

CAS i folkeskolens matematikundervisning

med øget læringsudbytte for drenge på mellemtrinnet



Arne Mogensen, VIA
Læreruddannelsen
i Aarhus



Mette Hesselholt
Henne Hansen, VIA
Læreruddannelsen
i Silkeborg



Adrian Bull, VIA
Læreruddannelsen
i Aarhus

Abstract: Artiklen rapporterer et studie der skal afdække om brug af CAS-værktøjer (Computer Algebra Systems) i en matematikundervisning hvor rammen er undersøgende, eksperimenterende og procesorienteret, ændrer elevers tilgang til behandling af matematiske problemstillinger på en sådan måde at det øger elevernes viden, færdigheder og kompetencer. I forløbet medvirkede godt 500 elever fra ni kommuner ligeligt fordelt på forsøgs- og kontrolklasser på mellem- og afsluttende klasstrin. Vores undersøgelse viser at drenge på mellemtrinnet havde signifikant udbytte af adgang til et CAS-værktøj.

IT indgår som både mål og middel i folkeskolens matematikundervisning. Det er bl.a. et mål at eleverne udvikler hjælpemiddelkompetence, herunder at de kan bruge digitale værktøjer til matematiske undersøgelser, og at de kan vurdere muligheder og begrænsninger i anvendelsen.

En dansk ekspertgruppe formulerede disse spørgsmål (Matematikløftet, 2013):

- Hvor meget skal matematikfaget være forpligtet til at tilgodese en almen it-dagsorden?
- Hvordan påvirker it matematikundervisningens mål, og hvordan kan matematikfaget få gavn af den øgede brug af it i samfund og skole?
- Hvilke formål har it i matematikundervisningen, med henblik på om it er et middel eller et mål?
- Balancer: Gevinster og omkostninger ved it i matematikundervisningen.

Gruppen anbefalede en dybtgående undersøgelse og en didaktisk-pædagogisk diskussion af IT i matematikundervisningen. Det førte til en konference i 2014 med deltagelse af bl.a. Artigue der i mange sammenhænge har formuleret sig om faktiske og mulige succeser og fiaskoer ved brug af IT i matematik (2002).

Der er mange værktøjer til rådighed for matematiske beregninger, men der synes ikke at være så megen viden om *hvordan* brug af IT-værktøjer påvirker elevers problemløsning i folkeskolen. Dette projekt har i en afgrænset ramme bidraget til relevant viden om emnet, specielt spørgsmålet om og hvordan matematisk software som Computer Algebra Systemer (CAS) brugt som værktøj kan bidrage positivt til elevernes matematiklæring.

Forskning i matematikundervisning med anvendelse af CAS-programmer

Der er en del forskning om CAS-anvendelse i matematikundervisningen på gymnasieniveau – især internationalt – men næsten ingen på grundskoleniveau.

Drijvers' (2003) afhandling var bl.a. styret af dette forskningsspørgsmål: How can the use of computer algebra promote the understanding of algebraic concepts and operations?" I afhandlingen begrænses algebra til begrebet parameter.

Hans analyse viste at CAS gav både begrebsmæssige og tekniske vanskeligheder for eleverne:

“Samlet set tyder resultaterne af denne undersøgelse på et tæt og omvendt forhold mellem CAS teknikker og begrebsmæssig forståelse. Eleverne måtte opbygge instrumentel forståelse, der forenede tekniske og begrebsmæssige aspekter. Denne instrumentelle genese krævede tid og kræfter, og forhindringer skulle overvindes. Tilsyneladende tekniske vanskeligheder var titforbundet med manglende begrebsmæssig forståelse. [...] Som konsekvenser for undervisningen anbefaler vi udvikling af en ny didaktisk kontrakt, der fremmer en kollektiv instrumentering gennem fælles diskussioner og demonstrationer i klassen, og at man drøfter kongruens eller inkongruens mellem papir-og-blyant og CAS-teknikker.” (s. 326, vores oversættelse)

Zbiek et al. (2007) diskuterer bl.a. “representational fluency” (den mulige adgang til hidtil for svært fagligt indhold), “mathematical concordance” (match og mismatch fx mellem den matematik læreren intenderede med en bestemt teknologisk aktivitet og den matematik, eleven faktisk lærte gennem aktiviteten) samt “amplifiers and reorganizers” (ift. forstærkning eller reorganisering af faglige læringsmål). I deres omfattende gennemgang henviser de bl.a. til Drijvers (2003) der rapporterede hvordan CAS kan medvirke til højere ordens forståelse for elever i 9. og 10. klasse. CAS kan fun-

gere som mediator mellem teknologiens fysiske artefakt og elevernes tankemæssige handlinger. Denne proces kalder Drijvers og flere andre (Trouche, 2005) konstruktion af instrumentel genese (“construct of instrumental genesis”).

Forskere har søgt at identificere både produktive og uproduktive tilgange når elever anvender teknologi som CAS. Heid et al. (1998) har reviewet forskning i netop effekten af CAS, men blandt de 50 empiriske studier der indgik her, var der mange uden nogen markant positiv effekt af CAS på elevernes matematiklæring. De undersøgte udbytter faldt i fem kategorier: “Achievement, Affect, Behavior, Strategies and Understanding”. Der var studier der viste udbytte mht. problembehandling, men der peges på den nødvendige fortrolighed med en særlig CAS-syntaks. I syv studier af effekten på elevers begrebsmæssige forståelse viste de fem at CAS-eleverne fik bedre begrebsmæssig forståelse, mens de to andre ingen signifikant effekt viste.

Tynan og Asp (1998) viste i et mindre studie at CAS havde effekt på 9. klasseelevers ligningsløsning i før-algebra. De identificerede en del faktorer der kunne have betydning:

- Omfanget af elevernes CAS-adgang
- Lærernes viden, “belief” og foretrukne undervisningsstil
- Elevers algebraiske færdigheder og foretrukne læringsstil
- Elevernes motivation
- Strukturelle faktorer – konkurrerende pres på elev/lærer, tid
- Omfanget af kommunikation mellem forskere og undervisere
- Graden af lærerstøtte
- Opgavedesign – der understøtter hvilken måde CAS-værktøjerne bliver brugt på
- Opgavetyper – balancen mellem åbne og rutineopgaver.

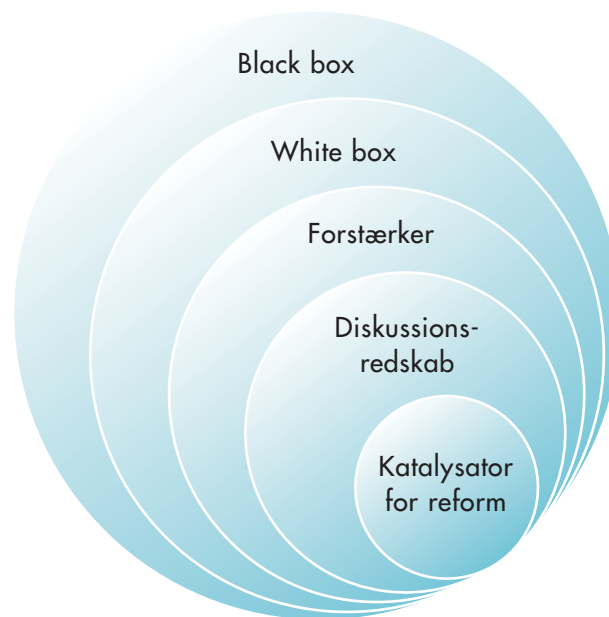
Konklusionen var at CAS syntes at have en vis indflydelse på de metoder eleverne valgte til ligningsløsning, og der var tegn på at CAS har hjulpet eleverne til at fokusere på at vælge hensigtsmæssige manipulationer. De fleste elever var glade for at bruge CAS til kontrol, og CAS så ikke ud til at mindske elevernes færdigheder med “papir og blyant”.

Der er endnu ikke megen dansk forskning om CAS-værktøjers effekt på grundskolens matematikundervisning. Derfor er der behov for undersøgelser der kan belyse dette område yderligere.

Jankvist og Misfeldt noterer (2015) at CAS i matematikundervisningen ikke entydigt har ført til et forventet større udbytte, samt at nyere forskning mest har fokuseret på at karakterisere læreprocesser (Artigue, 2002) og undervisningsprocesser (Tabach et al., 2013).

I Danmark indgår viden om anvendelse af CAS-værktøjer i undervisningsfaget

matematik i læreruddannelsen. Et forberedelsesmateriale til en prøveopgave fra sommeren 2013 omfattede en artikel af Nabb (2010) der diskuterer fem forskellige former for brug af CAS. De fem former repræsenterer en progression som vist i figur 1 hvor CAS bruges forskelligt afhængigt af målene for den konkrete undervisning. Det er således underviserens planlægning der sætter rammen for hvordan CAS-værktøjerne kommer til at virke for eleverne.



Figur 1. Fem former for brug af CAS.

1. Black box hvor man stoler på resultatet frembragt af CAS-værktøjet uden at reflektere nærmere over hvordan eller hvorfor.
2. White box hvor CAS-værktøjet bruges til at undersøge og forstå matematikken.
3. Forstærker hvor værktøjet forstærker intellektuel aktivitet igennem en let tilgang til at opdage regelmæssigheder gennem mange gentagelser.
4. Diskussionsredskab hvor man gennem oplæg og CAS-undersøgelser diskuterer de resultater der fremkommer.
5. Katalysator for reform hvor selve brugen af CAS-værktøjer fornyer undervisningen og elevernes måde at møde matematiske begreber på.

Når CAS ansues som et værktøj eller et middel til matematikundervisning og læring, må man overveje hvordan CAS så bedst bruges i et samspil med bl.a. lærerrolle, organisering af undervisning og andre undervisningsmidler. Heri indgår også vurdering af cost-benefit-karakter. CAS-anvendelse kræver øvelse og opmærksomhed for både underviser og elever.

Med Nabbs betegnelser kan CAS benyttes til at udvide og *forstærke kapaciteter* eleverne har erhvervet, udviklet og forstået i matematik, og som de behersker i ikke-komplekse situationer, til anvendelse i mere komplekse situationer hvor det er uoverkommeligt, mere tidskrævende eller på anden måde besværligt kun at benytte sig af de grundlæggende kapaciteter. Men CAS kan også træde ind blot som en *black box-leverandør* til erstatning for matematiske aktiviteter og processer som eleverne selv kun kender og forstår de mest indledende dele af, som de selv højst kan gennemføre i de allermest elementære situationer, og som de ikke har muligheder for selv at kunne gennemskue og ræsonnere over.

Samarbejdet med praksis

Danmarks Matematiklærerforening bad i 2014 om forskningsmæssig bistand i et forsøgsprojekt om CAS-værktøjer i folkeskolens matematikundervisning. Formålet var at afdække om brug af CAS-værktøjer i en undersøgende, eksperimenterende og procesorienteret matematikundervisning kan ændre elevens matematiske problembehandling på en sådan måde at det øger elevernes viden, færdigheder og kompetencer.

Efter indledende møder med forskerne beskrev Danmarks Matematiklærerforening projektet i en henvendelse til skoler i ni kommuner. De deltagende matematiklærere blev inviteret til et møde med introduktion til projektets rammer og fælles oplæg omkring undersøgende og eksperimenterende undervisning, procesorienteret opgaveløsning samt et oplæg omkring CAS-værktøjer. I forbindelse med projektet blev skolerne tilbudt brug af CAS-programmerne MatematiKan og TI-Nspire i skoleåret 2014-15 for de deltagende klasser og for skolernes lærere. Projektet var planlagt til at forløbe i klasserne i efteråret 2014.

Det var ønsket at forskningsdesignet kunne undersøge ligheder og forskelle i løsninger og løsningsstrategier mellem elever der har brugt CAS, og elever der har arbejdet uden CAS.

Metode

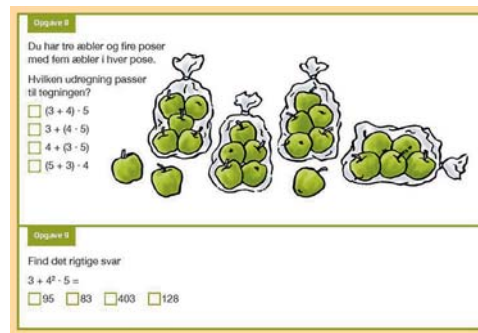
Der blev udviklet forskellige opgavetyper, herunder regnehistorier, færdighedsopgaver med de fire regningsarter og regnearternes hierarki, omskrivning af algebraiske udtryk, formler, variable og ubekendte samt opgaver i logik.

I hver opgave indgik en vurdering af hvilke matematiske kompetencer der særligt blev prøvet blandt problembehandling, modellering, kommunikation, ræsonnement og tankegang, hjælpemiddel samt repræsentation og symbolbehandling.

Opgaverne blev fordelt på "fritekst"-opgaver (med forklaring), matchopgaver, multiple choice-opgaver, indsæt rigtigt svar-opgaver samt logiske opgaver (sand/falsk).

Et opgavehæfte til prætest og posttest til hhv. indskoling, mellemtrin og ældste klassetrin blev udviklet af erfarne lærere og gennem korrekturrunder godkendt af forskerne. Bl.a. skulle det sikres at items i præ- og posttest var sammenlignelige mht. fagligt indhold, format, sværhedsgrad og genkendelighed. Der skulle også sikres et tilstrækkeligt og repræsentativt udvalg af items for hver eneste kompetence og faglige delområde.

Kompetencer	4.-6. klasse 49 items	
Ræsonnement og tankegang	Opgave 1-2 2 items	
Problembehandling	Opgave 3, 9, 13-16 17 items	↙ ↘
Hjælpemiddel	Opgave 4-7 16 items	
Repræsentation og symbolbehandling	Opgave 8, 10-12, 20 5 items	
Kommunikation	Opgave 17-19 9 items	



Figur 2. Opgaveeksempel fra prætest (4.-6. klassetrin). Hvert item blev tilknyttet en eller flere af de udvalgte kompetencer.

Forskningsdesignet skulle undersøge ligheder og forskelle i løsninger og løsningsstrategier for de elever der brugte CAS-værktøjer, og de elever der arbejdede uden, men i artiklen her rapporteres alene på baggrund af en opsummeret opgørelse af elevernes besvarelser målt som antal rigtige itembesvarelser.

Kvantitativ analyse af data fra projektet

Der blev gennemført en kvantitativ analyse af projektets resultater hvor udvalgte parametre blev signifikansvurderet. I denne analyse var det nødvendigt med en stringent definition af de variable der indgik. Det var også vigtigt at have datapunkter nok til at få tilstrækkelig forklaringskraft i den statistiske model.

Analysen blev derfor afgrænset til at undersøge om adgangen til CAS-værktøjer havde medført en ændring i elevernes evne til problemløsning, målt gennem de besvarede opgavesæt. Den kvantitativt undersøgte hypotese kan derfor formuleres således:

Er elevernes ændring i testscore signifikant påvirket af tilgangen til CAS-hjælpe midler, og er denne effekt afhængig af klassetrin, klasseidentitet (målt via parameteren "lærer") eller køn?

Det empiriske materiale fra projektet bestod som nævnt af en prætest og en posttest. Den variable er så forskellen mellem testscore i prætesten og i posttesten. Ud fra denne variabel blev elevernes udbytte i studiet analyseret. Målet med analysen var at undersøge hvorvidt adgangen til CAS-værktøjer kunne medføre en signifikant ændring i forhold til de elever der blev undervist uden adgang til CAS.

Der blev udarbejdet forskellige tests til mellemtrinnet (4.-6. klasse) og udskolingen (7.-10. klasse). De to populationer af data er derfor analyseret uafhængigt af hinanden.

Kompetencer Data Præ	Gennemsnit	Standardafvigelse
Ræsonnement og tankegang	5,1	2,44
Hjælpe midler	9,8	2,97
Repræsentation og symbolbehandling	3,9	1,86
Problembehandling	1,5	1,68
Kommunikation	2,9	1,75
Kompetencer Data Post	Gennemsnit	Standardafvigelse
Ræsonnement og tankegang	0,9	0,76
Hjælpe midler	16,6	4,26
Repræsentation og symbolbehandling	11,9	3,56
Problembehandling	8,2	2,56
Kommunikation	9,2	2,64

Tabel 1. Samlet testscore for en deltagende klasse. I den rapporterede analyse indgår alene ændringer i samlet testscore.

Idéelt set kunne man ønske et datasæt hvor den eneste forskel mellem elevgrupperne var tilgangen til CAS-værktøjer, men som enhver med tilknytning til undervisningspraksis vil vide, er der mange andre faktorer som indvirker på elevens udbytte af undervisningen, og det er naturligvis ikke muligt at kontrollere dem alle i selve undersøgelsen. Til gengæld er det muligt at inkludere nogle af dem i den statistiske analyse og dermed både kontrollere for konfunderende effekter og for samspil mellem adgang til CAS og andre faktorer.

Når man skal undersøge kvantitative effekter af mange faktorer på én gang, kræver det en statistisk model der kan rumme alle de faktorer som man forventer kan influere på datasættet, samt interaktionerne mellem disse faktorer. Analyserer man blot faktorerne enkeltvis, løber man ind i to typer vanskeligheder: For det første vil man overvurdere signifikansniveauet (populært sagt vil én ud af tyve tilfældige faktorer ved gentagne analyser af samme datasæt fremtræde som signifikante med en 5 %'s signifikansgrænse), og for det andet vil signifikante ikkelineære sammenhænge som skyldes interaktioner mellem flere faktorer, være umulige at analysere. De vil enten fremstå som ikke signifikante – eller fejlagtigt tilskrives én af de bidragende faktorer uden at sammenhængen mellem faktorerne afklares.

En analysemodel der tillader samtidig inklusion af mange faktorer, er den multifaktorielle variansanalyse. En variansanalyse kan forstås som et n-dimensionalt koordinatsystem hvor hver af de n-akser beskriver en variabel i analysen. Analysen undersøger om der kan tegnes en regressionslinje gennem koordinatsystemet som forklarer en signifikant andel af datapunkternes varians. På denne måde rummer variansanalysen både et signifikansmål og et effektmål (den andel af variansen der kan tilskrives en signifikant faktor).

Til at analysere materialet i undersøgelsen blev der brugt en multifaktoriel variansanalyse af typen GLM (Generalized Linear Model). I denne blev alle de kendte parametre indsat i testen som variable i analysen; det vil i denne sammenhæng sige: CAS-adgang, klassetrin, køn og lærer. I studiet deltager hver lærer kun med én klasse, så variabelen "lærer" i analysen dækker derfor reelt alle effekter der skyldes klasseidentiteten: både effekten af den specifikke lærers undervisning samt andre effekter der påvirker læringsmiljøet i den specifikke klasse.

Tekstboks 1 – Multifaktoriel variansanalyse

Multifaktoriel variansanalyse går kort fortalt ud på at se på den samlede varians i ændringen i testscore for alle elever i studiet og sammenligne denne samlede varians med variansen inden for de grupper som man ud fra analysens faktorer kan underinddele eleverne i. På denne måde kan variansen altså partitioneres, og varianskomponenterne kan signifikant testes gennem en F-test.

GLM-typen af variansanalyse er valgt fordi denne test kan rumme faktorielle data og ikke stiller strenge krav til fordelingen af datapunkter.

Tekstboks 2 – Model for variansanalyse

Den samlede varians er partitioneret i et sæt varianskomponenter som kan tilskrives hver enkelt faktor i datasættet, samt interaktionskomponenter der kan beskrive samspillet mellem de enkelte faktorer. Vores data omfatter faktorerne CAS, lærer, klassetrin og køn. Den mængde af variansen der ikke kan knyttes til faktorerne i modellen, kaldes residualvariansen og er sidste led i modellen.

En fuld model for variansanalyse af vores datasæt ville se ud som følger:

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\text{ÆndringScore}) = & \text{VAR}(\text{CAS}) + \text{VAR}(\text{Lærer}) + \text{VAR}(\text{Klassetrin}) + \text{VAR}(\text{Køn}) + \\ & \text{VAR}(\text{CAS} * \text{Lærer}) + \text{VAR}(\text{CAS} * \text{Klasse}) + \text{VAR}(\text{CAS} * \text{Køn}) + \text{VAR}(\text{Lærer} * \text{Klasse}) + \\ & \text{VAR}(\text{CAS} * \text{Lærer} * \text{Køn}) + \text{VAR}(\text{CAS} * \text{Lærer} * \text{Klasse}) + \text{VAR}(\text{Lærer} * \text{Klasse} * \text{Køn}) + \\ & \text{VAR}(\text{CAS} * \text{Lærer} * \text{Klasse} * \text{Køn}) + \text{VAR}(\text{Residual}). \end{aligned}$$

Det er ikke muligt at analysere denne model direkte da antallet af frihedsgrader i modellen overstiger antallet af datapunkter (gennemførte tests) i studiet. Derfor er der gennemført en systematisk modelreduktion, så først højere ordens interaktionskomponenter er fjernet indtil antallet af frihedsgrader muliggjorde analysen.

Derefter blev de eliminerede modelparametre substitueret med dem der ikke havde signifikant effekt i den reducerede model indtil modellen fik den størst mulige forklaringskraft.

Denne optimerede model rummer følgende parametre:

$$\text{VAR}(\text{ÆndringScore}) = \text{VAR}(\text{CAS}) + \text{VAR}(\text{Lærer}) + \text{VAR}(\text{Klassetrin}) + \text{VAR}(\text{Køn}) + \text{VAR}(\text{CAS} * \text{Køn}) + \text{VAR}(\text{Residual}).$$

Den endelige analyse viser to tydeligt signifikante faktorer for eleverne på mellemtrinnet, mens kun én faktor har signifikant indflydelse hos eleverne i udskolingen: Variablen "lærer" er stærkt signifikant ($p < 0,0005$) i begge datasæt. Denne varianskomponent rummer som nævnt både effekter specifikke for den enkelte klasse (læringsmiljøet i klassen, aktuel klassehistorie, omstændigheder omkring testens afvikling i den enkelte klasse etc.) samt effekter af den enkelte lærers undervisning.

Modelfaktor	Frihedsgrader	F-værdi	Signifikansniveau
CAS-adgang	1	1,30	0,26
Køn	1	0,34	0,56
Lærer	10	18,59	*0,00
Køn*CAS-adgang	1	4,44	*0,04

Tabel 2. Tabellen viser frihedsgrader, testværdier (F-test) og de resulterende p-værdier (signifikansniveau) i vores analyse af eleverne på mellemtrinnet. Signifikante værdier er markeret med en stjerne (*). Frihedsgraderne bestemmes af antal mulige faktorer fratrukket 1. F-værdier og signifikansniveauer er beregnet med SPSS-programmet.

Den anden tydeligt signifikante faktor for mellemtrinnets elever er interaktionskomponenten "Køn*CAS". Denne komponent siger hvordan udbyttet af CAS-værktøjer har påvirket ændringen i elevscore, henholdsvis i drengegruppen og i pigegruppen. Analysen viser ingen overordnet effekt af CAS-adgang i sig selv eller af elevernes køn i sig selv. Der er således ikke overordnet forskel på pigers og drenges score gennem undersøgelsen og heller ikke overordnet forskel på klasser med eller uden adgang til CAS. Man kan ikke desto mindre se at når drenge på mellemtrinnet får adgang til CAS-værktøjer, så har de oplevet en signifikant øget score i dette studie.

Køn/CAS	Uden CAS	Med CAS
Dreng	-6,2	-1,7
Pige	-3,7	-3,1

Tabel 3. Tabellen viser hvorledes den gennemsnitlige forventede testscore på mellemtrinnet påvirkes af adgang til CAS-værktøjer i henholdsvis pigegruppen og drengegruppen. En dreng med adgang til CAS kan således forventes at score gennemsnitligt 4,5 point højere hvis klassen fik adgang til CAS-værktøjer. Pigegruppen oplevede ikke samme effekt.

De negative tal indikerer at den samlede score for alle elever er mindre i posttesten end i prætesten. Posttesten har altså været vanskeligere end prætesten. Men som det fremgår af tabel 3, viser modellen en fremgang på 4,5 testpoint i vores forventning til drenge fra mellemtrinnet hvis klassen har adgang til CAS, i forhold til drenge fra klasser undervist uden CAS-værktøjer. Denne effekt ses ikke i pigegruppen hvor adgang til CAS medfører en fremgang på kun 0,6 point i forventet testscore.

Reliabilitet og validitet

Der er to centrale nøglespørgsmål man altid bør være opmærksom på når man forsker. Det ene er hvor reliabel en undersøgelse er, og det andet er hvor valid en undersøgelse er.

Reliabiliteten handler dels om det *tekniske*: Er der materiale nok til at man troværdigt kan drage konklusioner? Og dels om hvor høj grad af *objektivitet* der er i undersøgelsen: Vil andre forskere med samme datamateriale så drage de samme konklusioner?

Validiteten handler om hvor gyldig undersøgelsen er i forhold til det man gerne vil undersøge. Derfor er det lettest at få høj validitet hvis man undersøger forholdsvis simple elementer i matematikundervisningen, som fx om eleverne kan multiplicere to tal. Det er meget svært at opretholde høj validitet hvis man undersøger mere komplekse elementer af matematikundervisningen, som fx de matematiske kompetencer.

Både validitet og reliabilitet er afhængige af de elever der deltager i undersøgelsen, både af hvilke elever der deltager (om de er repræsentative), og af antallet af elever der er med i undersøgelsen.

I forhold til den tekniske del er der i projektet valgt et passende antal opgaver der matchede de elementer af matematikundervisningen som skulle testes. I forhold til graden af objektivitet har der været åbenhed omkring data og kun været tolket og behandlet data ud fra alment anerkendte metoder, således at andre forskere også ville komme til de samme konklusioner ud fra vores data.

I forhold til validiteten er kompleksiteten holdt nede ved at se på målformuleringer fra fælles mål. Intentionen var oprindeligt at se på mere komplekse dele af matematikundervisningen, men da der ikke var andre danske undersøgelser at bygge videre på, blev det besluttet at teste bredt og alene se på samlet testscore. Opgaverne blev dog kodet, således at man yderligere kunne undersøge hvordan opgavesvar forholder sig til mål og kompetencer. Konsekvensen er at vores undersøgelse både opretholder høj validitet og reliabilitet når man ser på ændringen af elevernes score mellem de to test og sammenligner kontrol- og CAS-klasser. Det ville ikke være tilfældet hvis man fx havde haft fokus på de matematiske kompetencer.

Undersøgelsen kan dog kritiseres for at der ikke var mulighed for at vælge klasser ud tilfældigt og sikre en passende geografisk og socioøkonomisk repræsentation.

I denne artikel er fremlagt tendenser der ses i vores projekt, men der er brug for yderligere forskning før vi kan generalisere til *alle* elever i Danmark.

Diskussion af resultaterne

Når man indsamler kvantitative data, anbefales det at man så vidt muligt ensretter alle de forhold der kan påvirke disse indsamlede data, så man kan sammenligne

entydigt på de fremkomne data. Men praksis i folkeskolens matematikundervisning ændres løbende og bl.a. bestemt af lovgivning, arbejdstid, elevforudsætninger samt læreres holdning og erfaring.

Matematiklærerne i projektet har modtaget vejledning i at planlægge og udføre en "undersøgende, eksperimenterende og procesorienteret" matematikundervisning, og det har været den åbne ramme for både kontrol og testklasser. I vores undersøgelse af CAS-værktøjer i undervisningen har det ikke været meningen herudover at ensrette eller undersøge praksis og flow i de deltagende læreres matematikundervisning, men blot at undersøge CAS-værktøjets effekt på elevers udbytte når det bliver integreret i den aktuelle matematikundervisning.

Der er mange andre muligt bestemmende forhold i denne undersøgelse der *ikke* er en RCT (randomized controlled trial). Lærerne har tilmeldt sig fordi de selv var interesserede i CAS. Og man kan gætte på at lærerne i de deltagende CAS-klasser var særligt entusiastiske og/eller dygtige. Alle lærere har formentlig også arbejdet meget forskelligt med det valgte delemne tal i perioden mellem de to test, de har måske haft et forskelligt antal matematiktimer med klasserne i projektet, og de har forskellig forudgående erfaring med brug af CAS-værktøjer.

Den kvantitative metode der er valgt i analysen, er derfor afgørende for muligheden for at påvise en effekt af CAS-værktøjerne. I artiklen er der redegjort for hvordan den kvantitative analyse er gennemført med et bevidst og begrundet metodevalg.

Men kønsforskellen er et overraskende fund som det bliver interessant evt. at få bekræftet i en fortsat undersøgelse af CAS i folkeskolens matematikundervisning. I Danmark ved vi godt at drenge og piger viser forskellig tilgang til undersøgelser og eksperimenter i bl.a. naturfag. Derfor er der eksperimenteret med kønsopdelt undervisning i fysik/kemi i korte perioder på flere folkeskoler. Det er ikke en anbefaling her, men i det fortsatte projekt vil vi supplere nye testdata med data om undervisnings- og arbejdsform der kan bruges i en evt. triangulering for om muligt at bidrage til en forklaring.

Forgasz & Tan (2010) har også beskrevet køn som en faktor der kan have betydning for effekten af CAS-adgang. De opdagede at drenge scorede klart højere end piger i CAS-delen af en australsk undersøgelse af testscore på gymnasieniveau (12. klasse). Eleverne var i 2002-2008 fordelt i parallelle forløb på "Intermediate level" (sammenligneligt med det danske B-niveau): *Mathematical Methods* hhv. *Mathematical Methods CAS*.

Som antydet er det blevet muligt at fortsætte undersøgelsen af den mulige effekt af CAS i et lignende forsøgsdesign med mange kontrol- og forsøgsklasser. Og i fortsættelsen af forsøget er det aftalt også at samle kvalitative data fra enkelte klasser. Bl.a. gennem forskerbesøg og logs eller andre data fra lærerne.

Her vil det være interessant at identificere Nabbs (2010) forskellige former for brug af CAS, måske især som:

- “White box” der er en pædagogisk brug af værktøjet hvor CAS-værktøjet bruges til at undersøge og forstå matematikken
- “Forstærker” hvor værktøjet spiller en rolle som forstærker af intellektuel aktivitet igennem en let tilgang til at opdage regelmæssigheder gennem mange gentagelser
- Diskussionsredskab hvor eleverne gennem oplæg, undersøgelser eller andet deltager i diskussion om de resultater der fremkommer.

Cheung og Slavin (2013) opsummerede 74 undersøgelser af effekt af teknologiske hjælpemidler i matematikundervisning og påpegede en række af svagheder i dataindsamling der påvirkede undersøgelsernes validitet negativt. Disse svagheder var bl.a. fravær af kontrolgrupper, undersøgelser baseret alene på posttests så elevgruppernes sammenlignelighed ikke kan undersøges, samt decideret subjektiv udvælgelse af datapunkter.

Vores undersøgelse var tilrettelagt med henblik på at undgå disse designmæssige faldgruber og sikre at den på trods af sin relativt begrænsede størrelse har en høj grad af troværdig og gyldighed. Det er værd at bemærke at en simpel t-test af de gennemsnitlige ændringer i testscore i studiet, som bruges i rigtig mange pædagogiske undersøgelser, ville have konkluderet at der ikke var signifikant effekt af CAS-værktøjer for elevernes udbytte da den påviste effekt ville have været maskeret af de andre faktorer vi har inkluderet i analysen.

Undersøgelsen har vist evidens for at brug af CAS-værktøjer kan påvirke drenges udbytte positivt i matematikundervisningen.

Referencer

- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, s. 245-274. Lokaliseret den 19. november 2015 på:
www.lkl.ac.uk/research/come/events/freudenthal/1-Presentation-Artigue.pdf.
- Cheung, A. & Slavin, R.E. (2013). *The Effectiveness of Educational Technology Applications for Enhancing Mathematics Achievement in K-12 Classrooms: A Meta-Analysis*. Baltimore, MD: Johns Hopkins University, The Center for Research and Reform in Education. Lokaliseret den 19. november 2015 på:
<http://dx.doi.org/10.1016/j.edurev.2013.01.001>.
- Danielsen, C. (2011). *CAS-værktøjer i gymnasieskolens matematikundervisning. Gymnasielærenes vurdering af CAS-værktøjernes effekt på elevernes algebraiske færdigheder og konsekvenserne deraf*. Aarhus Universitet (kandidatafhandling).

- Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment: Design Research on the Understanding of the Concept of Parameter*. Dissertation, Freudenthal Institute, Utrecht.
- Forgasz, H. & Tan, H. (2010). *Does CAS Use Disadvantage Girls in VCE Mathematics?* Lokaliseret den 19. november 2015 på: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ891807.pdf>.
- Heid, M.K., Blume, G., Flanagan, K., Iseri, L., Deckert, W. & Piez, C. (1998). *Research on Mathematics Learning in CAS Environments*. Paper fra 11th International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, New Orleans, LA.
- Jankvist, U.T. & Misfeldt, M. (2015). CAS-Induced Difficulties in Learning Mathematics? *For the Learning of Mathematics*, 35(1), s. 15-20.
- Matematikløftet (2013). Første notat udarbejdet af ekspertgruppen i matematik. Undervisningsministeriet. Lokaliseret den 19. november 2015 på: www.uvm.dk/~media/UVM/Filer/Udd/Folke/PDF13/Okt/131011%20matematikekspertgruppens%20anbefaling.pdf.
- Nabb, K.A. (2010). *CAS as a Restructuring Tool in Mathematics Education*. Proceedings of the 22nd International Conference on Technology in Collegiate Mathematics.
- Tabach, M., Hershkowitz, R. & Dreyfus, T. (2013). Learning Beginning Algebra in a Computer-Intensive Environment. *ZDM*, 45(3), s. 377-391.
- Trouche, L. (2005). *Instrumental Genesis, Individual and Social Aspects. I: D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (red.), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators (s. 197-230)*. New York: Springer.
- Tynan, D. & Asp, G. (1998). Exploring the Impact of CAS in Early Algebra. I: C. Kanen, M. Goos & E. Warren (red.), *Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (vol. 2, s. 621-628). Brisbane: MERGA. Lokaliseret den 19. november 2015 på: www.merga.net.au/documents/RP_Tynan_Asp_1998.pdf.
- Zbiek, R.M., Heid, M.K. & Blume, G.W. (2007). Research on Technology in Mathematics Education: The Perspective of Constructs. I: F.K. Lester (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte: Information Age Publishing.

Den statistiske analyse er foretaget med analyseprogrammet SPSS Statistics for Windows, version 22.0, Armonk, NY: IBM Corp.

English abstract

We report on a study designed to identify effects of the use of CAS tools (Computer Algebra Systems) on learning outcomes in mathematics teaching. The study investigates teaching mathematics in an exploratory, experimental and process-oriented setting, and aims to change students' approach to the treatment of mathematical problems in the direction of increased knowledge, skills and competences. More than 500 students from nine municipalities, equally divided between experimental and control classes in middle and final stages, participated in the study. Our findings reveal that boys in middle school experienced significant benefits from access to a CAS tool.