger, ledsagevanskeligheder og matematisk viden og kunnen. I et af de projekter som Olav Lunde er involveret i, projekt "Regn med Kristiansand" med start i 2002 som involverer deltagelse fra samtlige 34 grundskoler med mere end tusind lærere, var ét af de mange punkter der ønskedes fra skolerne, netop at få øget forståelse af matematikvanskeligheder og at kunne forebygge at de opstår (Skolesjefen, 2003, s. 53). For Lunde er det helt afgørende at de indsatses som gøres med eleverne, ikke krymper til at blive opbevaring og fastholdelse af ringe resultater på de områder som eleverne har svært ved. Han er bekymret over at betegnelser som f.eks. matematikvanskeligheder snævrer vores syn ind: "Det er for snevert – og det styrer tenkningen min i bestemte retninger. I stedet har jeg begynt å snakke om matematikmestring. Da bliver elevens læringspotensiale vigtig" (Lunde, 2002b, s. 67). Lunde mener at det at beskrive en diagnose rettet alene mod forhold i barnet tenderer mod at gøre alle ansvarsfri, det være sig skole, kammerater, familie og barn. Derfor beskriver Lunde selv sin tilgang som "Matematikmestring" for at fastholde at der er læringspotentiale hos alle, og for at fastholde hensigten med indsatsen. Lunde taler svarende til Magnes livsmatematik om matematik som et socialt redskab som det enkelte menneske skal "mestre".

Regnehuller

Vi har, inspireret af blandt andre Magnes og Lundes tanker, lanceret metaforen "regnehuller" i forbindelse med matematikvanskeligheder. Metaforen har et dobbelt indhold. Dels knytter det sig til de vanskeligheder, regnehuller, som alle elever af forskellige årsager og på forskellige niveauer kan komme ud for i deres læring af matematik, dels omhandler det de huller som elever falder i og i nogle tilfælde ikke kommer op af igen, der opstår på baggrund af manglende støtte. Det vil sige at udgangspunktet ikke er eleven men de vanskeligheder denne møder med matematiske begreber og processer i det matematiske landskab (Bøttger et al., 2004). Med regnehuller ønsker vi at inkludere flere end de omkring 15 % som tilgangene med livsmatematik og mestring inkluderer, og samtidig ønsker vi at holde fokus på det faglige indhold af vanskelighederne og opfordre til at det faglige indhold beskrives detaljeret og uddybet. Vi kan være lidt bekymrede for om den dybe forståelse af vanskelighedernes faglige indhold kan forsvinde i tilgangene om mestring og livsmatematik.

Det er helt afgørende for os at matematikvanskeligheder ikke indebærer at en person overhovedet ingenting *ved* og *kan* og *vil* med hensyn til matematik. Metaforens billedmæssige udtryk tydeliggør at vanskeligheder som udgangspunkt knytter sig til enkeltstående områder, og at der "er noget udenom" i det matematiske landskab. Metaforen inviterer til at se forskellige måder at omgås sine vanskeligheder på og til at indse at man kan vælge forskellige typer strategier: Billedligt udtrykt som at fylde hullet op, bygge bro henover eller at gå udenom.

Med udgangspunkt i mestring, livsmatematik og regnehuller vil vi nu vende os mod mulighederne for en empirisk belysning af mulige matematikvanskeligheder. Det er væsentligt både af hensyn til udvikling af teoretisk forståelse og af hensyn til de praktiske muligheder for at læreren kan støttes i at støtte eleven. Testning er ét blandt flere redskaber til indikation og nærmere afdækning af en elevs eller elevgruppes eventuelle vanskeligheder og må bruges sammen med andre redskaber i iagttagelse og dokumentation af samtaler og elevaktivitet i undervisnings- og læringssituationer. Kendetegnende for alle tre anskuelser af matematikvanskeligheder er at der må en helhedsvurdering til. Specielt gælder det for anskuelserne "regnehuller" at der tilstræbes en dybtgående forståelse af det faglige indhold i vanskelighederne med henblik på at ændre faglige handlemuligheder. Denne forståelse af det faglige indhold kan elever og undervisere finde hjælp til ved at se på opgaver der er velbeskrevne, og som kan være udgangspunkt for en samtale før og efter elevens eget forsøg på at besvare opgaven. Sådanne opgaver kunne være opgaver fra PISA 2003 som vi giver eksempler på i det følgende.

PISA-framework og resultater

Relevansen og omfanget og den pauvre teoretiske og empiriske belysning af den gruppe af danske elever der har vanskeligheder med matematik, gør at vi stiller følgende spørgsmål:

Kan der indhentes informationer til en belysning af danske elevers vanskeligheder i matematik ved at se på deres præstationer på de enkelte opgaver i PISA 2003?

Vi vurderer at der er potentielle muligheder for at indhente informationer der kan skabe den påkrævede interesse og fokus på matematikvanskeligheder der kan få betydning for den enkelte lærer og elevs samarbejde om afhjælpning af disse. Som nævnt indeholder beskrivelsen af elevernes præstationer i PISA seks niveauer, og desuden er der præstationer der beskrives som under det laveste niveau 1. En blot og bar procentangivelse af hvor mange elever i PISA-undersøgelsen der præsterer på de seks niveauer og under niveau 1, giver ingen muligheder for svar i sig selv, men en beskrivelse af hvordan eleverne på de forskellige niveauer besvarer opgaverne, kan gennem eksempler belyse områder der måske er af interesse i sammenhæng med matematikvanskeligheder. Det faglige indhold i matematikdelen af PISA beskrives i det såkaldte Framework (OECD, 2005). Det beskrives overordnet set på samme måde som i læsning og naturfag ved hjælp af tre dimensioner. Overordnet beskrives det faglige indhold

1. med stofmæssige kategorier
2. med procesmæssige kategorier
3. med kategorier for situationer som de faglige opgaver omhandler.

De stofmæssige kategorier i matematik består af fire idéområder *Rum og form*, *Størrelser*, *Usikkerhed* samt *Forandringer og sammenhænge* (som i PISA 2000 blev kaldt *Vækst og forandring*). De procesmæssige kategorier i matematik beskrives som kompetencer på samme måde som i det danske KOM-projekt (Niss & Jensen, 2002) og undervisningsvejledningen for folkeskolen, men de rapporteres kun i tre kompetencegrupper, der modsvarer stigende sværhedsgrad. På engelsk betegnes kompetencegrupperne som *competency clusters*, og vi har valgt at benytte betegnelserne *reproduktionskompetence*, *sammenhængskompetence* og *refleksionskompetence*. Situationer som opgaverne omhandler, opdeles i henholdsvis *personligt liv*, *uddannelses- og arbejdsliv*, *samfundsliv* og *videnskabelige sammenhænge*.

I forbindelse med PISA 2003 er der udviklet nogle teoretiske beskrivelser af de seks niveauer. Beskrivelserne findes både som en samlet beskrivelse og som fire beskrivelser for hvert af de fire idéområder. Disse beskrivelser vurderer vi, kan bruges i arbejdet med at belyse kompetenceområder, og specielt kan beskrivelserne af niveau 1, som i PISA regnes for at være et utilstrækkeligt niveau i forhold til målet *mathematical literacy*, være med til at indkredse hvad PISA-konstruktørerne peger på som kriterier for hvad der indikerer vanskeligheder med matematik. Præstationsniveau 1 knyttet til *mathematical literacy* i PISA 2003 beskrives som et niveau hvor

eleverne (kan) besvare spørgsmål, der indeholder velkendte sammenhænge, hvor alle informationer er til stede, og spørgsmålene er klart formuleret. Eleverne er i stand til at finde informationer og udføre rutineprocedure efter direkte instruktion i eksplicit givne situationer. De kan ligeledes udføre handlinger, der er tydeligt angivet og følger direkte af de givne stimuli. (Mejding, 2004, s.49)

Når dette fortolkes i relation til folkeskolens matematikundervisning, så vil elever der kun kan løse standardopgaver som er givet og trænet i skolen, siges at have utilstrækkelig matematisk kompetence i forhold til at have gennemgået samfundets grunduddannelse – og dermed vanskeligheder med at kunne bruge matematikken i deres fremtidige liv.

Der må også tages forbehold for den praktiske betydning af at præstere på niveau 1 og derunder. Til en vurdering af den praktiske betydning for deltagelse i uddannelse og samfundsliv kræves der andre supplerende empiriske undersøgelser der rækker ud over rammerne for PISA. Mulighederne inden for PISA-undersøgelsens egne rammer er at give et teoretisk svar på hvad det betyder at præstere på et givet PISA-niveau.

Desuden kan man ved hjælp af analyse af PISA-opgaver og besvarelserne af disse give en empirisk belysning af præstationerne relateret til niveaubeskrivelserne. Det er disse muligheder vi vil give eksempler på nedenfor.

Endelig vil vi pointere at der som en væsentlig del af PISA søges oplysninger om forhold som motivation, holdning til skolen, det at føle sig tilpas i skolen, selvbillede, opfattelse af egen kompetence generelt, selvtillid i forhold til angivne situationer og ængstelse over for matematik og om læringsstrategier. Sådanne oplysninger søges tilvejebragt gennem et spørgeskema til eleverne. Resultaterne herfra kan være væsentlige for en mere helhedspræget indsigt i eleverne end deres opgavebesvarelser giver mulighed for. Dermed vil man kunne give mere helhedsprægede svar på vores spørgsmål, og derfor må der udføres fremtidige analyser herom.

Eksempler på danske elevpræstationer på niveau 1 og derunder i PISA 2003

Eleverne der har præsteret på niveau 1 eller derunder, udgør samlet 16 % af de elever der deltog i PISA 2003, og består af 17 % af alle piger der deltog, og 13 % af alle drenge der deltog. Det svarer næsten til at hver gang der er 2 drenge i gruppen, så er der 3 piger, og dette understreger overvægten af piger i gruppen.

Som en første konkretisering af det faglige indhold har vi tilsvarende set på hvor stor en andel piger og drenge der præsterer på niveau 1 eller derunder på hvert af de fire idéområder.

	Alle	Piger	Drenge
Matematik samlet	16 %	17 %	13 %
Rum og form	18 %	21 %	16 %
Forandringer og sammenhænge	18 %	21 %	16 %
Størrelser	15 %	16 %	14 %
Usikkerhed	14 %	17 %	12 %

Tabel 1. Danske elevpræstationer på niveau 1 og derunder i PISA 2003 i procent af samtlige deltagende danske elever.

Når vi ser isoleret på hvert område i tabel 1 for sig, varierer det noget hvor stor en del af de 15-årige der præsterer på niveau 1 og derunder. For alle områderne er der flere piger end drenge, og kun for området *Størrelser* er antallet af drenge og piger ret ens.

For at uddybe den faglige beskrivelse af de svagest præsterende elever går vi nu over til at se på hvordan marginalgruppen har præsteret på nogle udvalgte enkelt-opgaver. Vi har udvalgt tre opgaver der ikke tidligere har været offentliggjort danske beskrivelser af, og som er karakteriseret ved at de har en relativt høj rigtighedsprocent.

Det er således ikke nogle af de meget svære opgaver, men der er alligevel en relativt stor gruppe af elever der præsterer lavt på disse opgaver. For hver opgave sammenlignes de danske elevers generelle rigtighedsprocent med rigtighedsprocenten i marginalgruppen efterfulgt af en diskussion af mulige årsager til at så mange elever har vanskeligheder med opgaven.

Opgavespørgsmål TERNINGER

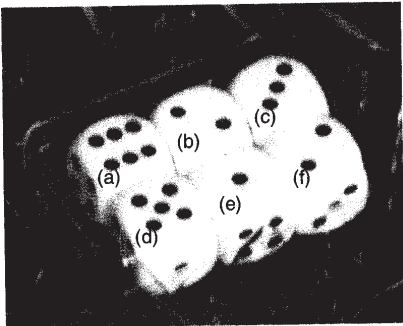
TERNINGER

M145Q01

Spørgsmål 1: TERNINGER

På billedet kan du se seks terninger, mærket (a) til (f).

For alle den slags terninger er der en regel: Det samlede antal øjne på to modstående sider er altid syv.



Skriv i hver kasse det antal øjne, der er på den **modstående** side af den tilsvarende terning på billedet.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

Opgaven er rubriceret under området *Rum og form* og som krævende reproduktionskompetence. Det er en lukket kortsvarsopgave.

	Samtlige elever der deltog i PISA 2003	Elever på niveau 1 og derun- der
Piger og drenge	71 %	25 %
Piger alene	72 %	24 %
Drenge alene	70 %	26 %

Tabel 2. Rigtighedsprocenter for elevpræstationer på opgaven: M 145 Q013. Terninger.

Det ses at der er en meget stor forskel på rigtighedsprocenter for alle elever og marginalgruppen. Desuden gælder det at mens det kun er 9 procent der springer opgaver over af alle elever, så er det henholdsvis 31 procent af drengene og 24 procent af pigerne i marginalgruppen. Der er således relativt mange både blandt piger og drenge der springer opgaven over.

Om *Rum og form* beskrives det teoretisk at eleven på niveau 1 kan løse problemer i en velkendt kontekst ved at bruge velkendte billeder og tegninger af geometriske objekter sammen med elementære regnefærdigheder. Specielt kan eleven bruge en todimensional repræsentation til at tælle eller beregne elementer ved et simpelt tredimensionalt objekt.

Denne opgave, som også var med i PISA 2000, er sandsynligvis meget atypisk i sin svarform fordi eleven skal besvare opgaven ved at sætte tal ind i en 2×3 -tabel der repræsenterer tal på bagsiden af en gennemsigtig æske med 6 terninger. Måske er det derfor at så mange i marginalgruppen springer opgaven over. Eleven får oplysningen at det samlede antal øjne på to modsatte sider altid er 7. Opgaven er så dels at oversætte "antal samlede øjne" til "summen af øjne", dels at oversætte "modstående side" til "bagside", hvilket kan være vanskeligt for nogle elever. At kunne anvende spatiale (rumlige) evner til at forestille sig "bagsiden" (forstået som at når "forsiden" viser tre øjne, må "bagsiden" have 4 øjne ifølge reglen om at øjnene i alt skal være 7) er også et aspekt der kan give vanskeligheder. Opgaven kan dog besvares alene med algebra hvis eleverne ser på $x + 1 = 7$, $x + 2 = 7$ osv.

Denne opgave indeholder, på trods af at den er kategoriseret som reproduktionskompetence, flere trin. Det kan være udførelsen af f.eks. subtraktioner der volder problemer, men spatial forståelse og parathed til at opstille det relevante regnestykke og få svarene skrevet i en atypisk svarform kan også spille en rolle. Besvarelserne indikerer at man som lærer bør være opmærksom på at den enkelte elev kan have problemer med hvert trin enkeltvis og med at skulle kæde ræsonnementerne sammen. Hvorvidt eleven kan visualisere en bagside, er ligeledes et af de forhold som en besvarelse af opgaven kan vise.

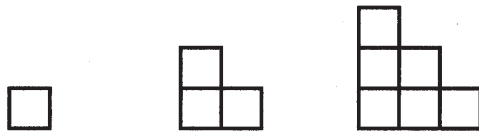
3 Koden henviser til opgavens nummerering i PISA.

Opgavespørgsmål TRAPPEMØNSTER

TRAPPEMØNSTER

Spørgsmål 24: TRAPPEMØNSTER M806Q01

Rune laver et trappemønster ved brug af kvadrater. Her er vist hans fremgangsmåde:



Trin 1 Trin 2 Trin 3

Som du kan se, bruger han ét kvadrat til Trin 1, tre kvadrater til Trin 2 og seks kvadrater til Trin 3.

Hvor mange kvadrater skal han bruge til det fjerde trin?

Svar: kvadrater.

Opgaven er rubriceret under området *Størrelser* og som krævende reproduktionskompetence. Det er en kortsvarsopgave.

	Samtlige elever der deltog i PISA 2003	Elever på niveau 1 og derunder
Piger og drenge	78 %	45 %
Piger alene	76 %	40 %
Drenge alene	79 %	51 %

Tabel 3. Rigtighedsprocenter for elevpræstationer på opgaven: M 806 Q01. Trappemønster.

Opgavespørgsmålet er et af de spørgsmål af alle PISA-spørgsmål der besvares med størst rigtighedsprocent i marginalgruppen. Det er en relativt lille del af marginalgruppen, omkring 10 % både af piger og drenge, der springer opgaven over – men stadig en stor del sammenlignet med gruppen af alle elever, hvor det kun er 2 %.

Om *Størrelser* beskrives det teoretisk at eleven på niveau 1 kan løse de allermest grundlæggende problemer med alle relevante informationer eksplicit givet og løse situationer der er let tilgængelige, hvor de krævede grundlæggende aritmetiske beregninger er tydeligt angivet, og den matematiske tilgang elementær. Specielt skal eleven kunne fortolke en simpel, tydeligt givet matematisk sammenhæng og anvende den direkte ved beregninger samt læse og fortolke en simpel tabel med tal, kunne beregne søjlesummer og sammenligne resultaterne.

I denne opgave skal eleven fortsætte et “trappemønster” der både er vist ved tre tegninger og beskrevet med ord som opbygget af henholdsvis 1 kvadrat, 3 kvadrater og 6 kvadrater. Eleven skal således kunne opfatte at der er en struktur. Det kan ske på flere måder: f.eks. ved at kunne se den næste trappe for sig mentalt, ved at tegne eller ved at se “lodret” på talmønstret med først 1, så 3 (1+2) og så 6 (1+2+3) og på denne baggrund ræsonnere sig til 10, idet $1+2+3+4 = 10$. Eleven skal kun besvare opgaven med antallet 10 og skal ikke redegøre for sin tankegang for at få sin besvarelse kodet som fuldt korrekt besvaret.

Det er processerne der leder frem til mønsterdannelser, der er problematiske. Besvarelserne på denne opgave indikerer at man som lærer bør være opmærksom på at der kan være en ikke ringe del af eleverne der har svært ved at se talmønstre og sammenhænge, selvom de er visualiseret, og derefter selv fortsætte mønstret.

Opgavespørgsmål BOGHYLDER

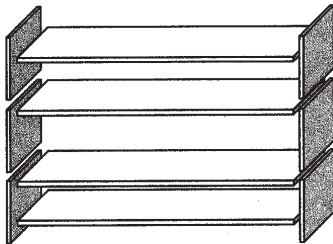
BOGHYLDER

M484Q01

Spørgsmål 27: BOGHYLDER

For at bygge et sæt boghylder skal en snedker bruge følgende materialer:

- 4 lange brædder,
- 6 korte brædder,
- 12 små vinkelbeslag,
- 2 store vinkelbeslag og
- 14 skruer.



Snedkeren har på sit lager 26 lange brædder, 33 korte brædder, 200 små vinkelbeslag, 20 store vinkelbeslag og 510 skruer.

Hvor mange hele sæt boghylder kan snedkeren lave?

Svar:

Opgaven er rubriceret under området *Størrelser* og som krævende sammenhængskompetence. Det er en kortsvarsopgave.

	Samtlige elever der deltog i PISA 2003	Elever på niveau 1 og derunder
Piger og drenge	72 %	17 %
Piger alene	70 %	18 %
Drenge alene	73 %	15 %

Tabel 4. Rigtighedsprocenter for elevpræstationer på opgaven: M 484 Q01. Boghylder.

Marginalgruppen adskiller sig kraftigt i rigtighedsprocenten fra gruppen af samtlige elever. Hvor det er 10 % af samtlige elever der springer denne opgave over, er det henholdsvis 33 % af drengene og 39 % af pigerne i marginalgruppen, hvilket indikerer at opgavens tekst for en del af eleverne er vanskelig at forstå.

Præstation på niveau 1 i Størrelser er teoretisk beskrevet ovenfor. Den matematiske besvarelse af opgaven kunne fås gennem at finde den mindste hele divisor af følgende delinger $26:4 \sim 6$, $33:6 \sim 5$, $200:12 \sim 16$, $20:2 \sim 10$ og $510:14 \sim 36$. Den mindste divisor er 5. Andre strategier kunne have ført frem til det korrekte svar uden at udføre alle disse delinger. Blandt andet kunne opgaven besvares ud fra en materielt funderet fornemmelse af problemstillingen hvor man opererer på mentale billeder af brædder og sav og nagler. Det skal bemærkes at eleven har lommeregneren til rådighed. Det betyder muligvis at det ikke er den konkrete beregning med brug af regnealgoritmer der er den primære grund til at en del elever har problemer med denne opgave. Det er muligt at ordningen af de mange oplysninger og afgørelsen af om der kan bruges elementer fra matematik, og hvilke elementer der kan bruges, kan give større problemer end den aritmetiske behandling. Der kræves en funktionel forståelse og brug af divisionsbegrebet, blandt andet omkring den praktiske betydning når der forekommer rest i et divisionsstykke.

Besvarelsene på denne opgave indikerer at man som lærer bør være opmærksom på at det for en del elever er et problem at se sammenhænge i form af forhold mellem tal. Situationen at vurdere forhold i en hverdagssammenhæng bør nok generelt set have mere opmærksomhed ligesom der nok må lægges vægt på at opøve vedholdenhed i en problemløsning hvor eleven selv skal strukturere oplysninger, fastlægge en fremgangsmåde, gennemføre denne og nå frem til en konklusion. Til gengæld er der mange veje til at besvare denne opgave.

Samlet set er det vores opfattelse at de tre opgavers krav om at opfatte, forstå og ræsonnere ud fra oplysninger og spørgsmål der er præsenteret i skriftlig tekst og i tegninger, svarer til nogle krav som alle har behov for at kunne honorere. På erhvervs- og arbejdsmarkedsuddannelser er det netop relativt enkle matematiske begreber der bringes i spil i sammenhænge der ikke er enkle. Det er også vores opfattelse at en kvalitativ beskrivelse af opgaverne og elevernes besvarelse kan være en støtte for læreren når en elev møder et regnehul i læreprocessen. Ved at anvende velbeskrevne opgaver både med hensyn til indhold og svartyper kan læreren få et nyttigt redskab til at forebygge og afhjælpe vanskeligheder ved læring af matematik.

De lavt præsterende i en evalueringskultur

Vi mangler i Danmark en diskussion der kan føre til en beskrivelse af matematikvanskeligheder der inddrager mange flere aspekter end de hidtidige traditionelle test har kunnet gøre, ikke mindst set i lyset af den fokusering på evaluering der har været i de senere år, og som specifikt giver sig udtryk i kommende nationale test, og det må forventes at disse vil øge fokus endnu mere på de elever der præsterer lavt heri. Dette nødvendiggør et bedre grundlag at handle på når vi skal forholde os til disse elever. De interne, diagnosticerende prøver til matematik fra børnehaveklassetrinnet

til 10. klassesettrin, MG-, FG-, PG- og MI-prøver (bl.a. Hansen, 2002), som anvendes på mange skoler til at afgøre om vanskeligheder med læring af matematik hos en elev skal føre til specialundervisning, er ikke et tilstrækkeligt grundlag for at vurdere en elevs vanskeligheder med matematik ud fra et fagligt syn.

Ej heller kan det alene på baggrund af internationale undersøgelser som SIALS- og PISA-undersøgelserne konkluderes at det er omkring 28 % af alle danskere mellem 15 og 60 år eller 15 % af de 15-årige der har matematikvanskeligheder og behov for særlige tiltag. Disse tal fortæller hvordan en repræsentativ del fra de to grupper har præsteret på bestemte opgaver, men hvordan der skal handles på det politisk og pædagogisk, kan undersøgelserne ikke sige noget om.

Vi ønsker at bidrage til at undersøgelsesgrundlaget og opgaveindholdet der ligger til grund for placeringen på niveauer, synliggøres. Dermed er der dels mulighed for at vurdere om lave præstationer også indikerer specifikke eller generelle vanskeligheder, og dels er der mulighed for at beskrivelserne kan være et input til udvikling af den formative evaluering. Som påpeget af Kristine Jess (2004), er det væsentligt at der udvikles materialer til formativ evaluering der kan medvirke til at øge lærernes indsigt i deres elevers kompetencer.

Der er en række spørgsmål som er alt for lidt udforsket. Det drejer sig om spørgsmålet om i hvor høj grad en bedre matematikundervisning med henblik på elever med vanskeligheder kan realiseres i en rummelig skole, samt i hvor høj grad der skal en anden støtte til, f.eks. støtte til opmærksomhedsstyrkelse. Det drejer sig også om spørgsmålet om om der skal gives flere hjælpemidler og mere tid til visse grupper elever ved prøver og eksaminer. Ligeledes om der er grupper med særlige vanskeligheder hvor det ikke er rimeligt at matematikkarakteren tæller som formelt adgangskrav til visse uddannelser.

Det er både et reelt og et etisk spørgsmål om det er systemet via prøver, elevens matematiklærer, forældrene eller eleven selv der afgør om elevens besvarelser eller adfærd i forbindelse med matematik er af en sådan art at vanskeligheder bliver til et problem med behov for særlige indsatser. Dette spørgsmål skal inddrages i diskussionen om hvad der er matematikvanskeligheder, og hvilke handlinger i forhold til den enkelte disse skal medføre. At forsøge at besvare spørgsmålet er centralt, ikke mindst set i lyset af den generelle fokusering på evaluering i vores samfund hvor skolen skal til at indføre nationale test.

Hvilken betydning det vil få for elever der præsterer lavt på disse test, kan man naturligvis ikke sige på nuværende tidspunkt. Men at formode at det kan føre til problemer for nogle elever at blive placeret i den lavt præsterende gruppe, er nok ikke urealistisk. Man kan frygte at den eneste konsekvens er placeringen – uden sikkerhed for at denne medfører ændringer i undervisningstilbuddet til eleven. Der er derfor god grund til at tage fat på diskussionen om hvad der skal karakterisere de vanskelige-

der med matematikken som i dag bliver betegnet som matematikvanskeligheder, og hvordan læreren kan støttes i at støtte eleven.

Med et livsmatematikperspektiv må man være kritisk over for om placeringen sker i forhold til matematisk kompetence der er relevant i livssammenhæng. Og med et mestrings- og regnehulsperspektiv må man være kritisk over for om placeringen sker på baggrund af tilstrækkelig detaljerede beskrivelser så det kan afgøres hvad der kan gøres for at lette eller ophæve eller komme uden om vanskelighederne.

Som det fremgår af beskrivelsen af regnehuller, møder alle mennesker vanskeligheder i deres udvikling af matematiske begreber og deres anvendelse. En vigtig opgave for en matematiklærer er at kunne finde ud af hvornår disse vanskeligheder skal ses som udfordringer i traditionel forstand som eleven selv kan arbejde videre med inden for den almindelige undervisning, og hvornår vanskelighederne er af en sådan art at specielle tiltag skal sættes i værk. På nuværende tidspunkt har lærerne generelt ikke redskaber der kan anvendes i de vurderinger der skal foretages når der opstår vanskeligheder med matematik hos en elev. Derfor er det vigtigt at der kommer anvendelige redskaber i den værktøjskasse som den forhenværende undervisningsminister Ulla Tørnæs udmeldte ved offentliggørelsen af PISA 2003, sammen med en øget satsning på efteruddannelse i forsøget på at kvalificere lærerne til blandt andet at kunne gennemføre de annoncerede obligatoriske nationale test som forligspartierne bag folkeskoleloven 23. september 2005 har indgået aftale om.

Et af de steder hvor diskussionen om matematik bliver ført, er i det nordiske netværk *Nordic Network for Research on Special Needs Education in Mathematics* som skal være et mødested for matematikdidaktikere, pædagoger og psykologer der arbejder med matematikvanskeligheder. Netværket har som mål at få skabt større kendskab til området og større sammenhæng mellem teori og praksis. Arbejdet med dette mål skal udbredes ved at der dels i læreruddannelsen og dels i efteruddannelsen af lærere sættes fokus på de vanskeligheder der kan forudses at en gruppe elever vil få i deres bestræbelse på at lære matematik. I denne artikel har vi vist eksempler på den indholdsmæssige beskrivelse af niveauer og enkeltopgaver som er en af de ting der skal til for kunne vurdere hvorvidt der er indikationer på vanskeligheder på et eller flere områder der kan karakteriseres som problematiske for de pågældende elever.

Konklusion

Det er vores normative udgangspunkt at det har væsentlig betydning for et menneskes oplevelser og deltagelse i dagens og morgendagens økonomiske og politiske liv, i den private sfære og i civilsamfundet, at man har et vist minimum af matematikholdige kompetencer, som blandt andet er beskrevet som *numeralitet* (Lindenskov & Wedege, 2002). Det måles hos 15-årige som *mathematical literacy* i PISA. Det måles hos voksne

som *numeracy* i The Adult Literacy and Lifeskills Survey (ALL), hvor der dog ikke er dansk deltagelse.

På grund af fagområdets relevans og omfanget af marginalgruppen mener vi at der fremover skal sættes et langt større blus – forskningsmæssigt og i pædagogisk udvikling – på matematikvanskeligheder og udvikling af evaluering der også kan være en reel støtte for de lavt præsterende. I artiklen har vi fremstillet nogle kombinerede resultater på baggrund af arbejde med regnehuller og med PISA. Vi har givet eksempler der kan belyse problemfeltet matematikvanskeligheder på baggrund af de danske elevers præstationer i PISA uafhængigt af de internationale sammenligninger.

Referencer

- Adler, B. (2005). *Vad är dyskalkyli? En bok om matematiksvårigheter*. Kristianstad: NU-förlaget.
- Andersen, A.M., Egelund, N., Jensen, T.P., Krone, M., Lindenskov, L. & Mejding, J. (2001). *Forventninger og færdigheder: Danske unge i international sammenligning*. København: AKF, DPU, SFI-Survey.
- Bøttger, H., Kvist-Andersen, G., Lindenskov, L. & Weng, P. (2004). Regnehuller – new conceptual understanding. I: A. Engström (red.), *Democracy and participation: a challenge for special education in mathematics: proceedings of the 2nd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics* (s. 121-134). Örebro: Pedagogiska institutionen, Örebro universitet.
- Dalvang, T., Formo, J., Lunde, O. & Bekken, O. (red.). (2002). *En matematikk for alle i en skole for alle. Seminarrapport etter 1. nordiske forskerseminar om matematikkvansker, Kristiansand 2001*. Info Vest Forlag.
- Damerow, P., Dunkley, M.E., Nebres, B.F. & Werry, B. (red.) (1984, 1986). *Mathematics for All*. Paris: UNESCO, Science and Technology Education Document Series, Number 20. Lokaliseret april 2005 på <http://unesdoc.unesco.org/images/0007/000759/075946e.pdf>
- Engström, A. (1999). *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik: en introduktion*. Örebro: Pedagogiska institutionen, Örebro universitet.
- Engström, A. (red.) (2004). *Democracy and participation: a challenge for special education in mathematics: proceedings of the 2nd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics*. Örebro: Pedagogiska institutionen, Örebro universitet.
- Engström, A. & Magne, O. (2003). *Medelsta-matematik: hur väl behärskar grundskolans elever lärostoffet enligt lgr 69, lgr 80 och lpo 94?* Örebro: Pedagogiska institutionen, Örebro universitet.
- Fælles mål – matematik. (2003). Uddannelsesstyrelsens håndbogsserie. Nr. 10. Faghæfte 12. København: Undervisningsministeriet, Område for Grundskolen.
- Hansen, K.F. (2002). *Matematik grundlæggende*. København: Psykologisk Forlag A/S.

- Jensen, T.P. & Holm, A. (2000). *Danskernes læse-regne-færdigheder i et internationalt lys*. København: AKF.
- Jess, K. (2004). Formativ evaluering i matematikundervisningen – ændringer i praksis. *Nomad*, nr. 4.
- Knudsen, G. (1999). *Kartlegging av grunnkurselevens manglende matematikkferdighet og holdninger til matematikk*. Oslo: Universitetet i Oslo, Institutt for spesialpedagogikk.
- Lindenskov, L. (2005). Er matematikken køn i PISA? I: *Uddannelse nr. 2 "Piger og drenge"*. København: Undervisningsministeriet. Lokaliseret på <http://udd.uvm.dk/200502/index.htm?menuid=4515>
- Lindenskov, L. & Wedege, T. (2000). *Numeralitet til hverdag og test: Om numeralitet som hverdagskompetence og om internationale undersøgelser af voksnes numeralitet*. AUC, DPU, RUC: Center for forskning i matematiklæring, Skrift nr. 16.
- Lindenskov, L. & Weng, P. (2004). Matematisk kompetence. I: J. Mejdning (red.), *PISA 2003 – Danske unge i en international sammenligning* (s. 35-96). København: DPU.
- Lunde, O. (2002a). *Rummelighed i matematik*. Tre bøger oversat og bearbejdet af M.W. Andersen. Malling Beck.
- Lunde, O. (2002b). "Fanden og hans bosted?" Matematikkvanser i sociologisk perspektiv. I: T. Dalvang, J. Formo, O. Lunde & O. Bekken (red.), *En matematikk for alle i en skole for alle. Seminarrapport etter 1. nordiske forskerseminar om matematikkvanser* (s. 65-78). Klepp: Info Vest Forlag.
- Lunde, O. (2003). Språket som fundament for matematikkmestring. *Spesialpedagogikk nr. 1*.
- Lunde, O. (2003). Har eleven matematikkvanser – og hva skal vi gjøre for å oppnå mestring? *Skolepsykologi, tidsskrift for pedagogisk-psykologisk tjeneste, april*. Lokaliseret april 2005 på http://www2.skolenettet.no/skolenettet/data/f/2/48/41/1_802_0/Har_eleven_matematikkvanser_og_hva_skal_vi_gjore_for_aa_oppnaa_mestring.pdf
- Lunde, O. (2000). *Tilrettelagt opplæring for matematikkmestring. – Hva kan vi gjøre for at Bob-Kåre skal lykkes med matematikken*. Klepp: Info Vest forlag.
- Magne, O. (1958). *Dyskalkyli bland folkeskoleelever*. Göteborg: Pedagogiska Institutionen, Göteborgs Universitet.
- Magne, O. (2002a). Översikt över svensk forskning om elever med särskilda utbildningsbehov i matematik. I: T. Dalvang, J. Formo, O. Lunde & O. Bekken (red.), *En matematikk for alle i en skole for alle – Seminarrapport etter 1. nordiske forskerseminar om matematikkvanser* (s. 43-47). Klepp: Info Vest Forlag.
- Magne, O. (2002b). Den nye spesialpedagogiske tenkningen innen matematikkundervisningen. I: T. Dalvang, J. Formo, O. Lunde & O. Bekken (red.), *En matematikk for alle i en skole for alle alle – Seminarrapport etter 1. nordiske forskerseminar om matematikkvanser* (s. 25-42). Klepp: Info Vest Forlag.
- Magne, O. (2004). 2000-tallets nya tänkande i specialpedagogik i matematik. I: A. Engström (red.), *Democracy and participation: a challenge for special education in mathematics: proceedings*

- of the 2nd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics* (s. 11-28). Örebro: Pedagogiska institutionen, Örebro universitet.
- Matematik. Temanummer: Elever med særlige behov.* (2003). Årgang 31, nr. 2. Samsø: Danmarks Matematiklærerforening.
- Mejding, J. (red.). (2004). *PISA 2003 – Danske unge i en international sammenligning*. København: DPU.
- Mortimore, P. et al. (2004). *OECD-rapport om grundskolen i Danmark*. (Baggrundsrapport ved Mats Ekholm). Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 5. København: Undervisningsministeriet.
- Murray, T. S., Clermont, Y. & Binkley, M. (2005). *Measuring adult literacy and life skills: New frameworks for assessment*. (Series: International Adult Literacy Survey; Catalogue no. 89-552-MIE, no. 13). Ottawa, ON: Statistics Canada.
- Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. København: Undervisningsministeriet.
- OECD. (2003). *PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*.
- OECD & Statistics Canada. (2005). *Learning a Living: First Results of the Adult Literacy and Life Skills Survey*. Paris: Minister of Industry, Canada and Organisation for Economic Cooperation and Development. Lokaliseret oktober 2005 på <http://www.oecd.org/dataoecd/44/7/34867438.pdf>
- Ostad, S.A. (1999). *Mathematical difficulties. Studies of learner characteristics in developmental perspective*. Oslo: Department of Special Needs Education, University of Oslo.
- Skolesjefen i Kristiansand. (2003). *Skolens arbeid med standarder innen lesing, skriving og matematikk. Samtaler med skolene 2002-2003*. Kristiansand. Lokaliseret april 2005 på http://www.kristiansand.kommune.no/doc_inter/5661_samtaler_med_skolene.pdfHenvi.