Når matematikere undersøger matematik

– og hvilken betydning det har for undersøgende matematikundervisning


Mikkel Willum Johansen, *Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet*


Morten Misfeldt, *Institut for Læring og Filosofi, Aalborg Universitet*

Abstract: *I denne artikel vil vi beskrive hovedresultaterne fra et kvalitativt interviewstudie vi har lavet af 13 aktive matematikeres praksis. Vi vil kort beskrive hvordan matematikere vælger problemer, hvordan de griber arbejdet med problemerne an, og hvilke aspekter af deres arbejde de præsenterer i forskningsartikler. Til sidst vil vi diskutere hvorvidt viden om professionelle matematikeres praksis kan og bør have indflydelse på diskussioner omkring undervisningsfaget matematik. Vi vil i den forbindelse beskrive hvordan resultaterne fra vores undersøgelse har betydning for diskussionerne om hvordan elever skal arbejde med (1) problemer og (2) repræsentationer, metaforer og IT-værktøjer.*

1: Forskningspraksis og undervisningspraksis omkring matematiske undersøgelser

Hvordan arbejder man undersøgende med matematik? Hvad vil det sige at være på jagt efter et godt matematisk problem? Hvordan finder man problemer, og hvordan går man i gang med at løse dem? Hvilke værktøjer og repræsentationer bringer man i spil i arbejdet? Matematisk problembehandling, repræsentation og værktøjsbrug anses ofte for at være nogle af de vigtigste mål for matematikundervisning både nationalt (Niss, Højgaard Jensen & Undervisningsministeriet, 2002; Undervisningsministeriet, 2010) og internationalt (OECD, 2013). I denne artikel vil vi søge inspiration til elevers undersøgende arbejde med matematik ved at studere matematikforskeres arbejde med problemvalg, problemløsning og brug af repræsentationer og teknologi. Vi vil også diskutere i hvilken grad professionelle matematikeres praksis giver brugbar viden til diskussionerne om hvordan elever bør arbejde undersøgende i matematikundervisningen.

Inden for naturfagsdidaktik har der i de seneste par årtier været øget fokus på at undervise i undersøgende processer frem for udelukkende at tilegne sig fakta (Alberts, 2013; European Commission, 2007; National Research Council (U.S.), 1996). Denne bevægelse går under betegnelsen "Inquiry Based Science Education" (IBSE) og har stor betydning i både europæisk og amerikansk uddannelsespolitik og -forskning. Denne procesorienterede tilgang er i en række store europæiske projekter udvidet til at dække matematik, og man taler derfor om "Inquiry Based Mathematics Education" (IBME) eller "Inquiry Based Science and Mathematics Education" (IBSME) (Baptist, 2012; Dorier & Maaß, 2012). Et af de væsentligste udgangspunkter for inquiry-tilgangen til undervisning er at eleven skal lære at udforske verden på en måde der er sammenlignelig med forskerens undersøgelser. Denne tilgang ligger på sin vis i naturlig forlængelse af en længere tradition for at fokusere på undersøgende aktiviteter i matematikundervisning. I angelsaksisk sammenhæng betegner man ofte et sådant fokus med udtrykket "konstruktivistisk pædagogik" eller en "reformtilgang" til matematikundervisning (Boaler, 2002; Cobb & Yackel, 1996). I centraleuropæisk sammenhæng har teorien om didaktiske situationer (Brousseau, 1997) og realistisk matematikundervisning (Freudenthal, 1991) haft stor betydning for et sådant processuelt fokus.

Den seneste IBSME-trend adskiller sig dog fra den tidligere tradition ved eksplicit at italesætte forskning og undervisning som kontinuert forbundne (typisk med henvisningen til Deweys forståelse af begrebet "inquiry") hvorved det også er meningsfuldt at bruge forskeres praksis som relevant inspiration for undervisning og at italesætte undervisningsprocesser som forskning og undersøgelsesveje (European Commission, 2007; Winsløw, Matheron & Mercier, 2013). Accepteres denne nære relation mellem forskning og uddannelse, er det væsentligt at lærere og uddannelsesforskere har en god forståelse af matematisk forskningspraksis. Det er vores ærinde med denne artikel at bidrage hertil ved at beskrive hovedresultaterne af en empirisk undersøgelse af matematikeres forskningspraksis og ved at give vores eget bud på hvordan disse resultater relaterer sig til to diskussioner inden for matematikkens didaktik, nemlig diskussioner af hvordan elever skal arbejde med problemer og med repræsentationer og værktøjer.

Arbejdet med matematiske problemer, repræsentationer og teknologier

Arbejdet med matematiske problemer står centralt i matematikkens didaktik. I den danske rapport *Kompetencer og matematiklæring* (Niss et al., 2002) og i efterfølgende nationale curricula for grundskolen fremhæves "problembehandlingskompetencen" der drejer sig om at kunne løse og opstille matematiske problemer. Udvikling af elevers evne til problemløsning har i det hele taget stået centralt i matematikkens didaktik (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1992; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Og arbejdet med at opstille matematiske problemer har ligeledes været dyrket som et selvstændigt område (Silver, 1994; Walter & Brown, 2005) hvor opstilling af problemer ses som en måde at arbejde med at gøre matematikken vedkommende for børn, blandt andet gennem modelleringsaktiviteter og ved at understøtte en løbende diskussion af hvilke situationer og spørgsmål der kan betragtes som matematiske.

Matematiske aktiviteter har altid benyttet sig af repræsentationer og værktøjer. I KOM-rapporten fremhæves da også både en repræsentationskompetence, en symbol- og formalismekompetence og en hjælpemiddelkompetence (Niss et al., 2002). Matematikkens semiotiske natur giver nogle særlige begrebsmæssige udfordringer fordi elever skal kunne skifte imellem forskellige måder at repræsentere det samme begreb på (Duval, 2006), og fordi de repræsentationer og værktøjer elever vælger at anvende har indflydelse på deres matematiklæring og på hvad de kan gøre med matematik (Hoyles & Lagrange, 2010; Trouche, 2005). Det er til tider vanskeligt at bringe brugen af digitale værktøjer i en retning der understøtter at eleven arbejder med matematikken og ikke blot får computeren til at løse opgaven for sig (Misfeldt, 2014). Endvidere kan de værktøjer og repræsentationer som man benytter sig af i matematik, få en særlig betydning for matematiklæring fordi de kommer til at spille en metaforisk rolle for dannelsen af matematiske begreber (se fx Núñes, 2004).

Sammenhængen mellem forskning og undervisning – inspiration og kritik eller transport af matematiske processer

Udgangspunktet for artiklen er den aktuelle diskussion om at udvide Inquiry Based Science Education til matematik, og artiklens empiriske indhold er en rapport over matematikeres forskningspraksis. Dermed bliver det vigtigt at forholde sig til ligheder og forskelle mellem forskningspraksis og elevens praksis i undervisningen.

Forskning i matematik er stærkt specialiseret og på mange måder en praksis der ligger langt fra undervisning. Alligevel er det naturligt at forholde sig til forskernes praksis når man overvejer hvad skolefaget matematik skal sigte imod. Således beskriver Schoenfeld (1992) det at "tænke som en matematiker" som et af matematikundervisningens mål, og flere didaktiske teoridannelser forholder sig til dette samspil. For Brousseau er der en klar kontinuitet mellem elevens arbejde med miljøet og forskeres arbejde med at udvikle ny matematik. Det er lærerens opgave at sikre at eleverne oplever at udvikle ny matematik (Brousseau, 1997). Denne idé er udtalt hos Freudenthal (1991) der beskriver dette arbejde som "guided reinvention" og lægger særlig vægt på at eleverne arbejder i situationer (eller miljøer) der lægger op til meningsfuld matematisering. Leone Burton (2004), der har undersøgt professionelle matematikeres arbejdspraksis fra et pædagogisk perspektiv, har det udgangspunkt at der er en sammenlignelighed mellem det at lære og det at opdage/udvikle ny matematik (mere om Burtons undersøgelse i næste afsnit).

På trods af disse argumenter er der også problemer forbundet med at tage sammenhængen mellem voksnes forskning og børns læring for givet idet både mål og kontekst er vidt forskellige i de to situationer. Matematikundervisningen på stort set alle niveauer må nødvendigvis sigte på mange andre karriereveje end forskning, og der er en implicit fare for at komme til at privilegere forskerkarrieren (frem for fx matematiks rolle i hverdagsliv, demokrati og produktion) ved at dyrke sammenligningen mellem forsker og matematikelev. Desuden er der helt forskellige institutionelle betingelser for det matematiske arbejde forskere og elever gennemfører (Winsløw, 2013).

Hvad ved vi om forskningsmatematikkens praksis?

I den sidste halvdel af det 20. århundrede har der fra flere sider været en øget interesse for matematikkens praksis. I matematikkens filosofi kan Davis & Hersh (1981) og Lakatos (1976) ses som tidlige eksempler, og i dag er "philosophy of mathematical practice" (Mancosu, 2008) en etableret underdisciplin af matematikkens filosofi hvor matematikkens praksis belyses både via arkivstudier af særlig indflydelsesrige matematikeres arbejde og via empiriske undersøgelser. Specielt er matematikeres vurdering af og syn på formelle beviser blevet belyst i både kvalitative og kvantitative studier (Müller-Hill, 2011; Inglis et al., 2013).

Tilsvarende findes der inden for matematikkens didaktik flere didaktisk orienterede empiriske studier af matematikkens praksis (Misfeldt, 2006; Inglis & Alcock, 2012). Den største og mest indflydelsesrige undersøgelse er dog Leone Burtons interviewundersøgelse af 70 forskeres opfattelse af deres arbejde med matematik (Burton, 2004). Studiet viser at matematikere oplever de undersøgende processer, hvor de får idéer og finder nye problemer og sammenhænge, som følelsesmæssigt givende. Spændingen ved at udforske ukendt land er en væsentlig drivkraft i matematikernes arbejde, og det samme er nydelsen ved at finde løsninger og den æstetiske glæde ved matematikkens skønhed. Intuition spiller desuden en vigtig rolle, og matematikerne ved at de kan fejle og gå i stå. Studiet viser desuden at forskningsmatematikere er en heterogen gruppe der benytter forskellige tænkestile. På baggrund af studiet anbefaler Burton at vi i matematikundervisningen i højere grad søger at kopiere de undersøgende aspekter af matematikken der opleves som nydelsesfulde af forskerne frem for at undervise i matematik som en klasse af etablerede fakta (Burton, 2004, s. 173 ff.).

2: Om undersøgelsen

På trods af det empiriske arbejde der er gjort, mangler der stadig en større forståelse af flere aspekter af forskningsmatematikerens praksis. Navnlig mangler der en større og mere detaljeret forståelse af de kognitive strategier matematikere benytter sig af i deres arbejde, herunder en bedre forståelse af deres brug af IT-værktøjer. Brugen af IT-værktøjer er ganske vist behandlet i Misfeldt (2006), men primært ud fra deres funktion i skrive- og kommunikationsprocesser. Burton berører slet ikke brugen af IT-værktøjer og behandler kun det kognitive aspekt ved at identificere matematikernes tænkestile. Med vores undersøgelse ønskede vi at forstå matematikerens kognitive strategier ud fra en teoretisk ramme der bygger på nyere kognitiv teori (Johansen, 2010, 2013), og vi ønskede at opnå en forståelse af IT-værktøjers generelle rolle i matematikerens arbejde. Da vi havde foretaget de første fire interviews, blev vi desuden opmærksomme på at matematikernes strategiske overvejelser i forbindelse med problemvalg kunne gøres til genstand for en grundigere analyse end den man finder i Burton (2004, s. 125 ff.), og vi inddrog derfor dette som et tredje hovedelement i vores undersøgelse.

Rent metodisk bestod undersøgelsen af 13 semistrukturerede interviews med aktive matematikere ansat på danske universiteter. Alle interviews blev transskriberet, kodet og analyseret med en grounded tilgang (Strauss & Corbin, 1990). Alle de direkte citater der gengives herunder, er blevet oprenset og hvor nødvendigt oversat til dansk. En detaljeret beskrivelse af interviewmetode, interviewguide, sampling-kriterier, kodning og analyse findes i Misfeldt & Johansen (u.å.).

3: At arbejde med forskning i matematik[1]

Hos de matematikere vi interviewede, var arbejdet med matematisk forskning inddelt i en række tydeligt adskilte elementer der på skift blev inddraget. I dette afsnit vil vi kort gennemgå disse elementer med særlig vægt på de elementer hvor vores undersøgelse gav nye resultater med uddannelsesmæssig relevans.

Problemvalg

Da vi foretog de første fire interviews, indledte vi med spørgsmålet "Hvordan angriber du et matematisk problem?" Ingen af de interviewede svarede direkte på spørgsmålet, men skiftede i stedet emne og gav sig spontant til at tale om problemvalg.

I de øvrige ni interviews tog vi problemvalg op som et eksplicit tema i vores interviewguide. Her fik vi bekræftet at de arbejdende matematikere betragter problemvalg som et væsentligt element i deres praksis. Problemvalg betragtes som vanskeligt, og det at vælge gode problemer er typisk en kompetence man som matematiker først opøver relativt sent i sin karriere.

Følgende tre hensyn spillede en afgørende rolle i de interviewede matematikeres valg af problemer (Misfeldt & Johansen, u.å.; Johansen & Kragh, 2014, s. 140):

1 I Misfeldt & Johansen (u.å.) findes en dybdegående analyse af spørgsmålet om problemvalg. Vi præsenterer her hovedkonklusionerne fra denne analyse. Undersøgelsens hovedresultater er desuden blevet kontekstualiseret i en bredere matematikfilosofisk sammenhæng i Johansen & Kragh (2014, s. 140 ff.).

- Problemet skal være interessant for mig.
- Problemet skal være egnet til mig og have en passende sværhedsgrad. Det skal være så let at jeg kan løse eller i det mindste arbejde med det, men samtidig så svært at løsningen ikke vil blive anset for triviel.
- Andre i relevante dele af det matematiske samfund skal anse problemet for interessant.

Kriterierne rummer et tydeligt element af *metakognition*: Man er nødt til at vide hvad man kan og er god til for at kunne vurdere om man har en rimelig chance over for et givet problem, og desuden skal man have en fornemmelse af hvad man er bedre til end andre matematikere så man kan vælge problemer hvor man kan yde et særligt bidrag.

Litteratursøgning

I processen med at vælge et nyt problem nævner mange af respondenterne afsøgning af litteraturen som en vigtig opgave. Hvad ved man om dette og relaterede problemer? Hvilke metoder er bragt i anvendelse af andre? Er problemet overhovedet interessant? Kan jeg omformulere problemet så det bliver interessant?

Afsøgning af viden og litteratursøgninger spiller i det hele taget en stor rolle i matematikernes arbejde. For at være opdateret på forskningsfronten inden for deres felt læser og skimmer de løbende mange artikler der relaterer sig til deres interesser. Flere af de interviewede bruger desuden en bred vifte af internetressourcer, herunder Wikipedia, Google og Google Scholar, til at præcisere viden eller intuitioner.

Afprøvning af kendte teknikker

En anden typisk indfaldsvinkel til et nyt problem er at afprøve det katalog af teknikker man som matematiker kender og er fortrolig med. Denne teknik er velkendt i litteraturen (fx Pólya, 1945, § 9). Vores undersøgelse viser dog at man ikke nødvendigvis blot løser et givet problem. Snarere gælder det, som en af de interviewede (R3[2]) udtrykte det, om at "få denne her [velkendte] teknik og det her problem til at mødes". Man omformer med andre ord et problem og gør det til sit eget i lyset af de teknikker man kender og er fortrolig med.

Eksperimenter og naive tests

Inden man investerer tid i at vise en sætning, vil man typisk undersøge om sætningen virker rimelig. Man kan fx teste sætningen på forskellige specialtilfælde eller undersøge sætningen med tegninger, computervisualiseringer eller eksperimenter.

2 For at sikre anonymitet er alle 13 respondenter blevet tildelt et tilfældigt tal mellem 1 og 13. R3 er således ikke nødvendigvis den tredje person vi interviewede.

En af respondenterne (R6) forklarede fx hvordan en tegning i Maple havde givet ham "et fingertip om at det var nok rigtigt, den formodning jeg havde". En anden (R4) fortalte at en computervisualisering gjorde ham så sikker på at et bestemt matematisk resultat var sandt at han efterfølgende valgte at investere to måneders arbejde i at bevise resultatet (med succes).

Brugen af den slags tests kommer ikke kun i spil i begyndelsen af problemløsningsprocessen. Gennem hele processen bruger matematikerne eksperimenter og tests til at afprøve idéer og delløsninger inden de påbegynder egentlige beviser. Induktive metoder som computervisualiseringer og simple eksperimenter er dermed en integreret del af den matematiske praksis både i forhold til problemløsning og -valg. Dette kan måske umiddelbart virke fornuftigt og naturligt, men man skal her bemærke at den meget udbredte brug af induktive metoder vi så hos forskningsmatematikerne står i kontrast til det billede af matematikken som en deduktiv videnskab der findes visse steder i litteraturen (se fx Didriksen et al., 2009, s. 52-3).

Meningsskabende og intuitiv behandling

Et væsentligt element i problemløsningsprocessen består i at opnå så meget fortrolighed med problemfeltet at man kan forstå og angribe problemet intuitivt. De matematikere vi snakkede med, benyttede en række forskellige teknikker til at opnå den fortrolighed.

En teknik er at arbejde med forskellige former for visualiseringer. Det kan fx være geometriske figurer, grafer, matricer, diagrammer eller computervisualiseringer. Det er dog værd at bemærke at de forskellige former for visualiseringer er udtryk for væsensforskellige kognitive strategier. Når man arbejder med en geometrisk figur, kan man hævde at tegningen repræsenterer den klasse af fænomener i virkeligheden som den abstrakte matematik søger at beskrive eller modellere. Arbejder man derimod med et kommutativt diagram eller en matrix, er der ikke den samme direkte sammenhæng. Fra et teoretisk, kognitivt synspunkt er forklaringen den at et diagram typisk repræsenterer det matematiske genstandsfelt ved hjælp af en indbygget metafor (se også Johansen, 2013). I et kommutativt diagram vil matematiske mængder fx blive repræsenteret som steder i rummet, og afbildninger mellem mængderne vil blive repræsenteret som stier der går fra et sted til et andet. En sådan repræsentation kan ikke opfattes bogstaveligt, men forudsætter at mængder metaforisk opfattes som steder i rummet, og at afbildninger metaforisk opfattes som stier. Flere af matematikerne i vores undersøgelse benyttede diagrammer, og med en enkelt undtagelse bekræftede de at de opfatter elementerne i diagrammerne metaforisk. Vores undersøgelse giver dermed et klart empirisk belæg for at metaforer ikke blot er et pædagogisk redskab, men også bruges aktivt og spiller en rolle i forskningsmatematikeres arbejde med matematiske problemer.

Fra et kognitivt synspunkt består metaforernes styrke primært i at de gør det muligt at overføre erfaringer, fx af at bevæge sig gennem rum, til den abstrakte matematik. Metaforerne er meningsskabende og muliggør en intuitiv tilgang til det matematiske problemfelt der arbejdes med.

Ud over diagrammer og figurer arbejdede mange af de matematikere vi interviewede, med matricer. De forklarede at matricerne gør det let for dem at finde mønstre idet visse vigtige algebraiske egenskaber repræsenteres på en letgenkendelig måde i matricerne (fx som ettaller i diagonalen eller bestemte områder med nuller). Matricer er dermed et udtryk for en tredje meningsskabende strategi. Her repræsenteres matematiske strukturer på en sådan måde at man kan opnå viden om dem ved at undersøge de geometriske egenskaber ved et helt konkret fysisk objekt, nemlig repræsentationen.

Opsummerende kan man sige at de forskellige typer af visualiseringer gør et matematisk problemfelt meningsfuldt for matematikeren ved at knytte matematikken til forskellige erfaringer. I vores undersøgelse så vi dog også en anden og væsensforskellig meningsskabende mekanisme. Den består kort sagt i at arbejde med konkrete regneeksempler. Forskningsmatematikere kan benytte arbejdet med regneeksempler som en metode til at blive fortrolige med de begreber, regneregler, systemer og teknikker der er i spil i et givet problemfelt. Således forklarede respondent R2 hvordan han typisk indleder arbejdet med et nyt problem:

> R2: "Jeg kigger på nogle små eksempler først så man kan regne alt selv, og så bliver det så efterhånden mere og mere indviklet [...] og på et tidspunkt kommer der så nogle formodninger, og det blev så til nogle sætninger eller lemmaer."

Da vi spurgte ham om han ikke blot kunne sætte en computer til at regne eksemplerne for ham, forklarede han at det var vigtigt for ham "at forstå ting med papir og blyant også. På en måde bliver det ligesom bedre; jeg forstår det bedre og husker det bedre bagefter." Arbejdet med konkrete eksempler kan med andre ord skabe intuitioner og mening i en ny problemsituation og er på den måde en vej til at komme i gang med *at arbejde med* det problem man har kastet sig over.

Kontrol og formalisering

Selvom figurer, diagrammer og andre visualiseringer spiller en væsentlig rolle i den matematiske forskning, er matematikerne godt klar over at billedlige repræsentationer kan snyde, og derfor skifter de til symbolske repræsentationsformer når de skal kontrollere om deres idéer holder. En af vores respondenter (R10) forklarede:

> R10: "Altså figurer er jo en meget typisk repræsentationsform fordi man meget ofte tænker ud fra figurer. [...] Jeg tror det er meget svært at få lavet beviset uden at have denne her figurrepræsentation af problemstillingen, men du kan godt lade dig snyde af den. Og derfor når du så skriver det eksplicit ned, kan du så opdage at figuren måske alligevel snød dig en lille smule. Og nogle gange kan du jo så godt se at det bare var fordi du havde tegnet din figur forkert. Du kan gå tilbage til figuren og så præcis se – når du har skrevet formlerne ned – hvor det var figuren gik galt."

Billedet var dog ikke helt entydigt. Interessant nok betragtede flere af de matematikere vi interviewede, ikke blot figurer og andre visualiseringer som heuristiske redskaber, men tillagde dem også en vis epistemisk vægt. En respondent (R1) forklarede således at han ofte brugte figurer når han holdt foredrag da det at pege på en figur og sige "der kan du se det" kan udgøre "et rimelig overbevisende argument". En anden (R4) lavede altid to beviser for samme sætning for at være sikker på at undgå fejl, men i et konkret tilfælde var han villig til at betragte en computervisualisering som det ene.

Vores interviewpersoner var dog tydeligt bevidste om at et bevis kun vil blive accepteret af det matematiske samfund hvis det er på symbolsk form. Der er derfor en klar tendens til at de nedtoner brugen af eller helt fjerner figurer og diagrammer fra de endelige beviser, også selvom de billedlige repræsentationer spillede en central rolle i bevisets tilblivelse og måske ligefrem er nødvendige for at forstå beviset. Man skal derfor være klar over at de semiformelle beviser man ser i lærebøger og tidsskrifter ikke nødvendigvis afspejler den matematiske arbejds- og erkendelsesproces. Når matematikere løser problemer, veksler de mellem forskellige repræsentationsformer, og de er meget bevidste om de fordele og ulemper de forskellige repræsentationsformer har, og hvor i arbejdsprocessen de skal indgå.

Både visualisering og formalisering er funktioner der trækker på en meget høj grad af *eksternalisering*. Det matematiske arbejde foregår ikke, som man måske kunne forestille sig, som en rent mental aktivitet, men snarere i et tæt samspil med diverse eksterne repræsentationer og redskaber.

Frustration og venten

De matematikere vi interviewede, havde alle prøvet at sidde fast i deres arbejde med et matematisk problem. En (R 10) sagde:

> R10: "Altså langt den største del af tiden kommer man ikke nogen vegne. Man regner og arbejder, og 90 procent af de idéer man får, hvis ikke 95 procent, fører ingen steder."

Det at sidde fast blev oplevet som frustrerende. Man kan ikke nødvendigvis gøre noget for at komme videre. Man kan selvfølgelig regne, men det var, forklarede R10 videre, mest noget man gjorde for "at holde gryden i kog". Der er ikke nogen garanti for at den rigtige idé kommer – og måske kommer den slet ikke.

Risikoen for at sidde fast var en vigtig del af de overvejelser matematikerne i vores undersøgelse gjorde sig i forhold til at gå i gang med at arbejde med et matematisk problem, og blev af flere angivet som en god grund til at arbejde med flere problemer samtidig: Ved at arbejde med en række forskellige ting vil man altid være i gang, og man kan lægge ting til side som man sidder fast i. Nogle gange lykkes det at komme igennem med noget man har siddet fast i, fx ved at se tingene fra en anden vinkel eller ved at få en idé, men lige så ofte kommer man ikke videre med sit problem. Arbejdet behøver dog ikke at være spildt af den grund. Et problem kan give anledning til udvikling af metoder, lemmaer eller andre resultater der er værdifulde selvom det primære problem ikke bliver løst.

Inspiration fra andre

Et sidste typisk element i arbejdsprocessen er samarbejde. Alle de matematikere vi snakkede med, var på den ene eller anden måde involveret i samarbejde med andre matematikere og i visse tilfælde endda med forskere fra andre fagområder. På dette punkt bekræfter vores undersøgelse dermed en af Burtons væsentlige konklusioner (2004, s. 127 ff.): Matematik er i høj grad en kollektiv aktivitet, og det populærkulturelle billede af matematikeren som isoleret geni stemmer kun sjældent overens med virkeligheden (se også Johansen & Kragh, 2014, s. 199 ff.).

Hovedpointer fra den empiriske undersøgelse

Den empiriske undersøgelse viser at matematikere sjældent starter med at formulere sætninger og beviser, men snarere gennem litteratursøgning, undersøgelse af eksempler, arbejde med tegninger og diagrammer samt forsøg på at anvende kendte teknikker langsomt arbejder sig tættere på en forståelse og fornemmelse af den matematik de ønsker at bevise sætninger om. Matematikerne har med andre ord en meget konkret, næsten induktiv indgang til arbejdet med et problem. Kontrollen af de fundne løsninger og formuleringen af løsningerne i egentlige (semi)formelle argumenter kommer først i anden omgang, omend formaliseringen er en væsentlig og uomgængelig del af arbejdet: Et problem er først løst når der foreligger et formelt bevis.

4: Inspirationer og refleksioner omkring undervisning

Som beskrevet i artiklens indledning kan det diskuteres på hvilke måder professionelle matematikeres forskningspraksis er relevant for skolefaget matematik. I det følgende vil vi relatere resultaterne fra vores undersøgelse både til nogle af de åbne diskussioner omkring inquiry og procesorienterede undervisningstilgange og til matematikundervisning generelt. Vores udgangspunkt er at vores undersøgelse både kan inspirere til nye undervisningspraksisser og give nogle greb til at understøtte refleksion over den eksisterende matematikundervisningspraksis.

Arbejde med matematiske problemer – mere end problemløsning

Vi har set at matematikere arbejder med matematiske problemer på mange andre måder end ved at løse dem. Den pædagogiske værdi i at kunne finde, vælge og artikulere matematiske problemer er relativt velbeskrevet inden for matematikkens didaktik under termen "problem posing research" (Silver, 1994; Singer, Ellerton & Cai, 2013). Denne tradition der betragter det at beskrive og artikulere matematiske problemer som en central kompetence hos både elever og lærere, har naturligvis en del at tilbyde matematikundervisning. Matematikernes strategiske overvejelser i forhold til hvorvidt de kan løse et problem, og overvejelser om hvorvidt løsningen af et problem giver anledning til nye spørgsmål og problemer, kan være en inspiration til et bredere syn på problembehandlingskompetencen.

For det første er det værd at bemærke at vores studie underbygger og forklarer værdien af problem posing-aktiviteter. Værdien af sådanne aktiviteter er dokumenteret i klasserumsstudier (English, 1997; Harpen & Presmeg, 2013), men den ret eksplicitte lighed med forskerpraksis er interessant og kan give et ekstra lag af argumenter for at understøtte at elever arbejder bredt med matematiske problemer.

For det andet er der aspekter af matematikernes praksis omkring problemvalg der kan inspirere matematikundervisning. Matematikerne betragter i høj grad de problemer de arbejder med og har løst, som et udgangspunkt for at finde nye problemer at arbejde med. Vores undersøgelse foreslår med andre ord at man kan lege med øvelsen "Hvilke nye spørgsmål giver løsningen af denne opgave anledning til?" Denne praksis er ikke helt ubeskrevet i forbindelse med matematikundervisning (se fx Walter & Brown, 2005; Pólya, 1945), men den er bestemt ikke mainstreampraksis.

I vores undersøgelse var det at sidde fast en væsentlig og almindelig erfaring. Hvis man vil overføre de professionelle matematikeres undersøgende praksis til undervisningssammenhænge, må man derfor også forvente at man overfører erfaringen af at sidde fast. Dette er, som vi ser det, en væsentlig uddannelsesmæssig udfordring, men måske netop en udfordring hvor viden om de professionelle matematikeres praksis og løsningsstrategier kan være af stor værdi.

Som tidligere nævnt benyttede matematikerne i vores undersøgelse sig primært af to strategier for at minimere problemet med at sidde fast. For det første var de meget opmærksomme på om de havde mulighed for at løse et problem inden de tog det på sig, og for det andet arbejdede de med flere problemer samtidig for at sikre at der altid var fremskridt et eller andet sted.

Den første strategi viser at en undersøgende tilgang til matematik opfordrer til –

eller måske ligefrem forudsætter – et element af metakognition, og det giver belæg for at rette opmærksomheden mod den relativt store viden vi har om metakognition og matematisk problemløsning (Lesh & Zawojewski, 2007; Schoenfeld, 1992). Vores undersøgelse viser dog at problemet langtfra er trivielt. Det kræver, ifølge de matematikere vi snakkede med, stor erfaring at afgøre om et givet problem er velvalgt, og selv med stor erfaring er det ikke usædvanligt at man alligevel ender med at sidde fast.

Dette bringer os til den anden strategi. At arbejde med flere problemer samtidig og at arbejde rundt om et problem uden at få idéer til en løsning er ikke noget der behandles meget i uddannelsessammenhænge. Men det fænomen at løsningen til et matematisk problem kommer pludseligt og overraskende efter lang tids venten, er dog beskrevet inden for den del af matematikdidaktisk og metamatematisk forskning der handler om matematisk kreativitet (Ervynk, 1991; Hadamard, 1954; Sriraman, 2008). Det er dog i praksis vanskeligt at indpasse arbejdet med problemer der er så vanskelige at man må arbejde med dem i længere tid – eller helt lægge dem på hylden – i almindelig matematikundervisning. Desuden knyttede de matematikere vi snakkede med, negative følelser som frustration og irritation til det at sidde fast. Hvis man vil arbejde åbent og undersøgende i matematikundervisningen (fx gennem projektarbejde), så må der udvikles didaktikker der gør det muligt at håndtere og imødekomme sådanne negative følelser hos eleverne.

I rapporteringen af sin undersøgelse beskriver Burton problemet med at sidde fast, og hun foreslår at man indretter klasserumsatmosfæren så det bliver legitimt både at sidde fast og at opgive et problem (Burton, 2004, s. 190). Dette er efter vores vurdering ikke en tilstrækkelig løsning. Matematikerne i vores undersøgelse beskriver det at sidde fast som noget ganske alvorligt (sammenlignet med den beskrivelse man finder hos Burton, 2004, s. 59-60). Vil man overtage matematikernes undersøgende tilgang til matematik, må man derfor som minimum indstille sig på (a) at opøve metakognition hos eleverne for at minimere problemet med at sidde fast, (b) at indrette undervisningen så man kan arbejde med flere problemer samtidig og beholde uløste problemer længe og (c) at være i stand til at håndtere frustration og venten. Man vælger ofte (fx i det almene danske gymnasium) at strukturere problemvalget og problemformuleringen for eleverne så de arbejder med problemer de kan håndtere. Denne tilgang kan være god, men overser den værdi der ligger i at kunne opstille og vælge matematiske problemer.

Arbejdet med repræsentationer, metaforer og IT

Vores undersøgelse bekræfter desuden at repræsentationer spiller en central rolle i den matematiske tænkning. Matematikerne i vores undersøgelse er helt afhængige af eksterne repræsentationer, og de er meget bevidste om hvilke repræsentationer de bruger hvor i tænkeprocessen. Semiotiske repræsentationer er allerede et vigtigt forskningsfelt inden for matematikkens didaktik både i relation til begrebsdannelse og problemløsning (Arcavi, 2003; Bishop, 1989; Duval, 2006; O'Halloran, 2005), og vores undersøgelse bekræfter at denne interesse er berettiget. Når man arbejder med matematik, er man helt afhængig af de repræsentationssystemer man anvender, og hvis man skal have succes som matematiker, må man vide hvilke repræsentationer man skal bruge hvornår og have kompetence til at skifte mellem de forskellige repræsentationsformer.

Matematikernes praksis viser også en sammenhæng mellem brug af repræsentationer og brug af IT. For den arbejdende matematiker er inddragelsen af computere en naturlig forlængelse af den måde hvorpå de altid har arbejdet. Computeren kan ses som et nyt og kraftfuldt redskab den matematiske tænkning kan distribueres hen over, men den er ikke for de matematikere vi snakkede med, en fundamental anderledes måde at erkende matematik på. Denne observation kan være en inspiration til et tættere samspil mellem de matematikdidaktiske teoridannelser der behandler brug af diagrammer, og dem der arbejder med brug af IT (som fx den instrumentelle tilgang i Trouche, 2005). Eksternalisering i form af repræsentationer og teknologi i matematikundervisningspraksis er et væsentligt forskningstema der også er relativt velbelyst, men fra denne undersøgelse kan vi tage med at forskerne oplever en kontinuitet mellem de forskellige typer af eksternaliseringer de benytter.

De teknikker forskerne benyttede til at gøre problemerne meningsfulde og åbne for intuitiv behandling, har også klar uddannelsesmæssig relevans.

Det er for det første værd at bemærke at arbejdet med simple regneeksempler bliver brugt som en metode til at opøve en nødvendig forståelse af hvordan regler og begreber i et bestemt område fungerer. Dermed legitimerer vores undersøgelse en forholdsvis traditionel aktivitet i matematikundervisningen, nemlig arbejdet med simple regneeksempler. Man skal være klar over at den forståelse der er nødvendig for at kunne behandle et problem intuitivt og undersøgende kan skabes på flere forskellige måder. Og i visse tilfælde kan arbejdet med simple regneeksempler være en effektiv metode til at komme i gang med at arbejde med et problem. Det er desuden interessant at vores data indeholder eksempler på at matematikere eksplicit afviser at de ville få det samme udbytte ved at lade en computer regne eksemplerne igennem for dem. Som en af de interviewede (R2) udtrykte det: "[F]or mig er det altid vigtigt at forstå ting med papir og blyant også. På en måde bliver det ligesom bedre; jeg forstår det bedre og husker det bedre bagefter." Denne observation er relevant for diskussionen omkring brug af IT i undervisningen og kan inspirere diskussionen om hvor og hvornår eleverne med fordel kan afløse traditionelt regnearbejde med IT-støttede redskaber.

For det andet er matematikernes brug af metaforer som meningsskabende mekanisme værd at bemærke. Der har været en vis opmærksomhed om brugen af metaforer i undervisningsmæssige sammenhænge. Thompson & Dreyfus (1988) viser fx at multiplikation med negative tal huskes længere og mere sikkert hvis indlæringen involverer en meningsskabende metafor (bevægelse på tallinjen). Tilsvarende viser Núñez (2004) på basis af kilde- og gestikstudier at metaforer optræder meget hyppigt i matematikundervisning. Metaforer er dog ikke nødvendigvis et simpelt redskab at bruge. Fra undersøgelser af elever der lærer fysik, ved vi at introduktionen af forskellige metaforer kan have betydning for hvor godt eleverne løser forskellige typer opgaver (Gentner & Gentner, 1983). Núñez (2004) diskuterer desuden rent teoretisk det undervisningsmæssigt uheldige i de metaforer der er involveret i den moderne e-d-definition af kontinuitet, men der mangler generelt mere viden på dette område. Man skal blandt andet være opmærksom på at forskellige metaforer kan være i modstrid med hinanden (fx opfattelsen af naturlige tal som hhv. steder på tallinjen og størrelser af mængder) eller decideret misvisende (fx kan forståelsen af at en mængde både kan være åben og lukket samtidig forstyrres af den metaforiske opfattelse af mængder som beholdere). Metaforer er dermed en kraftfuld, men også vanskelig kognitiv teknologi at arbejde med. Vores undersøgelse viser at metaforbrug ikke blot er et pædagogisk redskab, men også spiller en væsentlig rolle i undersøgende forskningsmatematik. Det vil derfor som vi ser det være interessant at oparbejde en bedre empirisk forståelse af metaforbrug både i forbindelse med undersøgende og med mere traditionel matematikundervisning.

5: Konklusion

I denne artikel har vi diskuteret hvorvidt viden om forskningsfaget matematik kan have relevans for undervisningsfaget matematik. På den baggrund har vi beskrevet hovedtrækkene ved en kvalitativ undersøgelse af 13 arbejdende matematikeres praksis. Vi har set at det selv for erfarne matematikere er vanskeligt at vælge egnede problemer, og at der er en reel risiko for at sidde fast. Forskningsmatematikernes arbejde omkring problemer kan på den ene side inspirere til nye undervisningsmæssige aktiviteter, men problemet med at sidde fast bør på den anden side tages alvorligt og få konsekvenser for undervisningspraksis hvis man ønsker at gøre matematikundervisningen mere undersøgende.

Vi har desuden set at de arbejdende matematikere benytter sig af en række forskellige meningsskabende mekanismer som led i den intuitive behandling af et problem. Dette giver belæg for i højere grad at undersøge brugen af metaforer i undervisningssammenhænge og for at diskutere hvornår man med fordel kan (og ikke kan) lade IT-værktøjer overtage arbejdet med simple regneeksempler. Desuden bekræfter vores undersøgelse at forhold omkring problembehandling og repræsentation begge er af central betydning for det undersøgende arbejde med matematik, og vi legitimerer dermed den fortsatte forskningsmæssige opmærksomhed på dette område i matematikundervisningssammenhænge. Endelig giver undersøgelsen empirisk belæg for at forhold omkring repræsentation og brug af IT med fordel kan studeres som kontinuert forbundne og ikke som to adskilte kompetencer.

Referencer

Alberts, B. (2013). Prioritizing Science Education. *Science* (New York, N.Y.), *340(6130)*, s. 249.

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, s. 215-241.

Baptist, P. (2012). *Implementing Inquiry in Mathematics Education*. Bayreuth: University of Bayreuth.

Bishop, A.J. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1-2)*, s. 7-16.

Boaler, J. (2002). *Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches to Teaching and Their Impact on Student Learning*. Mahwah, N.J.: L. Erlbaum.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31(3 & 4)*, s. 175-190.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser.

Didriksen, M., Olsen, M. & Witzke, A. (red.). (2009). *AT-håndbogen. Til eksamen i almen studieforberedelse*. Aarhus: Systime.

Dorier, J.-L. & Maaß, K. (2012). *The PRIMAS Project: Promoting Inquiry-Based Learning (IBL) in Mathematics and Science Education across Europe PRIMAS Context Analysis for the Implementation of IBL: International Synthesis Report PRIMAS – Promoting Inquiry-Based Learning in Mathemati* (Vol. 1). Lokaliseret på: www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=12&supportId=1247.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61(1-2)*, s. 103-131.

English, L.D. (1997). The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34(3)*, s. 183-217.

Ervynk, G. (1991). Mathematical Creativity. I:D.O. Tall (red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 42-53). Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

European Commission. (2007). *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers.

Gentner, D. & Gentner, D.R. (1983). Flowing Water or Teeming Crowds: Mental Models of Electricity. I: D. Gentner & A.L. Stevens (red.), *Mental Models* (s. 99-129). Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.

Hadamard, J. (1954). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field.* New York: Dover Publications.

Harpen, X.Y. Van & Presmeg, N.C. (2013). An Investigation of Relationships Between Students' Mathematical Problem-Posing Abilities and Their Mathematical Content Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 83(1)*, s. 117-132.

Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (2010). *Mathematics Education and Technology: Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study*. New York: Springer.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.-P., Weber, K. & Alcock, L. (2013). On Mathematicians' Different Standards when Evaluating Elementary Proofs. *Topics in Cognitive Science, 5*, s. 270-282.

Inglis, M. & Alcock, L. (2012). Expert and Novice Approaches to Reading Mathematical Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43(4)*, s. 358-390.

Johansen, M.W. (2010). Embodied Strategies in Mathematical Cognition. I: Benedikt Löwe & Thomas Müller (red.), *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice* (s. 179-196). Texts in Philosophy 11. London: College Publications.

Johansen, M.W. (2013). What's in a Diagram? On the Classification of Symbols, Figures and Diagrams. I: Lorenzo Magnani (red.), *Model-Based Reasoning in Science and Technology. Theoretical and Cognitive Issues* (s. 89-108). Heidelberg/Berlin: Springer. Series SAPERE.

Johansen, M.W. & Kragh, H.S. (2014). *Invitation til matematikkens videnskabsteori*. Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge; New York: Cambridge University Press.

Leikin, R. & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and Mathematics Education: The State of the Art. *ZDM Mathematics Education, 45(2)*, s. 159-166.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. I: F.K. Lester & National Council of Teachers of Mathematics (red.), *Second handbook of research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Mancosu, P. (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford; New York: Oxford University Press.

Misfeldt, M. (2005). Media in Mathematical Writing: Can Teaching Learn from Research Practice? *For the Learning of Mathematics: An International Journal of Mathematics Education, 25(2)*, s. 36-42.

Misfeldt, M. (2006). *Mathematical Writing.* PhD dissertation, Danish University of Education.

Misfeldt, M. (2014). Trekantsberegninger og teknologi. *MONA 2014-1*, s. 27-43.

Misfeldt, M. & Johansen, M. (u.å.). Research Mathematicians' Practices with Selecting Mathematical Problems. Paper in review.

Müller-Hill, E. (2011). *Die epistemische Rolle formalisierbarer mathematischer Beweise. Formalisierbarkeitsorientierte Konzeptionen mathematischen Wissens und mathematischer Rechtfertigung innerhalb einer sozio-empirisch informierten Erkenntnistheorie der Mathematik*. Bonn: Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität i Bonn. Ph.d.-afhandling. Onlinepublikation lokaliseret på: http://hss.ulb.uni-bonn.de/2011/2526/2526.pdf.

National Research Council (U.S.). (1996). *National Science Education Standards: observe, interact, change, learn*. Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M., Højgaard Jensen, T. & Undervisningsministeriet. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets Forlag.

Núñez, R. (2004). Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics. I: F. Iida, R. Pfeifer, L. Steels, & Y. Kuniyoshi (red.), *Embodied Artifcial Intelligence* (s. 54-73). Berlin: Springer-Verlag.

O'Halloran, K.L. (2005). *Mathematical Discourse: Language, Symbolism and Visual Images*. London: Continuum.

OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It; a New Aspect of Mathematical Method.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense – Making in Mathematics. I: D. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334-370). New York: Macmillan.

Silver, E.A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics, 14(1)*, s. 19-28.

Singer, F.M., Ellerton, N. & Cai, J. (2013). Problem-Posing Research in Mathematics Education: New Questions and Directions. *Educational Studies in Mathematics, 83(1)*, s. 1-7.

Sriraman, B. (2008). The Characteristics of Mathematical Creativity. *ZDB Mathematics Education, 41(1-2)*, 13-27.

Strauss, A.L. & Corbin, J.M. (1990). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques*. Newbury Park, Calif.: Sage Publications.

Thompson, P.W. & Dreyfus, T. (1988). Integers as Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 19(2)*, s. 115-133.

Trouche, L. (2005). An Instrumental Approach to Mathematics Learning. I: D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (red.), *The didactical challenge of symbolic calculators Turning a computational device into a mathematical instrument* (s. 137-162). Berlin; New York: Springer Verlag.

Undervisningsministeriet. (2010). *Fælles mål 2009 – IT- og mediekompetencer i folkeskolen*. København; Højbjerg: Undervisningsministeriet.

Walter, M. & Brown, S. (2005). *The Art of Problem Posing*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Winsløw, C. (2013). Matematik som videnskabsfag og som skolefag. I: M. Wahl Andersen & P. Weng (red.), *Håndbog om matematik i grundskolen: Læring, undervisning og vejledning* (s. 25-33). København: Dansk Psykologisk Forlag.

Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2013). Study and Research Courses as an Epistemological Model for Didactics. *Educational Studies in Mathematics, 83(2)*, s. 267-284.

Engelsk abstract

In this paper we will report on the main results of a qualitative interview study of the working practice of 13 active mathematicians. We will briefly describe how the mathematicians chose problems, how they go about working on the problems and what aspects of their work they present in journal papers. Lastly, we will discuss to what extend knowledge about the practice of professional mathematicians can and should influence discussions about the school subject mathematics. In connection to this we will describe how the results of our investigation can inform the discussions about how students should work with (1) problems, and (2) representations, metaphors and IT-tools.