Hvem skal samle handsken op?


Henrik Peter Bang,
Christianshavns Gymnasium,
Center for Computerbaseret
Matematikundervisning, Institut
for Matematiske Fag, KU


Niels Grønbæk, Institut
for Matematiske Fag, KU,
Center for Computerbaseret
Matematikundervisning, Institut
for Matematiske Fag, KU


Claus Richard Larsen,
Christianshavns Gymnasium,
Center for Computerbaseret
Matematikundervisning, Institut
for Matematiske Fag, KU

Kommentar til *Udfordringer ved undervisning i enzymer,* MONA 2015-1, s. 49-65

I artiklen *"Udfordringer ved undervisning i enzymer"* anføres de studerendes matematikberedskab som en væsentlig stopklods. Problematikken er velkendt og ældgammel: Matematikken visner når den omplantes til nye faglige bede, og for at blive i billedet, skylden lægges oftest på planteskolen, snarere end på den nye gartner. I artiklen anføres, at mange studerende i det betragtede kursus ikke formår at følge og fatte omskrivningen fra Michaelis-Menten ligningen til Lineweaver-Burk ligningen endsige indser formålet med de besværlige manipulationer.

Hvad er egentlig problemet?

Lad os først se hvad der kræves af matematiske færdigheder. I ligningerne optræder både variable (v og $[S]$ og faste størrelser (V_{max} og K_m). De studerende skal kunne udføre algebraiske manipulationer (abstrakt brøkregning) med fokus på de variable på venstre og højre side af lighedstegnet og undervejs sammenholde venstre- og højresiderne. Dernæst skal de studerende kunne adskille variable og modelparametre, foretage variabeltransformation og kombinere modelparametre til nye modelparametre, således at ligningen bringes på den kendte form $y = a \cdot x + b$ med

$$y = {}^{1}/_{v},\ x = {}^{1}/_{[S]},\ a = {}^{K_m}/_{V_{max}},\ b = {}^{1}/_{V_{max}}.$$

Alt dette er rent operationelt og kunne i princippet helt eller delvist udføres med et passende it-værktøj. Under alle omstændigheder er det rutiner, der klart ligger inden for det præuniversitære ansvarsområde.

Matematikdidaktikeren A. Sfard (Sfard (1991)) beskriver matematiske entiteter som en proces-struktur dualitet, bestående af en operationel side og en objekt side, fx "at tælle" og "tal". Dette er foruden at være en del af matematikkens ontologi også et vilkår for læring. To af Sfards hovedpointer er, at for den lærende vil den begrebslige status af en matematisk entitet træde frem gennem operationel tilgang og at den fulde begrebstilegnelse først er opnået når begrebet kan indgå i operationer på et højere niveau. Man må kunne tælle for at forstå hvad et tal er, men den fulde forståelse af talbegrebet kræver at man kan manipulere tal som ting i sig selv og ikke blot som tegn der repræsenterer operationer. Overgangen fra operationer til abstrakte objekter har flere trin og slutter i det Sfard kalder *reifikation*. I denne overgang kan der opstå en ond cirkel. Reifikationen kræver at man manipulerer begrebet før det er fuldt forstået, en proces med fare for kognitive frustrationer. Det kan resultere i at den lærende falder tilbage til et tidligere udviklingstrin (tæller på fingre), opfatter matematik som en hokuspokus af uforståelige regler man bare er underlagt, eller helt giver op. Artiklens citater fra studerende er evidens for denne onde cirkel.

Ovenfor er beskrevet operationelle krav til den studerende. På det strukturelle plan kræves (1) et *avanceret variabelbegreb*, således at selve variabeltransformationen giver mening og ydermere at den lineære *model* ikke blot fremstår som en ret linje i et koordinatsystem, men er resultatet af en transformation der som mål har denne bekvemme *repræsentation*, (2) en forståelse af at *lighedstegn udtrykker en relation* mellem variable, (3) tilbundsgående indsigt i det logiske begreb *ensbetydende*, herunder at ensbetydende ligninger udtrykker identiske relationer. Opfyldelsen af disse krav til strukturel indsigt skal endvidere være på et taksonomisk niveau hvor kravene kan imødekommes i alle mulige symbolscenarier (fra matematikbrugende fag). Dette er stadig inden for det præuniversitære ansvarsområde, men faktisk ret avanceret.

I Sfards model for læring kræver den her skitserede reifikation omfattende operationelt arbejde, dvs. at gymnasieeleverne skal have udført de skitserede operationer i mange sammenhænge. Det er naturligvis vigtigt at disse operationelle miljøer faktisk kan føre til begrebstilegnelse. To forhold bør nævnes. (1) En automatreaktion på de matematiske stopklodser er at udslynge lommeregnerforbandelsen: Man lærer intet når man trykker på knapper og solve'r. Det er rigtigt at hvis it-værktøjer udelukkende bruges instrumentelt som genveje til de eftertragtede "to streger under", forbliver elevernes tilegnelse af matematiske entiteter på et infantilt operationelt niveau. (2) Hvis matematiske entiteter skal være tværfagligt robuste, fordrer det at det matematikrekvirerende fag bidrager. Dette kræver en indsats uden for matematiklokalet. Hvad er virkeligheden bag artiklens "… det såkaldte Lineweaver-Burk-plot indføres allerede i gymnasiets bioteknologi"? Man kunne godt ønske sig at læreplaner med tværfagligt samarbejde med matematik udviste større bevidsthed om proces-struktur dualiteten og tog deres del af ansvar for reifikationen, herunder hvad der ligger bag lommeregnerforbandelsen. Dette ville i øvrigt give et betragteligt løft af tværfaglighed i sig selv.

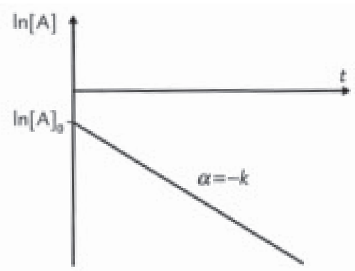
Et spadestik dybere. Hvad er gartnerens arbejde? Lidt gymnasial virkelighed

Michaelis-Menten ligningen og evt. omformning til Lineweaver-Burk ligningen er som så mange konkrete – og nyttige – ligninger i andre fag end matematik sjældent genstand for en selvstændig behandling i matematiktimerne. Matematikfagligt vil man i gymnasiet derfor ofte kun møde den (og andre ligninger) i forbindelse med tværfaglige samarbejder f.eks. i SRO eller SRP eller måske i almen studieforberedelse (AT).

Her opleves konkret at interessen ofte ikke ligger i modelleringsprocessen – men mere i hvordan modellens resultater kan bruges.

En udmærket gennemgang i bogen Basiskemi (Nielsen & Axelsen (2011)) omkring reaktionskinetik ender på et tidspunkt ud i flg. graf:

Figur 33. For en første ordens reaktion er ln[A] en lineær funktion af tiden *t*.



På sin vis er der et stort matematikindhold, men det er ikke genstand for behandling. Når man gennemfører øvelser, handler det i praksis om at bestemme hældningen (og så se på hvordan den f.eks. afhænger af temperaturen). Der gennemføres måske et enkelt fælles forsøg hvor den overordnede sammenhæng etableres (med læreren som primær forsøgsudfører), mens eleverne blot skal måle to koncentrationer (en til start, til tiden t = 0, og en anden når forsøget slutter) og dermed har man to punkter til fastlæggelse af (-) k.

Fra matematikvinklen er pointen at arbejde med ligninger (hvad enten det drejer sig om Michaelis-Menten eller andre) giver anledning til nogle almene problemstillinger:

- er der grundlæggende tale om ligning eller funktionsudtryk og hvad er i sidstnævnte tilfælde de variable (og hvad er konstanter)?
- hvilken repræsentation er fagligt hensigtsmæssig (eller blot mulig)?
- hvilke egenskaber er det interessant at få fat i (nulpunkter, hældning, skæring med 2.akse ...)?
- måske er der relevante algebraiske omformninger som belyser eller anvender allerede lært matematik (eller giver anledning til noget nyt), fx fordi man skal arbejde med dimensionsløse størrelser;
- endeligt må man overveje hvilken CAS platform der skal trækkes på. I mange henseender er Excel eller LoggerPro jo hensigtsmæssig når data skal indtastes/indlæses, mens f.eks. Maple og Ti Nspire tilbyder mere troværdig algebraisk behandling.

Ser man nøjere på disse pointer, er de jo langt fra kun matematikfaglige. Der indgår mange strukturelle komponenter fra "det andet fags" kontekst, fx de enheder man måler i, den måde man (historisk) plejer at vise og analysere data på, den måde emnet fremstår i den ikke-matematiske tekstbog og de programmer/hjælpemidler som læreren behersker. Men der indgår frem for alt også forløbets eller øvelsens hensigt eller de faglige læringsmål man har for øje.

Eksemplet ovenfor med at man hurtigt reducerer den praktiske matematik til at måle to punkter og bestemme en hældning – giver næppe er retvisende billede af hvordan (biokemi-)faget egentlig praktiseres, mere et billede af at man forkorter og trivialiserer læringsveje – hvilket måske i en konkret øvelses situation er fornuftigt. Men som almen praksis giver det et forkert billede af hvordan den komplicerede modelleringspraksis egentlig forløber.

Som det ser ud i gymnasiet er det tit kun fysik der på B niveau trækker med på matematikvognen. Mange fysiklærere har også matematik og formår f.eks. at inddrage Maple ved siden de andre programmer så man på den måde løfter (lidt) med på CAS kompetencer.

I tværfaglige forløb som AT hvor fagenes metoder skal spejle hinanden falder matematik ved siden af fordi det ofte ikke er de matematisk modellerende sider af de andre fag der er fremme (men netop andre metoder – samfundsfaglige kvalitative, eksperimentelle osv.); de opfattes som fagligt svære.

Lidt sammenfattende kan man sige at artiklen i afsnittet om matematik forudsætninger sætter fokus på et meget relevant problem. I matematik handler det om at faget i dag skal sættes sammen med rigtig mange anvendelser – allerede i gymnasiet. Og at det er en udfordring der må takles samtidig med at CAS værktøjerne forandrer fagligheden og nye elevtyper skal inddrages. Men det handler også om, at de fag der ønsker at trække på matematik inddrager nogle af de didaktiske overvejelser som matematiklærerne ellers står alene med.

Referencer

Sfard, Anna (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Nielsen, O. V. & Axelsen V, (2011). Basiskemi,.Haase og Søn.