CAS som omstruktureringsredskab i matematikundervisningen

Keith Nabb, University of Wisconsin-River Falls, River Falls, WI 54022, USA

Oversat af Niels Johnsen

Abstract: *Computeralgebrasystemer (CAS) har potentialet til at være reformbefordrende i matematikundervisning og 'læring. Spørgsmål om brugbarhed, pædagogik og curriculum skal overvejes: Hvordan skal CAS indføres i matematikundervisningen? Er underviserne parat til at opgive "traditionel" tilgang og erstatte den med CASbaserede modeller? I hvilken grad influerer CAS på emnevalg og hvordan de valgte emner undervises? I en litteraturoversigt kaster denne artikel lys over CAS's muligheder og begrænsninger og præsenterer en model for CAS til brug i videre undersøgelser.*

Forord til artiklen

Af Morten Misfeldt, Institut for Læring og Filosofi, Aalborg Universitet, København

Jeg er glad for at skrive en lille indledning til Keith Nabbs artikel om CAS som omstruktureringsredskab i matematikundervisningen. Dels er det en dejlig artikel, dels handler den om noget der optager mig – nemlig brugen af digitale værktøjer i matematikundervisningen, og dels er den på dansk! Niels Johnsen fra Zahle/UCC har nemlig oversat den i forbindelse med en læreruddannelseseksamen for nogle år siden. Det er herligt at MONA på denne måde gør artiklen tilgængeligt for os alle.

En central pointe i artiklen er at CAS i hvert fald ikke er et uskyldigt lille artefakt man lige tager med når musikken spiller og ligningerne bliver lidt besværlige. CAS agerer mange forskellige roller og påvirker matematikundervisningen på mange planer. Nabb peger på Black Box, White Box, forstærker, diskussionsredskab, og katalysator for reform. En af artiklens største styrker er at disse roller er et fint greb til at åbne for den bredte af overvejelser der hører med til introduktionen af stærke regneværktøjer. Jeg vil bruge denne anledning til at pege på et par vigtige forhold der supplerer Nabbs analyse.

CAS har potentialer for at skjule og fremvise aspekter af matematik. Dette kan naturligvis anvendes pædagogisk men det giver også anledning til en del didaktiske problematikker. Internationalt er det adresseret ret bredt og af mange, men jeg vil pege på at der indenfor den franske tradition (af forskere som Luc Truche (Guin, Ruthven og Trouche 2005) og Michelle Artigue (2002)), og den italienske ditto (af Maria Alessandra Mariotti (2002)) er udviklet ret finmaskede forståelser af dette fænomen. En god skelnen som vi kan tage med fra den franske tradition er forskellen på om CAS bruges pragmatisk (til at *løse* matematik) eller epistemisk (til at *forstå* matematik). Det er (for) simpelt – men en god forskel at have for øje – altid.

CAS har et forstærkende aspekt på en række måder. CAS forstærker lærer og elevers matematiske muskler, og klassens fælles matematiske rækkevidde, men værktøjet forstærker også rækkevidden af lærerens pædagogiske valg og dispositioner. Desuden er CAS jo ofte ikke en del af læreres uddannelse og pædagogiske bagage, og normer omkring brugen af CAS er mindre veletablerede end andre matematiske normer. Derfor er der også en risiko for at personlige matematiske og pædagogiske særheder og værdier slår kraftigere ud i brugen af CAS end i andre matematikundervisningssammenhænge.

Endelig er CAS en løbende udfordring til opgavestillere og læseplansudviklere, fordi ingen jo ønsker sig en matematikundervisning hvor eleverne skruer hovedet af og trykker på knapper – derfor skal nogle af de gode gamle opgaver laves om. Det viser sig bare at (næsten) hver gang man laver en opgave hvor eleven både skal tænke sig om, og bruge CAS for alvor, så ender opgaven med at være frygtelig svær. CAS giver således fast arbejde til alle os der gerne vil gøre matematikundervisningen så god som den kan blive.

God læsning!

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. Høstet fra http://link.springer.com/article/10.1023/A:1022103903080

Mariotti, M. A. (2002). Influence of technologies advances on students' math learning. In L. English, M. G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Lawrence Erbaum Associates.

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (2005). The didactical challenge of symbolic calculators turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. Høstet fra http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=128286

Indledning

Udtrykket computeralgebrasystem (CAS) bliver i almindelighed brugt til at beskrive den meget forskelligartede klasse af teknologiske redskaber som er udstyret med numeriske, grafiske og symbolske muligheder. Disse redskaber kan optræde i form af computerprogrammer som Mathematica (Wolfram Research, 2009) og Maple (Waterloo Maple, 2009) eller i form af grafregnere som TI-92, Voyage 200 eller TI-Nspire (Texas Instruments, 2009) med tilhørende programmer.

I det store og hele regnes de for meget lovende når det drejer sig om at støtte matematikundervisning og -læring (Blume & Heid, 2008; Fey et al., 2003; Heid & Blume, 2008; NCTM, 2000; Zbiek & Heid, 2009). Bortset fra de almindelige grafregnere som kun har numerisk og grafisk funktionalitet, er det de symbolske muligheder i CAS og deres forbindelse med den numeriske og grafiske funktionalitet som har vakt opmærksomhed hos forskere og lærere over hele verden.

Med de muligheder der findes i sådanne højt udviklede redskaber, rejser der sig et grundlæggende spørgsmål om deres tilstedeværelse i matematikundervisningen, nemlig hvordan sådanne redskaber skal bruges i undervisning og læring i matematik. Nogle fremfører at CAS' potentiale består i at "befri" eleverne fra banale øvelser, sådan at større energi bruges på tænkning og refleksion over den matematik der læres. De som er imod, advarer om at en sådan brug truer den tilegnelse af grundlæggende færdigheder i matematik som er nødvendig for den videre læring. Andre igen indtager en neutral position idet de bevarer optimismen omkring CAS, men er bekymrede for de tekniske udfordringer som lærere og elever med stor sandsynlighed kommer til at møde. Hvorom alting er, de mange standpunkter som indtages i disse spørgsmål, giver grobund for debat om CAS i matematikundervisningen.

Litteraturvalg og organisation

Forskningen om brugen af computeralgebra i matematikundervisningen er omfattende. Den rummer en bred vifte af informationskilder, herunder litteraturoversigter, teoridannelser, systematiske forskningsarbejder og vurderinger. Selvom man kunne hævde at de fleste forskningsområder er stærkt opdelte, så er CAS-forskningen i særlig grad splittet. Nærmere bestemt synes bestræbelserne på at forbinde forskning og praksis at halte bagefter sammenlignet med andre forskningsområder (Zbiek, 2003). Da dette område endvidere generelt anses for at mangle sammenhæng med hensyn til forenende teorier, har jeg ikke haft nogen intention om at udelukke forskning på baggrund af dens klassifikation eller oprindelse. Læseren vil finde at litteraturen har et internationalt præg med stærk indflydelse fra østrigske, australske, franske og nordamerikanske eksperter i CAS.

Denne artikel er opbygget på følgende måde: Først kommer en diskussion af vigtige teoretiske bidrag. Eftersom mange af de studier som denne artikel diskuterer, omfatter et eller flere af disse perspektiver, er det vigtigt at forsyne læseren med en vis baggrundsinformation om sådanne teorier. Derefter vender artiklen sig mod de centrale spørgsmål om brugen af CAS. I denne diskussion sammenstilles vigtige resultater og mangler i denne forskning set gennem de nævnte teorier. Endelig afsluttes artiklen med en model for brugen af CAS.

Teoretiske udviklinger

Redskabers tilblivelse

Mere end noget andet teoretisk begreb i litteraturen har ideen om redskabers tilblivelse tjent som fundament for forskningen om matematiklæring i CAS-miljøer. Med udgangspunkt i Vérillon og Rabardel (1995) hævder denne teori at brugen af et hvilket som helst redskab – det være sig en hammer, en boremaskine eller et computeralgebrasystem – sjældent er spontan og automatisk. En nøglefaktor her er sondringen mellem den fysiske *genstand* (det menneskeskabte som man kan tage og føle på) og *redskabet* (det psykologiske værktøj som bliver brugt i læringshandlingen). Først når brugeren er i stand til at anvende den fysiske genstand til et meningsfyldt formål, bliver den til et redskab: "… en maskine eller et teknisk system udgør ikke umiddelbart et redskab for subjektet. Selv om det udtrykkeligt er skabt som et værktøj, er det ikke i sig selv et redskab for subjektet. Det bliver det først når subjektet har været i stand til selv at tilegne sig det" (Vérillon & Rabardel, 1995, s. 84-85). Skønt Vérillon og Rabardel ikke nævner computeralgebra og kun lejlighedsvis henviser til undervisning i matematik og naturvidenskab, har den udstrakte brug af deres teori kastet meget lys over området. Den har tjent til at forklare mange af mulighederne og faldgruberne når det drejer sig om at optage teknologien, indføre den og forstå dens virkning på elevers matematiske tænkning.

Kognitive teknologier: epistemiske eller pragmatiske?

Opfattelsen af CAS som et beregningsredskab hvis eneste formål er at løse matematiske problemer, er heldigvis ikke den der er mest udbredt. Forskere er i almindelighed optaget af CAS og dens værdi i selve læringsprocessen, nærmere bestemt dens evne til at spille en rolle i elevernes læring og forståelse af matematik. Pea (1987) brugte udtrykket "kognitiv teknologi" til at formidle ideen om at sådanne teknologier kan støtte brugeren i at "lære at lære" (Pea, 1987, s. 111). Disse kognitive værktøjer kan efterlade spor af elevernes arbejde, fremme refleksion over dette arbejde, frembringe hvad-hvis-scenarier og organisere andre måder at skabe aktiv tænkning på. Pea forstår udtrykket teknologi bredt som enhver opfindelse der har givet anledning til videre fremskridt i et civiliseret samfund (fx symboler, skriftsprog, teorier, menneskeskabte genstande og lign.) Hans centrale tese er at computerteknologi kan gøre rede for indre tankeprocesser og omvendt give den lærende et håndgribeligt middel til refleksion. Han gør det helt klart at det kognitive potentiale der kendetegner computere som teknologi, giver dem en særstilling i forhold til andre teknologier. Selvom en blyant fx kan være til hjælp når det drejer sig om skrive noget ned man har husket, er den kun en organisatorisk hjælp. Den udvider ikke brugerens mentale kræfter.

Med støtte i ovennævnte perspektiv har forskerne undersøgt de dobbelte udnyttelsesmuligheder som CAS har, nærmere bestemt (a) det effektive maskinoutput af matematiske løsninger og (b) de ægte refleksioner fra CAS som udvider læringsoplevelser. De begreber som bruges til at indfange disse udnyttelsesmuligheder, er *den pragmatiske værdi* og *den epistemiske værdi* af matematiske aktiviteter med teknologi. En tekniks *pragmatiske værdi* samler sig om hvor let den er at bruge, og hvor effektiv den er til at udføre en opgave, mens dens *epistemiske værdi* drejer sig om dens mulighed for at berige brugerens forståelse af den matematik der arbejdes med. Selv uden teknologi kan fx brugen af en meget rutinemæssig matematisk procedure tillade den lærende at undgå at tænke; det er i høj grad pragmatisk, men har ringe epistemisk værdi. Artigue (2002) fremfører at brugen af CAS i matematikundervisningen fører til en ubalance i denne didaktiske model: "Teknikker som udføres med computerteknologi, forandres, og det ændrer både deres pragmatiske og epistemiske værdier" (s. 249). Debatter om dette punkt bliver ofte vurderet ud fra de begrebslige og tekniske aspekter af aktiviteten. Da disse ideer er grundpiller i litteraturen, vender vi os nu mod disse sider af teorien.

Det teknisk/begrebslige skel

I de tidlige nordamerikanske studier var et fremherskende tema at CAS kunne overtage matematiske rutineopgaver, sådan at eleverne kunne fokusere på at udforme løsningsmetoder og fortolke resultatet (Heid, 2003). Nærmere bestemt stillede nogle undersøgelser spørgsmålstegn ved det udbredte synspunkt om at beherskelse af procedurer nødvendigvis kommer før begrebslig forståelse (Heid, 1988; Palmiter, 1991). I lyset af disse resultater forekom en grundlæggende ændring af det traditionelle curriculum i matematik nært forestående.

Selvom der var en udbredt skepsis, var to vigtige resultater afgørende for at lette bekymringerne for CAS' "indtrængen" i matematikken. For det første fandt man at brugen af CAS ikke i almindelighed svækker elevernes evne til at udføre rutinemæssige algebraiske operationer (Ayers et al., 1988; Heid, 1988; Hillel et al., 1992; Palmiter, 1991). Og hvad der er endnu vigtigere, gælder dette resultat på tværs af såvel klassetrin som evner (se Heid et al., 2002). For det andet bliver elevernes begrebslige vækst og forståelse ikke mindre som resultat af brugen af CAS (Heid, 1988; Judson, 1990). Faktisk fandt O'Callaghan (1998) at læring i et CAS-miljø førte til dybere sammenhænge i funktionsbegrebet sammenlignet med tilsvarende læring uden CAS. Lærernes begrænsede brug af computeralgebra på trods af disse resultater (Artigue, 2000) kan måske i nogen grad forklares ved at "ingen virkning" eller "minimal skade" næppe giver grund til forandring: "Medmindre matematiklæringen i en eller anden henseende forbedres, er der intet tvingende argument for forandring" (Heid et al., 2002, s. 587).

Andre forskningsresultater (Guin & Trouche, 1999; Lagrange, 2003) sammen med reflekterende kommentarer (Artigue, 2002; Ruthven, 2002) antyder at opfattelsen af CAS' brugbarhed til at fortrænge det tekniske til fordel for det begrebslige kan være overdrevet. Fx har nogle undersøgelser fundet at teknologien ikke i sig selv frembringer refleksiv tænkning (Guin & Trouche, 1999; Hoyles & Noss, 1992), mens andre minder os om at CAS i sig selv er en udfordring for elever og lærere (Drijvers, 2000, 2002; Lagrange, 2003). Tilsammen sætter dette fokus på nye sider af tekniske færdigheder der optager brugeren.

Rammer, barrierer og forhindringer

Det vigtige arbejde inden for indføring af redskaber og disses udvikling som redskaber for brugeren (se Artigue, 2002; Guin & Trouche, 1999) har stimuleret forskere til at undersøge de grænser som CAS opstiller. Hver gang en brugers handlinger er bestemt eller styret af et læringsredskab, er der en reel fare for at det specifikke ved indholdet kommer til at spille en større rolle (se Hoyles et al., 2004). Resultatet er at brugerne kan møde større udfordringer når det drejer sig om at forbinde den viden der er bundet til situationen, med den bredere viden de forsøger at tilegne sig. Det er et synspunkt som i almindelighed antages af Drijvers (2000, 2002), Guin og Trouche (1999) og Hoyles et al. (2004). I betragtning af hvor centralt dette forhold er, underbygger det betydningen af lærerens rolle i organiseringen af arbejdet med redskaber (Guin & Trouche, 2002); det vil sige at eleverne kan møde yderligere tekniske vanskeligheder med CAS og har brug for at blive guidet og hjulpet forbi sådanne barrierer.

Drijvers (2000, 2002) har været ledende i at identificere de forhindringer som elever mest sandsynligt møder i CAS-miljøer. Han definerer en forhindring som "en barriere, opstillet af CAS, som forhindrer eleven i at gennemføre sin plan for anvendelsen. Som resultat heraf vil forhindringen bringe den proces til standsning hvor der skiftes mellem den 'rene' matematik og problemsituationen" (Drijvers, 2000, s. 195). De almindelige forhindringer som hans arbejde afdækker, omfatter hvordan man klarer (1) uventet eller uforståeligt output, (2) de tilsyneladende vilkårlige valg som CAS-programmerne træffer, og (3) CAS-programmers afvisning af at udføre kommandoer. Disse forhindringer er hovedemner i diskussionerne om CAS-redskabernes "black box"-natur (Bossé & Nandakumar, 2004; Buchberger, 1989, 2002; Child, 2002; McCallum, 2003), mens andre forhindringer kan opfattes som mere globale af natur (Drijvers, 2000, 2002). I et senere arbejde dokumenterer Drijvers (2002) de forhindringer der opstår når de tekniske og begrebslige komponenter i en aktivitet støder sammen "… enten fordi teknikken ikke er ledsaget af passende mening og begrebsdannelse, eller fordi de tekniske færdigheder til at udføre en begrebslig ide mangler" (s. 224).

Brugen af CAS i matematikundervisning

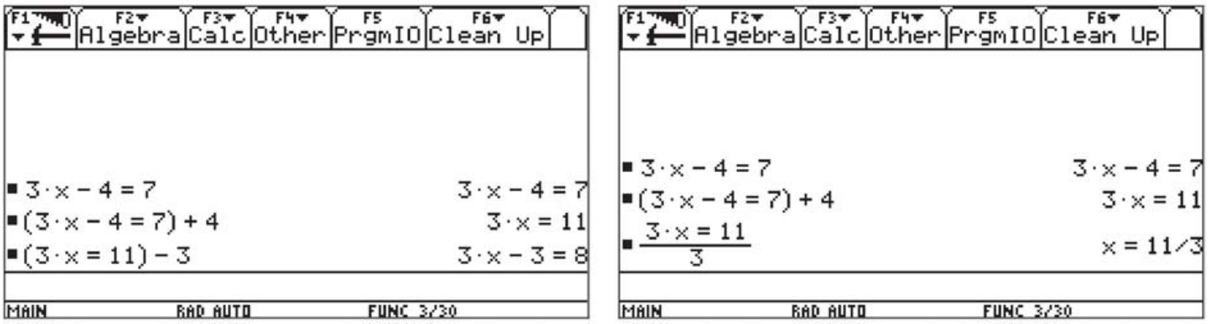
Heid et al. (2002) formidler et centralt dilemma om brugen af CAS med ordene: "Hvilken plads har denne produktive teknologi i vores klasseværelser?" (s. 210). Skønt spørgsmålet ser simpelt ud på overfladen, har mange forskningsarbejder belyst emnet og kun afsløret at det fælles grundlag er lille. I dette afsnit diskuteres fem forskellige former for brug af CAS: black box, white box, forstærker, diskussionsredskab og katalysator for reform. Hensigten er at belyse både disse forskellige perspektiver og grundene til at bestemte former kan blive foretrukket i det lange løb. Afsnittet slutter med den iagttagelse at disse former for brug kan indlejres i hinanden i en model der går fra rudimentær brug som uden videre kan indføres, til en sofistikeret brug hvis potentiale vi først er begyndt på at forstå.

Black Box

Brugen af CAS til at frembringe svar på matematiske spørgsmål uden bekymringer om ræsonnement har mødt udstrakt kritik i matematikkens didaktik. Udtrykket "black box" blev (i forbindelse med computeralgebra) introduceret af Buchberger (1989) for at beskrive netop denne brug – CAS som endnu en autoritet i klasseværelset som frembringer resultater uden noget *hvordan* eller *hvorfor*. Mange er enige om at uden kendskab til den underliggende matematik er konsekvenserne af en sådan brug katastrofale både i uddannelsessystemet og derudover (Bossé & Nandakumar, 2004; Buchberger, 2002; McCallum, 2003). Med blot nogle få indtastninger kan CAS give resultater som er inkonsistente, uforudsigelige og endda fejlagtige sådan som de fortolkes af brugeren. I helt reel forstand kaprer CAS brugerens input og udfører mystiske og nogle gange uønskede operationer. Den positive side af black box-brugen er naturligvis at den fremkalder en gnist af nysgerrighed hos nogle elever (Boyce & Ecker, 1995; Heid et al., 2002), men ellers må man være forsigtig for ikke at opdyrke et angstfremkaldende billede af et emne der i forvejen opfattes som mystisk (se Paulos, 1988). Endelig kan black box-tilgangen blive brugt til at løse problemer der bogstavelig talt strækker menneskets evner til grænsen – idet signalet så er at CAS kan håndtere yderst snørklede problemer. Ikke desto mindre har black box en relativt lav epistemisk værdi og ser ud til at lægge meget lidt til læringsoplevelsen som helhed (Artigue, 2000).

White Box

Mange forskere og praktikere som er kritiske over for ovennævnte brug af CAS, taler for den oplyste, pædagogiske brug af computeralgebra – det som i litteraturen er blevet kendt som "white box" (Buchberger, 1989; Child, 2002; McCallum, 2003). Fx diskuterer Heid og Edwards (2001) brugen af white box i sammenhæng med løsning af ligninger af første grad. Givet en ligning som $3x - 4 = 7$ kan en elev addere fire på begge sider ($3x = 11$) for så, lidt uovervejet, at subtrahere 3 fra begge sider. Hvis dette forslag blev fremsat i en sædvanlig klassesammenhæng, ville det sandsynligvis blive tværet ud til fordel for automatforslag som "divider med tre" eller "multiplicer med en tredjedel". Kort og godt: En potentiel læringsoplevelse ville gå tabt. Et CAS-program, på den anden side, vil gøre nøjagtig som eleven beder om (figur 1, venstre billede) så brugeren møder en læringsoplevelse midt i dette mindre heldige skridt. Figur 1 (højre side) illustrerer hvad en lærende måske ville gøre efter at have indset det.



Figur 1. *White box.*

I lyset af ovenstående eksempel erklærer Heid og Edwards (2001) at det er CAS' evne til at give øjeblikkelig og ikkedømmende feedback der åbner døre for nybegyndere som kæmper med begreberne. Dick (2008) har lignende bemærkninger med hensyn til læring af matematisk analyse. Mens en lærende kan have en vis fordel af at beregne, så er det langt mere sandsynligt at et pop up-vindue hvor brugeren udvælger *u* og *dv* (med brug af partiel integration), vil stimulere tænkning på et højere niveau.

Selv i ikke-CAS-situationer (fx elever der arbejder med programmeringssproget Logo) er det påvist at pædagogisk brug af computere giver ægte muligheder for læring. Hoyles og Noss (1992) diskuterer en særlig informativ episode hvor en trettenårig elev kommer til at forstå at multiplikation med et lille tal (mellem nul og et) formindsker det oprindelige tal. Selvom forfatterne nævner mange aspekter der bidrager til denne læring, er det den øjeblikkelige feedback fra Logo som udvikler elevens tænkning og som følge heraf får ham til at justere tidligere forsøg på at nå et mål. Konventionelle teknikker med papir og blyant lægger alvorlige hindringer for denne proces. I overensstemmelse med synspunkterne hos Heid og Edwards (2001) er det umiddelbarheden og neutraliteten i computerens svar der giver grobund for læring.

Forstærker

CAS kan spille en rolle som forstærker af intellektuel aktivitet. Det vil sige at computeralgebraværktøjer kan frembringe mange, varierede eksempler hurtigt efter hinanden, sådan at der gives hjælp til at opdage regelmæssigheder der ellers kunne forblive skjult (Heid, 1997; Pea, 1987). Det kan også tjene som et generelt eksperimentelt redskab når man dykker ned i matematikkens ukendte verden. Generelt sagt, så rykker en sådan brug "manuelt arbejde" (fx afsætning af punkter, gentagen multiplikation osv.) ned på et sommetider usynligt niveau sådan at brugeren kan træde et skridt tilbage og generalisere i en bredere skala. Denne indre egenskab ved at "outsource procedurer" til CAS identificeres ofte med den forstærkende rolle (Arnold, 2004; Heid, 1988, 1997, 2003; Heid & Edwards, 2001; Kutzler, 2003; McCallum, 2003; Palmiter, 1991).

Læseren finder det måske overraskende at der er meget lidt forskning der underbygger at forstærkning sætter eleverne bedre i stand til at lære matematik. Der er to grunde til dette. For det første fremhæver Peas oprindelige arbejde (Pea 1987) kognitive teknologier i bredeste forstand – programmeringssprog, algebrasystemer, geometriprogrammer og intelligente tutorsystemer. Store dele af forskningslitteraturen anfører forstærkning som en vigtig brug af CAS, men dette bruges næsten altid til at styre diskussionen i retning af at ændre lærerens praksis eller læseplanerne (se Heid, 1988; Palmiter, 1991). For det andet er forstærkermetaforen tilbøjelig til at passe særlig godt på elevers generalisering i grafiske miljøer. En elev kan fx tegne grafen for tre eller fire eksempler på en familie af funktioner og derefter formulere hypoteser om ændringerne på skærmen. På den måde kan det halvhjertede fokus på forstærkning tilskrives de sædvanlige grafregnere og deres evne til at udføre disse funktioner lige så godt. Eftersom grafiske afstikkere minimerer den mest værdsatte egenskab ved CAS, nemlig den algebraiske manipulation, er dette resultat ikke overraskende.

Diskussionsredskab

Eksternaliseringen af matematiske ideer for at fremme dialogen i klassen er en grundpille i CAS-forskningen (Guin & Trouche, 1999, 2002; Heid, 1997; Pea, 1987). Pea (1987) slår fast at kognitive teknologier "gør tænkningens mellemprodukter til noget eksternt [...] som man derefter kan analysere, reflektere over og diskutere" (s. 91). Et godt eksempel på denne funktionalitet kan findes hos Pierce og Stacey (2001). De undersøgte 30 elever i Australien som tog et universitetskursus i matematisk analyse hvori CAS-programmet Derive var integreret. Selvom forskernes hensigt også var at undersøge de studerendes fleksibilitet i repræsentationer gennem forstærkning, var forfatterne særlig interesserede i om CAS gav anledning til meningsfyldte matematiske diskussioner. Når de studerende blev spurgt om der foregik samtaler når de delte en computer, svarede 74 % enten "meget ofte" eller "altid". En enkelt studerendes perspektiv på dette spørgsmål er særlig oplysende: "I computerrummet er vi sammen som en gruppe. Der sker noget på en af maskinerne, og alle går hen og kigger og taler om det" (Pierce & Stacey, 2001, s. 37). Skønt forfatterne nævner at nyhedsværdien ved computere og computeralgebrasystemer sandsynligvis bidrager til denne entusiasme, tyder en voksende CAS-relateret forskning på at tilstedeværelsen af CAS virker som katalysator for diskussioner om hvad der optræder på skærmen (Boyce & Ecker, 1995; Drijvers, 2003; Kieran & Drijvers, 2006).

Med en mere direkte tilgang til at anspore til samtale undersøgte Guin og Trouche (1999) elevers udvikling af strategier i en nyskabende fysisk indretning af klasseværelset. Hver dag blev en "ny" elevs CAS-regnemaskine (TI-92) sat til en stor projektor så hele klassen kunne se med (uanset at hver elev havde sin egen regnemaskine). Denne særlige elev, som blev kaldt "sherpa-eleven", spillede en central rolle i lektionen ved at assistere læreren med det faglige indhold og de syntaktiske spørgsmål som klassekammeraterne så kunne iagttage. Det nævnes at dette format fremmede et miljø af åben diskussion og debat på to måder. For det første blev regnemaskinens lille skærm – der oftest er personlig og privat for brugeren – fremvist til offentlig diskussion. Dialogen havde mange funktioner idet den tog fat om matematiske, syntaktiske og andre særlige aspekter ved CAS. For det andet styrkede miljøets fysiske udformning sociale normer for matematisk aktivitet der var baseret på fri og åben dialog. Anden forskning (fx Boyce & Ecker, 1995) vidner om at CAS kan være særlig frugtbar når det drejer sig om at fremme og organisere meningsfyldt samtale, selv i tilfælde hvor læreren er den eneste der bruger CAS.

Katalysator for reform

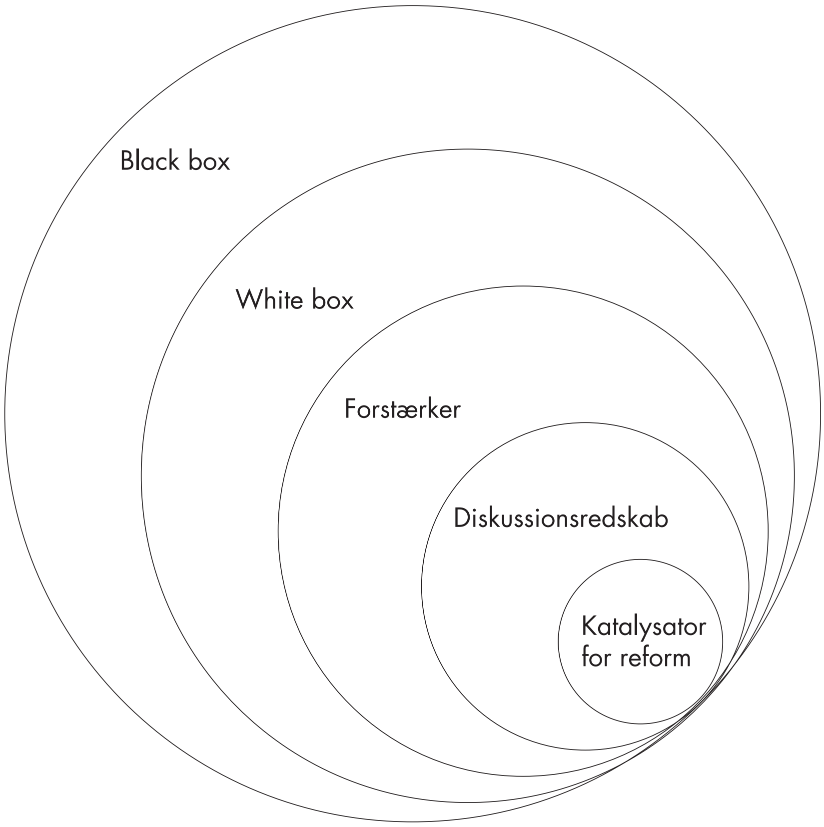
Bredt sagt kan reform i uddannelsessystemet defineres som enhver bevægelse der fører til en ikketraditionel måde at gribe læring af et emne an på, uanset om forandringen kanaliseres gennem undervisningen eller gennem elevernes aktivitet. Til den forskning som eksplicit fremhæver denne forandring, hører bl.a. arbejderne af Heid (1988) og Palmiter (1991). Fx gjorde Heid (1998) brug af et "begreber først"-curriculum hvor en gruppe studerende brugte CAS til at lære begreber i matematisk analyse, mens beherskelsen af færdigheder blev udsat til de sidste tre uger af semesteret. Samtidig lærte en kontrolgruppe analyse på den traditionelle måde med blanding af færdigheder og begreber. Undersøgelsesresultaterne viste ikke nogen signifikant forskel mellem de to grupper med hensyn til beherskelse af procedurer. Dette resultat udfordrer direkte antagelsen om at beherskelsen af procedurer skal gå forud for beherskelsen af begreber. Selv hvis denne antagelse ikke har tilslutning hos matematikere eller lærere, er den dybt indvævet i curriculum for grundskolen og de gymnasiale uddannelser.

Afslutningsvis kommenterer Hillel et al. (1992) i en undersøgelse af brugen af Maple i støtteundervisning nødvendigheden af at ændre rækkefølgen (og udelade dele af stoffet) for at give plads til CAS. Nærmere bestemt blev forfatterne, på grund af den lange række af situationer som CAS behandler ens, enige om at bruge en generel tilgang til undervisning i funktioner. Det støder an mod det traditionelle hierarki hvor man først introducerer linjer, derefter kvadratiske funktioner, så polynomier osv., sådan som det regnes for standard i matematiske læseplaner: "... en studerende som bruger Maple, kan analysere lige så let som hvis de bliver undervist i hvilke sider af funktionernes opførsel det er nyttigt at undersøge" (Hillel et al., 1992, s. 136). Denne forskning er på linje med andre undersøgelser (Heid, 1988; Judson, 1990; Palmiter, 1991) som lægger vægt på (a) begrebslig vækst gennem fortolkning og (b) en atmosfære som understøtter eksperimenter og hypotesedannelse (se Kutzler, 2003).

En model for brugen af CAS

Med den variation i måderne at bruge CAS på som er diskuteret i dette afsnit, er det nyttigt – om ikke andet så for organisatoriske formål – at ordne spektret af CAS-brug på en måde der sammenfatter denne mangfoldighed. Fx afdækker litteraturen at black box-brug kun bidrager lidt til de lærendes begrebslige vækst, men det er præcis af denne grund at brugen er både ukompliceret og hyppigt forekommende. I almindelighed ser det ud til at black box-brugen udgør en minimal trussel mod matematikundervisningens "traditioner" eftersom den især tjener som en sekundær autoritet. Stik modsat heraf kræver brugen af CAS med henblik på at omforme matematiske aktiviteter og pædagogik en større fornyelse fra læreren som hænger sammen med elevernes nyopståede kognitive behov. Denne sidstnævnte lærerrolle omdefinerer status quo hvad der nogle gange fører til en tilbøjelighed til at holde fast ved bestemte måder at bruge CAS på eller en dyb skepsis over for tabet af "klassisk indhold". Ud fra det synspunkt at der kan hentes noget fra hver af de her diskuterede måder at bruge CAS på, fremlægges en foreløbig model herunder:

Den indlejrende model illustrerer at brugen af CAS på ethvert niveau sandsynligvis inddrager de mindre sofistikerede måder at bruge det på. Fx vil brugen af CAS som forstærker benytte sig af både det pædagogiske værktøj (white box) og black box (de Alwis, 2002). På den anden side vil brugen af CAS udelukkende som black box nok ikke på nogen tænkelig måde inddrage de andre måder at bruge CAS på som er diskuteret i denne artikel (Buchberger, 1989). Yderligere er cirklernes størrelse i figur 2 tænkt til, omend groft, at formidle såvel den lethed hvormed kategorien kan implementeres, som dens grad af tilstedeværelse i matematikundervisningen. Generelt sagt: Stadig mindre cirkler betyder at den type brug er mindre populær – sandsynligvis et resultat af den store indsats det kræver at virkeliggøre den i klasseværelset. Engang ud i fremtiden ville det være interessant at undersøge hvordan de lærende fortolker at disse måder at bruge CAS på indvirker på deres viden om matematik, såvel som de nærmere enkeltheder ved redskabernes tilblivelse ved tilrettelæggelsen af sådanne måder at bruge CAS på.



Figur 2. *En model for brugen af CAS.*

Referencer

Arnold, S. (2004). Classroom Computer Algebra: Some Issues and Approaches. *Australian Mathematics Teacher, 60(2),* s. 17-21.

Artigue, M. (2000). Instrumentation Issues and the Integration of Computer Technologies into Secondary Mathematics Teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of the Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), 1*, s. 7-17.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, s. 245-274.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. & Lewin, P. (1988). Computer Experiences in Learning Composition of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 19(3)*, s. 246-259.

Blume, G.W. & Heid, M.K. (red.). (2008). *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Volume 2. Cases and perspectives*. Charlotte, NC: Information Age.

Bossé, M.J. & Nandakumar, N.R. (2004). Computer Algebra Systems, Pedagogy, and Epistemology. *Mathematics and Computer Education, 38(3)*, s. 298-306.

Boyce, W.E. & Ecker, J.G. (1995). The Computer-Oriented Calculus Course at Rensselaer Polytechnic Institute. *The College Mathematics Journal, 26(1)*, s. 45-50.

Buchberger, B. (1989). Should Students Learn Integration Rules? *ACM SIGSAM Bulletin, 24 (1)*, s. 10-17.

Buchberger, B. (2002). Computer Algebra: The End of Mathematics? *ACM SIGSAM Bulletin, 36(1)*, s. 3-9.

Child, J.D. (2002). Black Box and White Box CAS in Calculus. *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, 1*, s. 44-48.

de Alwis, T. (2002). Computer Algebra Systems in Mathematics Education: Computation and Visualization. *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, 1*, s. 16-21.

Dick, T.P. (2008). Keeping the Faith: Fidelity in Technological Tools for Mathematics Education. I: G.W. Blume & M.K. Heid (red.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Volume 2. Cases and Perspectives* (s. 333-339). Charlotte, NC: Information Age.

Drijvers, P. (2000). Students Encountering Obstacles Using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, s. 189-209.

Drijvers, P. (2002). Learning Mathematics in a Computer Algebra Environment: Obstacles are Opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(5)*, s. 221-228.

Drijvers, P. (2003). Algebra on Screen, on Paper, and in the Mind. I: J.T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R.M. Zbiek (red.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education* (s. 241-267). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fey, J.T., Cuoco, A., Kieran, C., McMullin, L. & Zbiek, R.M. (red.). (2003). *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, s. 195-227.

Guin, D. & Trouche, L. (2002). Mastering by the Teacher of the Instrumental Genesis in CAS Environments: Necessity of Instrumental Orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(5)*, s. 204-211.

Heid, M.K. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19(2)*, s. 3-25.

Heid, M.K. (1997). The Technological Revolution and the Reform of School Mathematics. *American Journal of Education, 106(1),* s. 5-61.

Heid, M.K. (2003). Theories for Thinking about the Use of CAS in Teaching and Learning Mathematics. I: J.T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R.M. Zbiek (red.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education* (s. 33-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Heid, M.K. & Blume, G.W. (2008). Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cross-Content Implications. I: M.K. Heid & G.W. Blume (red.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Volume 1. Research syntheses* (s. 419-431). Charlotte, NC: Information Age.

Heid, M.K. & Blume, G.W. (red.). (2008). *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Volume 1. Research Syntheses.* Charlotte, NC: Information Age.

Heid, M.K., Blume, G.W., Hollebrands, K.F. & Piez, C. (2002). Computer Algebra Systems in Mathematics Instruction: Implications from Research. *Mathematics Teacher, 95(8)*, s. 586-591.

Heid, M.K. & Edwards, M.T. (2001). Computer Algebra Systems: Revolution or Retrofit for Today's Mathematics Classrooms? *Theory into Practice, 40(2)*, s. 128-136.

Heid, M.K., Hollebrands, K.F. & Iseri, L.W. (2002). Reasoning and Justification with Examples from Technological Environments. *Mathematics Teacher, 95(3)*, s. 210-216.

Hillel, J., Lee, L., Laborde, C. & Linchevski, L. (1992). Basic Functions through the Lens of Computer Algebra Systems. *Journal of Mathematical Behavior, 11,* s. 119-158.

Hoyles, C. & Noss, R. (1992). A Pedagogy for Mathematical Microworlds. *Educational Studies in Mathematics, 23(1)*, s. 31-57.

Hoyles, C., Noss, R. & Kent, P. (2004). On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, s. 309-326.

Judson, P.T. (1990). Elementary Business Calculus with Computer Algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 9*, s. 153-157.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The Co-Emergence of Machine Techniques, Paper-and-Pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of CAS Use in Secondary School Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*, s. 205-263.

Kutzler, B. (2003). CAS as Pedagogical Tools for Teaching and Learning mathematics. I: J.T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R.M. Zbiek (red.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education* (s. 53-71). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J.-B. (1999). Techniques and Concepts in Pre-Calculus Using CAS: A Two Year Classroom Experiment with the TI-92. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 6(2)*, s. 143-165.

Lagrange, J.-B. (2003). Learning Techniques and Concepts using CAS: A Practical and Theoretical Reflection. I: J.T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R.M. Zbiek (red.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education* (s. 269-283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

McCallum, W.G. (2003). Thinking out of the Box. I: J.T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R.M. Zbiek (red.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education* (s. 73-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

O'Callaghan, B. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(1)*, s. 21-40.

Palmiter, J.R. (1991). Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education, 22(2)*, s. 151-156.

Paulos, J.A. (1988). *Innumeracy*. New York: Hill & Wang.

Pea, R.D. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. I: A.H. Schoenfeld (red.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (s. 89-122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Pierce, R. & Stacey, K. (2001). Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. *Mathematics Education Research Journal, 13(1)*, s. 28-46.

Ruthven, K. (2002). Instrumenting Mathematical Activity: Reflections on Key Studies of the Educational Use of Computer Algebra Systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, s. 275-291.

Texas Instruments (2009). *TI-92. Voyage 200. TI-Nspire*. Dallas, TX: Texas Instruments, Inc.

Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Though[t] in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology in Education, 9(3)*, s. 77-101.

Waterloo Maple (2009). *Maple (Version 13)*. Waterloo, Ontario, Canada: Waterloo Maple Software, Inc.

Wolfram Research (2009). *Mathematica (Version 7)*. Champaign, IL: Wolfram Research, Inc.

Zbiek, R.M. (2003). Using Research to Influence Teaching and Learning with Computer Algebra Systems. I: J.T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R.M. Zbiek (red.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education* (s. 197-216). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zbiek, R.M. & Heid, M.K. (2009). Using Computer Algebra Systems to Develop Big Ideas in Mathematics. *Mathematics Teacher, 102(7)*, s. 540-544.

Zbiek, R.M., Heid, M.K., Blume, G.W. & Dick, T.P. (2007). Research on Technology in Mathematics Education: A Perspective of Constructs. I: F.K. Lester (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

English abstract

Computer algebra systems (CAS) have the potential to be reform agents in undergraduate mathematics classrooms. Questions that address utility, pedagogy, and curriculum should be considered: How should CAS be implemented in mathematics classrooms? Are educators prepared to relinquish "traditional" coverage and replace it with CAS driven models? To what degree does CAS influence subject matter content and the manner in which this content is taught? In a review of the literature, this article highlights the constraints and affordances of CAS and presents a model of CAS use as an instrument for further inquiry