Brug af didaktisk teori i læreres udvikling af modelleringsprojekter i matematik

Morten Blomhøj, *IMFUFA, NSM, RUC*

Tinne Hoff Kjeldsen, *IND, KU*

Abstract *I artiklen præsenterer vi en skematik der kan udspænde brugen af forskellige repræsentationer af såvel proces- som objektaspekter af matematiske begreber i en modelleringskontekst. Skemaet er en af tre metoder, der er de foreløbige resultater af vores forskning i hvordan der kan bygges bro mellem didaktisk forskning og udvikling af matematikundervisning. Vi illustrerer, hvordan skemaet i et modelleringsprojekt om alkohol og THC der blev udviklet og afprøvet af gymnasielærere i forbindelse med et efteruddannelseskursus, kan fungere som et medierende link mellem didaktisk teori og udvikling af undervisningspraksis. Skemaet kan således støtte en forskningsbaseret udvikling af praksis.*[1]

Introduktion og forskningsspørgsmål

Gennem de seneste tre-fire årtier er der udviklet teorier om undervisning og læring i matematisk modellering. Ofte er teoriudviklingen foregået i tæt samspil med undervisningsforsøg og udviklingsprojekter. Det har givet anledning til nærmere definition af begreberne matematisk model og matematisk modellering, kategorisering af forskellige typer af matematiske modeller, analyse af forskellige begrundelser for inddragelse af modellering i matematikfaget og definition af modelleringskompetence, samt forslag til og analyse af forskellige måder at inkludere og bedømme udbyttet af modellering i forskellige type af curricula. De definitioner og teoretiske idéer, der er udviklet i denne forskning, har allerede haft betydelig indvirkning på modellerings rolle og placering i matematikundervisningen på curriculum niveau og i et vist omfang også på matematiklæreres forståelse af matematisk modellering. Gennemslaget

1 Artiklen bygger på et foredrag af forfatterne ved Big Bang konferencen i marts 2013 og den findes også en kortere engelsk version (Blomhøj & Kjeldsen, 2013).

af denne forskningsmæssige udvikling i curricula og praksis er naturligvis meget forskelligt i forskellige kontekster. I Danmark har modeller og modellering længe været en del af matematikfaget på bekendtgørelsesniveau i gymnasiet. Emnet findes behandlet i lærebøger, og modellering kan også indgå til den mundtlige eksamen.

I matematikdidaktisk forskning findes der også teorier, der søger at afdække læringspotentialerne samt de didaktiske og læringsmæssige udfordringer ved matematisk modellering mere specifikt. Modellering ses her som et middel til at støtte elevernes tilegnelse af matematik (Zbiek & Conner, 2006) (Blomhøj & Kjeldsen 2006, 2010b). Denne forskning åbner for et samspil med mere generelle teorier om tilegnelse af matematiske begreber. Før disse teorier kan anvendes af lærere som grundlag for at udvikle og reflektere over egen praksis, må de imidlertid først konkretiseres i lærernes aktuelle undervisningsforløb. Det kræver typisk udvikling af ny teori i form af nye begreber eller kategoriseringer der kan skabe forbindelse mellem de didaktiske og læringsmæssige udfordringer lærerne oplever i deres undervisning.

I takt med matematikdidaktikkens udvikling til en videnskabelig disciplin er der sket en stigende specialisering og teoretisering der har øget afstanden mellem matematikdidaktisk forskning og undervisningens praksis. Der er en tendens til at forskningsprocesserne adskilles fra de udviklingsprocesser, der anvender forskningens resultater. Vi ser det som en generel udfordring for matematikdidaktisk forskning at skabe bedre forbindelse og sammenhæng mellem disse to typer af processer. Forskningsprocessen er traditionelt forskerens domæne og ansvar, mens ansvaret for processer, der søger at anvende forskningsresultater i udvikling af undervisningspraksis ikke kan placeres så entydigt i vores forsknings- og uddannelsessystem. Forskere, der indgår i udviklingsprojekter, læreruddannere, fagkonsulenter, lærere der holder efteruddannelseskurser, samt lærere eller grupper af lærere der arbejder med at udvikle deres egen praksis kan alle indgå i sådanne udviklingsprocesser, men ofte er det ikke deres primære ansvarsområde at sikre forskningsbaseret udvikling af praksis. Der mangler organisatoriske rammer, der systematisk kan støtte udvikling af undervisningspraksis i matematik gennem anvendelse af forskningsresultater. Der er ingen institutioner, der har direkte ansvar for at understøtte forskningsbaseret efter- og videreuddannelse af lærere. Det gælder både på grundskole- og gymnasialt niveau. Samtidig er det ikke en del af lærernes professionelle forpligtelse, at de skal deltage i forskningsbaseret efter- og videreuddannelse eller i udviklingsprojekter med henblik på at udvikle egen praksis. De skal deltage i efteruddannelse, men der er ingen krav om forskningsbasering, og der er typisk ikke krav om at arbejde med udvikling af egen praksis i forbindelse med efteruddannelse.

I et større oversigtsstudium over brugen af forskning i udvikling af praksis konkluderer Jo Boaler (2008, s. 103) at lærernes direkte involvering i brug af teori i udviklingen af deres egen praksis er en meget væsentlig faktor for en succesfuld anvendelse af forskningsresultater. Det bør være en opgave for matematikdidaktisk forskning at udvikle metoder der kan bringe forskningens resultater i kontakt med udvikling af undervisningens praksis.

I løbet af de sidste tre-fire år har vi forsket i at udvikle sådanne metoder. Vi har fokuseret på at udvikle metoder til at styre læreres involvering i forskningsbaseret udvikling af deres egen undervisningspraksis. Vores forskning er dels udsprunget af og dels foregået i samspil med et efteruddannelseskursus for gymnasielærer i problemorienteret projektarbejde i matematisk modellering (Blomhøj & Kjeldsen, 2006). Vi designede kurset i 2003 i forbindelse med gymnasiereformen og har siden afholdt kurset otte gange. Der er således tale om udviklingsbaseret forskning hvor resultaterne af forskningen indarbejdes i udvikling af lærernes praksis allerede i forskningsprocessen.

Foreløbig har vores forskning resulteret i udvikling af metoder inden for tre områder, der kan støtte forbindelsen mellem forskning og udvikling af undervisningspraksis: (1) Detaljeret og konkret beskrivelse og analyse af den modelleringsproces der er indeholdt i et modelleringsprojekt, med henblik på at afdække projektets potentiale til at udvikle elevers modelleringskompetence og til at støtte elevernes tilegnelse af centrale matematiske begreber og metoder. (2) Skema til at udspænde de forskellige repræsentationer af centrale matematiske begreber der kan indgå i elevers arbejde med en given modelleringsproblemstilling. (3) Konstruktion af dialoger (forventede eller forestillede) mellem lærer og grupper af elever i situationer hvor eleverne står over for en konkret udfordring i en given modelleringsproces.

I denne artikel præsenterer vi det andet af disse tre forskningsprodukter. Vi illustrerer brugen af sådanne skemaer i et problemorienteret projektforløb i matematisk modellering om nedbrydningen af alkohol og THC (det euforiserende stof i hash). Dette projekt er udviklet af en gruppe lærere på kurset, og analyserne viser, hvordan skematikken kan bruges af lærerne i udviklingen af deres undervisningsforløb, og hvordan den kan fungere som et medierende link mellem matematikdidaktisk teori og udvikling af undervisningspraksis og således støtte en forskningsbaseret udvikling af praksis. Artiklen belyser gennem eksemplet følgende generelle forskningsspørgsmål:

> *Hvordan kan teorier om matematisk modellering og matematiklæring integreres i et modelleringskursus for lærere i de gymnasiale uddannelser, således at lærerne involveres i forskningsbaseret udvikling af egen praksis?*

I det følgende redegøres der for organisering af kurset, samspillet mellem forskning og praksisudvikling og brugen af teori i kurset. Artiklen rundes af med afsluttende kommentarer og refleksioner om relationen mellem teori og praksis.

Kursets struktur, organisering og formål

De otte gange, kurset har været afholdt, har der deltaget mellem 12 og 22 matematiklærere på gymnasialt niveau. Lærerne kommer fortrinsvis i par eller tre fra samme skole. Der er en særlig pointe ved at lærere fra samme skole udvikler fælles forløb, som de kan dele med andre kolleger på skolen, og at de har mulighed for at observere hinandens undervisning under forløbet. Kurset afvikles over fem til otte måneder inden for et skoleår. I denne periode gennemfører lærerne et forløb af en til to ugers (fem-ti lektioners) varighed, som typisk afløser skriftligt arbejde svarende til to normale opgavesæt. For lærerne svarer kurset til 7,5 ECTS-point, og de dokumenterer resultater og erfaringer fra forløbene i rapportform der fremlægges og diskuteres på kurset.

Kurset indledes med et tre-dagesseminar hvor lærerne får inspiration og støtte til at udvikle et undervisningsforløb inden for matematisk modellering. Der gives god tid til at lærerne kan samarbejde i grupper af to-tre lærere om at udvikle idéer til og designe dele af deres undervisningsforløb. Efter seminaret færdiggøres planlægningen og forløbene gennemføres i lærernes egne klasser. Undervejs i forløbet mødes kursusdeltagerne til et heldagsseminar. Fokus er her dels på pædagogisk observation i relation til udvalgte spørgsmål eller opmærksomhedspunkter. Dels gives der ideer og støtte til rapportering af udviklingsforløbene således at rapporterne kan blive af interesse for kolleger i matematik eller i de naturvidenskabelige fag. Kurset afsluttes med et to-dagesseminar hvor lærerne fremlægger deres udviklingsprojekter baseret på foreløbige rapporter fra undervisningsforløbene og en mundtlig præsentation på seminaret.

Ved det første seminar introduceres deltagerne til matematisk modellering og problemorienteret projektarbejde som ramme for udvikling af deres undervisningsforløb. Endvidere introduceres forskellige teorier om læring af matematiske begreber. Disse bliver nærmere præsenteret i afsnittet "Brugen af teori i kurset".

I den første fase af arbejdet med udvikling af undervisningsforløbene bliver grupperne bedt om at fokusere på fire punkter: (1) Deres intentioner for egen udvikling som matematiklærere i forbindelse med kurset. Hvad er det de specifikt ønsker at eksperimentere med i forløbet i forhold til deres sædvanlige undervisning? (2) Hvad er hovedintentionerne for elevernes udbytte af arbejdet med modellering og problemorienteret projektarbejde? (3) Hvordan kan scenen sættes for elevernes projekt(er) således at de selv kan overtage styringen af (dele af) modelleringsprocessen i forløbet? (4) Hvordan skal elevernes arbejde evalueres (krav til rapport, fremlæggelser mv.), og hvordan skal elevernes læringsudbytte vurderes gennem observation og vurdering af produkter?

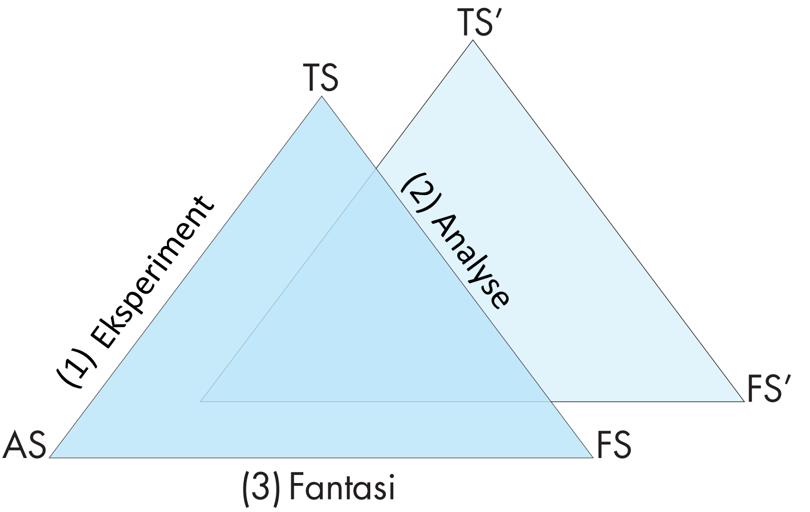
Gruppernes første idéer og skitser til forløb bliver fremlagt og diskuteret under det første internat, og de får feedback fra de øvrige grupper og fra os kursuslærere. Et par uger efter det første seminar rundsendes reviderede elevmaterialer og skitser til undervisningsforløbene. I løbet af et par måneder er forløbene færdigudviklede og lærerne gennemfører hver især deres forløb i mindst én klasse. På nogle skoler er det muligt for lærerne at overvære (dele af) forløbet hos hinanden. Det giver et særlig godt grundlag for efterfølgende refleksion og videreudvikling af forløbet.

Forud for det afsluttende seminar indsender grupperne foreløbige rapporter over deres udviklingsprojekter, og disse fordeles til alle deltagere. Rapporterne indeholder overvejelser om forløbets udviklingssigte for lærerne og læringsmål for eleverne, dokumentation af forløbet med timeplan og materiale til eleverne, eksempler på elevrapporter eller andre produkter, udvalgte pædagogiske observationer og indledende overvejelser om vurdering af elevernes udbytte og evaluering af projektet. Ved det afsluttende seminar præsenteres og diskuteres de foreløbige rapporter, og grupperne får feedback til videreudvikling af forløbet og til afrapporteringen. På grundlag heraf og efterfølgende skriftlige kommentarer til de foreløbige rapporter fra kursusholderne udarbejder lærerne endelige rapporter over deres udviklingsprojekt med reviderede planer for undervisningsforløbet. Hvis lærerne ønsker det, bliver de endelige rapporter gjort tilgængelige via webportalen emu.dk.

Samspil mellem forskning og udvikling af praksis

Overordnet betjener vi os i udviklingen af vores kursus og i den tilhørende forskning af en metodisk forståelse og tilgang, der er tæt på den man finder i critical mathematics education (Skovsmose & Borba, 2004), (Skovsmose, 2006). Her skelnes mellem tre typer af situationer i relation til et forsknings- og udviklingsprojekt, der sigter på at integrere forskningsprocesser og forskningsresultater i udviklingen af en konkret matematikundervisningspraksis. De tre forskellige situationer og deres fortolkning i forhold til vores kursus er: den aktuelle situation (AS) som betegner den eksisterende praksis vedrørende matematisk modellering for den enkelte lærer, der deltager på kurset; den forestillede/intenderede situation (FS) som den enkelte lærer forstillede sig/ønskede at skabe i projektforløbet i sin klasse, og den tilrettelagte situation (TS) som betegner den undervisningssituation, der rent faktisk etableres i det planlagte undervisningsforløb når den enkelte lærer gennemfører det planlagte forløb. I de tre situationer indgår både overvejelser om lærernes mål for egen udvikling samt deres mål for elevernes projektarbejde, deres modelleringsarbejde og deres læring af udvalgte matematiske begreber. I hvilket omfang og hvor tyngden ligger hvad angår elevernes arbejde afhænger af, hvad lærerne har angivet som hovedintentionerne for elevernes udbytte af projektforløbet. Det er en pointe, at de tre situationer vil være forskellige for alle lærere i samme gruppe selvom de i gruppen samarbejder om udvikling af "det samme" projektforløb.

Der er tilsvarende tre forskellige processer, der forbinder de tre situationer: (1) pædagogisk eksperimenteren med praksis; (2) udforskende analyse af det realiserede i lyset af det forestillede/ønskede; (3) pædagogisk fantasi i form af udvikling af forestillinger/ønsker om en anden praksis vedrørende matematisk modellering. Figur 1 gengiver forbindelsen mellem de tre situationer og de tre processer skematisk (Skovsmose, 2006, s. 263).



Figur 1. *Den metodologiske trekant i kritisk matematikundervisning. Figuren er omarbejdet fra Skovsmose (2006, s. 263).*

I vores kursus bruger vi teori om matematisk modellering og teori om læring af matematiske begreber til at skabe et fælles grundlag for udvikling af deltagernes forestillede/ønskede situationer i relation til forløb i deres eget klasserum. I gruppearbejdet diskuterer lærerne deres idéer til projektforløb ud fra bl. a. deres forestillinger om den situation eller praksis, de gerne vil etablere i deres undervisning (proces 3). På det første seminar hjælper vi lærerne med at anvende elementer fra de introducerede teorier (se nedenfor) som grundlag for deres design af et projektforløb (proces 1). Det er en væsentlig pointe i metodologien, at der er afstand mellem den forestillede/ønskede situation og den i forløbet tilrettelagte (realiserede) situation. Der findes ingen direkte vej til realisering af en bestemt mere eller mindre ideal didaktisk situation. I stedet for at opfatte dette grundforhold som frustrerende lægger metodologien op til at se diskrepansen mellem den realiserede og den forestillede situation som drivkraft for fortsat udvikling gennem udforskende analyse og refleksion (proces 2).

Ved det afsluttende seminar fremlægges og diskuteres de enkelte projekter ved at sammenholde lærernes mål for egen udvikling og for elevernes læring som udtryk for den forestillede situation på den ene side og på den anden side den faktisk gennemførte undervisning og elevernes modelleringsvirksomhed, som den kom til udtryk i undervisningen gennem gruppearbejdet, dialoger med læreren, fremlæggelserne, de skriftlige rapporter og efterfølgende refleksioner. Det ser vi som udforskende analyse (proces 2) af relationen mellem TS og FS for grupperne og for den enkelte lærer. Sammen med lærerne diskuterer vi idéer til videreudvikling af designet med henblik på at komme tættere på den forestillede situation (proces 3). Der etableres herved et grundlag for et nyt gennemløb af den metodologiske trekant i figur 1: Den faktisk etablerede situation (TS) som lærerne realiserede i deres undervisning som led i vores kursus, er nu i mere eller mindre overensstemmelse med den aktuelle situation (AS') alt efter i hvor høj grad det lykkes læreren at implementere den nye praksis i sin almindelige undervisning. På grundlag af lærernes erfaringer fra deres forløb og efterfølgende refleksion ændrer lærerne også deres forestillede situation (FS') af hvad de vil med matematisk modellering i deres undervisning. Målet flytter sig med andre ord og udviklingsprocessen må fortsætte. Næste gang lærerne gennemfører det modelleringsprojektet i en ny klasse har deres udgangspunkt ændret sig fra AS til AS', og deres ønsker har ændret sig, som beskrevet ovenfor, fra FS til FS', og når de har gennemført modelleringsprojektet i klassen vil den tilrettelagte situation have ændret sig fra TS til TS' – og processen kan fortsætte. Se figur 1.

På kurset følger vi lærerne i det første gennemløb af trekanten og videre i beskrivelsen af den nye aktuelle situation (AS'), i processen (proces 3) fra AS' til en ny forestillet/ønsket situation (FS') og i processen (proces 1) af en ny tilrettelagt situation (TS'). I diskussionerne på kursets afsluttende seminar danner de tre omtalte metoder (1)-(3) til at støtte forbindelsen mellem teoriniveauet og undervisningspraksis en afgørende rolle i processen med at vejlede lærerne om de tre situationer og i analysen af hvordan, de selv kan videreudvikle modelleringsprojektet. Lærerne støttes i at forbinde teori og praksis ved hjælp af de tre metoder i deres fortsatte arbejde med at udvikle deres praksis i matematisk modellering. Selve gennemførelsen af det reviderede modelleringsprojektforløb (etableringen af TS') og den udforskende analyse (proces 2) af det realiserede (TS') i forhold til den forestillede/ønskede situation (FS') følger vi ikke på kurset. Disse elementer af den videre udvikling er overladt til lærerne i deres forhåbentligt fortsatte samarbejde på skolerne.

Vi har ikke systematisk indsamlede oplysninger om i hvilket omfang udviklingsprocessen fortsætter for kursusdeltagerne, men vi har spredte oplysninger og information om at flere af projekterne der er udviklet på kurset, bliver videreudviklet enten i forhold til progression eller i forhold til implementering i andre klasser på samme klassetrin. Som eksempel på det første er et forløb om medicindosering, der blev udviklet og prøvet af i en 1. g-klasse, blevet videreudviklet og taget op igen da klassen gik i 3. g hvor der var mulighed for at eleverne kunne arbejde med differentialligninger og undersøge modellerne analytisk i stedet for som i 1.g at arbejde med differensligninger og beregning i regneark. Som eksempel på det andet kan vi nævne et projekt om design af en vodkaklovn (en 33-cl-flaske i et spændende og appellerende design). Det indgår nu som et mere eller mindre fast element i 2. g-klasser med matematik på A-niveau på det pågældende gymnasium i et forløb om differentialregning og optimering.

Brugen af teori i kurset

Ved det første seminar bliver deltagerne introduceret til matematikdidaktiske teorier inden for nedenstående tre domæner.

(I) Teori om problemorienteret projektarbejde (Blomhøj & Kjeldsen, 2010a; Kolmos, 2009). Fokus er her på betydningen af formuleringen af et problem, der kan være styrende for modelleringsprocessen, og som derved gør det muligt for eleverne at tage kontrollen over deres arbejde, samt på hvordan processen kan styres gennem milepæle for elevernes proces og gennem lærerens vejledning undervejs i processen. Den måde scenen sættes på for projektet i klassen – problemformuleringen og de eksplicitte krav til form og indhold i elevernes rapporter – er de væsentligste didaktiske instrumenter til at styre projektforløbet.

(II) Teorier om matematiske modeller, herunder begrundelser for modellering i gymnasial matematikundervisning, modelleringsprocessen og -kompetence (Blomhøj, 2006), (Niss et al, 2007; Blomhøj & Kjeldsen, 2010a). Fokus er her på at illustrere og diskutere modelleringsprocessen i forhold til konkrete eksempler og lærernes idéer til modelleringsprojekter i deres undervisningsforløb. Vi lægger specielt vægt på de forskellige typer af refleksioner ved de forskellige delprocesser i modelleringsprocessen og deres potentielle læringsmæssige udbytte for eleverne.

(III) Teori om læring af matematiske begreber. Udgangspunktet er her at arbejdet med modellering i gymnasiets matematikundervisning har som en væsentlig del af sin berettigelse at modellering kan være et effektivt didaktisk middel til at støtte og udvide elevernes forståelse af de indgående matematiske begreber og metoder og til at motivere (nogle af) eleverne til at arbejde med de matematiske begreber (Blomhøj & Kjeldsen, 2010b). Vi præsenterer og diskuterer teoretiske idéer i relation til: forskellige repræsentationers betydning i tilegnelsen af matematiske begreber (Steinbring, 1987), samspillet og dualiteten mellem proces- og objekt forståelse af matematiske begreber samt Anna Sfard's (1991) model for udvikling og tilegnelse af matematiske begreber; elevers begrebsforståelse og begrebsbilleder (Tall & Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1989); samt idéen om udviklingen i modellers rolle i tilegnelse af et matematisk område fra en model af en bestemt konkret situation til en model for tilegnelse af og refleksion over et matematisk begreb eller begrebsområde. Denne teori er udviklet inden for RME (realistic mathematics education), se Gravemeijer (1994).

Vi mener parallelt med diSessa & Cobb (2004), at disse (og andre teorier) har meget at tilbyde som grundlag for og inspiration til udvikling af matematikundervisningens praksis gennem udviklingsprojekter generelt og i særdeleshed i relation til udvikling af undervisningsforløb inden for matematisk modellering. Men inden teorier kan blive til hjælp og inspiration for lærernes udvikling af projektforløb, er det nødvendigt at de bliver konkretiseret og forbundet til lærernes projekter og den undervisningskontekst hvori de skal gennemføres. Der kan skabes sådanne forbindelser mellem forskning og udvikling af praksis gennem mellemled af teori eller kategorisering, der forbinder de mere generelle teoretiske idéer med de konkrete udfordringer lærerne står over for ved design og gennemførelse af samt refleksion over eksperimenterende undervisningsforløb i matematisk modellering.

Som nævnt i introduktionen har vi med udgangspunkt i vores fortsatte udvikling af efteruddannelseskurset i løbet af de sidste tre-fire år forsket i at udvikle metoder, der kan fungere som sådanne mellemled. Vi har efterfølgende indarbejdet vores forskning i kurset i form af redskaber til udviklingen af lærernes praksis. I den forstand er der tale om udviklingsbaseret forskning, hvor resultaterne af forskningen er blevet indarbejdet i udvikling af lærernes praksis allerede i forskningsprocessen.

Indtil videre har vi inden for de nævnte tre områder udviklet tilgange og repræsentationer der kan fungere som mellemled og skabe forbindelse mellem teoriniveauet og undervisningspraksis. I denne artikel fokuserer vi som nævnt på det andet af disse områder, men i det følgende gives en kort præsentation af alle tre områder.

(1) Detaljeret og konkret beskrivelse og analyse af den modelleringsproces, der potentielt er indeholdt i lærernes forslag til problemstillinger for elevernes modelleringsprojekter. Beskrivelserne er bygget op om den seksfasede model af en matematisk modelleringsproces (Blomhøj, 2006, s. 88). Men pointen ligger i den konkrete udfoldning af modelleringsprocessen i lærernes forslag til problemstillinger. Herigennem bliver lærerne opmærksomme på de læringspotentialer som den konkrete modelleringsproces rummer både i forhold til udvikling af elevernes modelleringskompetence (hvilke elementer af modelleringsprocessen bliver eleverne udfordret til at arbejde med og hvordan?) og i forhold til elevernes tilegnelse af centrale matematiske begreber og metoder. En sådan udfoldelse og konkretisering af modelleringsprocessen giver lærerne grundlag for at diskutere hvor de forventer, at eleverne vil opleve vanskeligheder, og til at tænke over hvordan man kan støtte eleverne i at overvinder disse uden at forpasse essentielle læringsmuligheder.

(2) Skemaer (se figur 2 og 3 nedenfor) til at udspænde de forskellige repræsentationer af centrale matematiske begreber, der kan indgå i elevernes arbejde med en given modelleringsproblemstilling. Disse skemaer er bygget op dels omkring forskellige repræsentationer af de matematiske begreber, der indgår i elevernes modelleringsarbejde, dels omkring proces- og objektaspekter af disse begreber. Repræsentationerne er elevernes indgang til læring af de matematiske begreber (Stienbring, 1987). Derfor er det afgørende at man som lærer er opmærksom på hvordan de forskellige repræ-

sentationer henviser og giver mening til begrebernes forskellige aspekter i en given sammenhæng. Ifølge Sfard (1991) er det vigtigt at skelne mellem proces- og objekt-aspekter af de matematiske begreber for at kunne støtte elevernes begrebsudvikling. Begge aspekter af et matematisk begreb skal udvikles gennem undervisningen, og fuld begrebsforståelse kræver at man kan skifte mellem proces- og objektperspektivet på et matematisk begreb. Vores analyser peger på at denne grundlæggende dualitet for matematiske begreber gør sig gældende også inden for de enkelte repræsentationsformer af et begreb. Der har vi udviklet en skematik, hvor vi krydser proces/objekt perspektivet med de forskellige repræsentationsformer af et matematisk begreb, som eleverne kan komme til at arbejde med i en given modelleringskontekst. I den givne sammenhæng drejer det sig om de fem repræsentationsformer: naturligt sproglig (ord), numerisk (tal og tabeller), symbolsk (algebraisk), algoritmisk (regneark) og grafisk, se figur 2 og 3. Endvidere giver modelleringskonteksten mulighed for at de enkelte repræsentationer af et begreb kan fortolkes både i forhold til modelleringskonteksten og i forhold til det abstrakte begreb. Derfor har vi opbygget skemaet således, at hver celle udfyldes både i forhold til det abstrakte matematiske begreb og i forhold til den konkrete modelleringskontekst.

Det er vores opfattelse at matematisk modellering netop har sit potentiale for at støtte læringen af begreber ved at eleverne kan få mening med de forskellige repræsentationer af et begreb gennem deres konkrete udmøntning og fortolkning i modelleringskontekster.

Skemaerne som lærerne selv kan være med til at udfylde, bliver herved et redskab til at afdække det læringsmæssige potentiale af en modelleringsproces i forhold til elevernes begrebsdannelse. Samtidig kan dette arbejde give inspiration til ændring i designet af undervisningsforløbet, således at eleverne udfordres til at arbejde med og skabe sammenhæng mellem flere eller bestemte repræsentationer af de involverede matematiske begreber. Figur 2 og 3 viser konkrete eksempler på sådanne skemaer i forhold til modellering af henholdsvis alkoholforbrænding og nedbrydning af THC.

(3) Konstruktion af forventede eller forestillede dialoger mellem læreren og grupper af elever i situationer, hvor eleverne står over for et konkret problem i en given modelleringsproces eller en læringsmæssig udfordring i forhold til fortolkning eller refleksion over en model eller dens resultater (Blomhøj & Kjeldsen 2010b).

Diskussionen af dialoger der konstrueres med baggrund i såvel de omtalte teorier som forfatternes egne erfaringer med undervisning i matematisk modellering, giver mulighed for at diskutere med lærerne hvordan teoribelyste læringsvanskeligheder kan vise sig i den konkrete undervisningssituation, og hvordan man som lærer kan udnytte teoretisk viden i dialogen med eleverne og i fortolkningen af elevernes virksomhed i forhold til eventuelle grundlæggende læringsmæssige vanskeligheder. Herved kan konstruktion og diskussion af dialoger hjælpe lærerne i deres forberedelse med at se hvordan de konkret kan støtte og udfordre eleverne undervejs i modelleringsprocessen uden at overtage ansvaret for elevernes læring.

I denne artikel fokuserer vi som nævnt på brug af teori nævnt under område (II) til konstruktion af skemaer vist i figur 2 og 3. Det vil sige at vi bruger de nævnte teorier i udviklingen og anvendelsen af skemaet. Skemaet bliver herved et teoribaseret redskab til at udspænde og analysere læringspotentialet i forhold til centrale matematiske begreber i givne modelleringsaktiviteter. En sådan analyse kan tjene som grundlag både for design af modelleringsprojekter og for vurdering af læringspotentialet i elevernes rapporter og andre produkter.

Modelleringsprojekt om alkohol og THC som eksempel

Til at illustrere hvordan skemaerne i (2) ovenfor kan indgå i elevernes arbejde, analyserer vi i dette afsnit et konkret modelleringsprojekt om henholdsvis forbrændingen af alkohol og nedbrydningen af THC i hash. Projektet blev udviklet af fire matematiklærere fra tre forskellige gymnasier og blev gennemført i tre 1.g stx klasser. Vores analyse bygger på diskussionerne med lærerne under kurset, lærernes præsentation ved det afsluttende seminar, lærernes rapport over projektet, det konkrete design af forløbet samt rapporterne fra seks grupper af elever – to fra hver af de tre involverede klasser.

Inden lærerne besluttede sig for dette emne blev de etiske aspekter af emnet diskuteret. Lærerne nåede frem til at det var et væsentligt og relevant emne at tage op i et modelleringsprojekt i 1.g, men at det ved præsentationen af projektet i klasserne skulle understreges at det *ikke* var en opfordring til hverken at drikke alkohol eller ryge hash, men en anledning til at bruge matematisk modellering til at beskrive og forstå forskellen mellem de to fænomener og til at reflektere over resultaterne. Det faglige hovedargument for valg af emnet var at alkoholforbrænding og nedbrydning af THC kan modelleres ved henholdsvis en lineær funktion og en eksponentielt aftagende funktion, og at klasserne ville få dækket væsentlige dele af disse faglige emner gennem projektet samtidig med at eleverne i projektet ville få særligt gode muligheder for at forholde sig til forskellene mellem disse to typer af funktioner både rent matematisk og i modelleringssammenhængen.

Lærerne opstillede følgende syv læringsmål for elevernes udbytte af projektet: Projektet skulle

1. give eleverne en positiv oplevelse af at de kan anvende deres matematiske viden og færdigheder til at besvare vedkommende spørgsmål fra deres egen livsverden
2. støtte elevernes begrebsdannelse om matematisk modellering
3. lære eleverne at have et kritisk blik på brug af matematiske modeller
4. støtte elevernes tilegnelse af begreberne lineær funktion og eksponentialfunktion
5. udvikle elevernes forståelse og fortolkning af parametrene i de to modeller

6. træne eleverne i at kommunikere ved hjælp af matematik og matematisk modellering
7. støtte elevernes kompetencer til at anvende it-redskaber i matematik.

Disse intentioner for elevernes læring var inspireret af de teorier der blev introduceret og diskuteret på det første seminar på kurset. De falder i tre grupper: (I) aspekter af udvikling af elevernes modelleringskompetence (1-3), (II) aspekter ved udvikling af elevernes begrebsbilleder og begrebsforståelse af lineær funktion og eksponentialfunktion (4-5), (III) aspekter af udvikling af elevernes it- og kommunikationskompetence (6-7).

Under projektet arbejdede eleverne i grupper af tre til fire. De fik udleveret fire støttende opgaver og den følgende udfordring om at skrive en avisartikel om fænomenet:

> "Skriv en artikel til unge på jeres egen alder om alkoholforbrænding og nedbrydning af THC i den menneskelige krop. I artiklen skal I forklare matematisk, hvordan man kan besvare spørgsmålene i de fire opgaver. Jeres svar på opgaverne og de tilhørerende beregning og grafer skal integreres i artiklen."

I de to første støttende opgaver bliver eleverne præsenteret for realistiske (men ikke autentiske) tidsseriedata for henholdsvis forbrænding af en given mængde alkohol og nedbrydning af en given mængde THC i to fiktive personer. Eleverne bliver udfordret til at præsentere og analysere disse data ved hjælp af deres it-værktøjer (Excel og TI-Nspire). De bliver videre udfordret til:

- at karakterisere de to dataserier med deres egne ord
- at undersøge hvor lang tid der går før mængden af stof er halveret henholdsvis en gang og to gange i hvert af de to tilfælde (for herved at få en konkret erfaring med den fundamentale matematiske forskel på de to fænomener, og de funktioner, der kan modellere dem)
- at finde funktionsforskrifter der beskriver hver af de to dataserier bedst muligt;
- at fortolke parametrene i de to funktionsforskrifter matematisk og i forhold til det fænomen, som dataserien beskriver
- at søge information og data på nettet om forbrænding af alkohol og nedbrydning af THC og sammenligne informationerne med resultaterne af deres modeller for de to fænomener.

I støtteopgave 3 bliver der givet oplysning om alkoholprocenten i forskellige populære drinks, og eleverne udfordres til at beregne, hvor meget alkohol de hver især har indtaget ved den seneste fest, og at anvende resultaterne som begyndelsesværdier i deres model for forbrænding af alkohol. I den sidste støtteopgave bliver grupperne bedt om at give en sammenlignende analyse af alkoholforbrænding og nedbrydning af THC.

Udvikling af elevernes begrebsforståelse gennem modellering

I dette afsnit ser vi nærmere på elevernes udbytte af projektet. Med hensyn til den første gruppe af intentioner viser lærernes evalueringer af forløbene at de fremhævede aspekter af modelleringskompetence faktisk kom i spil i alle tre klasser. Det fremgår af elevernes artikler at de opstiller og fortolker henholdsvis lineære og eksponentielle funktioner som modeller for forbrænding af alkohol og for nedbrydning af THC. Eleverne oversætter frem og tilbage mellem på den ene side deres grafiske repræsentationer af data og funktionerne og på den anden side de to virkelige fænomener de modellerer. Flere grupper reflekterer over gyldigheden af modellerne ved fx at problematisere, at deres modeller kun bygger på data for en bestemt person, og at der må antages at være variation mellem forskellige mennesker fx. mellem mænd og kvinder. De finder data på internettet, der bekræfter, at omsætning af alkohol primært foregår i leveren med en nogenlunde konstant rate på omkring 8 g/time, og at denne omsætning kun varierer meget lidt med fx kropsvægten. Elevernes erfaringer med, at det er meget forskelligt, hvor meget alkohol der skal til for at forskellige personer føler sig påvirket, må så forklares med, at alkoholmængden fordeles i forskellige kropsvolumen hos forskellige personer, og individuelle forskelle i hvordan man reagerer på forskellige alkoholkoncentrationer i kroppen. For THC kan søgning på internettet bekræfte, at nedbrydningen foregår med en rate, der er proportional med koncentrationen, og at halveringstiden er omkring tre døgn.

Eleverne kommer i første omgang til at reflektere over forskellen i, hvordan de to stoffer omsættes i kroppen gennem deres arbejde med spørgsmålene om, hvor lang tid det tager før mængden af alkohol og THC er halveret henholdsvis én og to gange. Nogle grupper brugte estimeret data for elevernes eget alkoholindtag ved den seneste fest som udgangspunkt for beregningerne, og flere grupper udtrykte forundring over, hvor lang tid det ifølge modellen tager, før al alkoholen er helt forbrændt i kroppen. Nogle grupper bemærkede selv, at det med THC er endnu værre. Selv efter tre døgn er halvdelen af stoffet tilbage i kroppen, og det forsvinder – ifølge modellen – aldrig helt! Sådanne oplevelser og refleksioner kan bidrage til at udvikle elevernes begrebsbilleder på en hensigtsmæssig måde. Her fik disse elever, i kraft af modelleringskonteksten, en direkte erfaring med forskelle i hvordan to forskellige funktionstyper opfører sig med hensyn til den måde, de aftager på. Disse forskelle blev hægtet op på konkrete erkendelser af hvor mange dage der går, før hhv. alkohol- og THC mængden i kroppen er halveret. Det gav anledning til, at disse grupper fik formuleret den fundamentale egenskab om konstant halveringstid for den aktuelle eksponentialfunktion og en konkret oplevelse af, at den lineære funktion for alkohol forbrænding ikke har denne egenskab. Modelleringskonteksten gør det muligt for eleverne at sætte ord på disse forskelle og beskrive dem i deres eget sprog. Efterfølgende kan disse oplevelser bruges som grundlag for en generel behandling af de to funktionstyper.

Det var dog ikke alle grupper, der af sig selv foretog sådanne refleksioner. Som en af lærerne bemærkede:

> "Idéen var at eleverne selv skulle erkende, at der er en konstant halveringstid ved eksponentialfunktionen og ved nedbrydningen af THC, men ikke i den lineære funktion og ved forbrænding af alkohol. Mange elever brugte imidlertid i første omgang deres grafer til at aflæse tiderne for halvering en og to gange, og de fik derfor lidt forskellige estimater [for tiden for halvering første og anden gang]."

Sådanne observationer kan så efterfølgende give grundlag for overvejelser om, hvordan designet af opgaver eller rammerne kan ændres så alle eller flere elever selv når frem til denne centrale erkendelse.

Hvad angår intentionen om at eleverne skulle udvikle deres forståelse af parametrenes matematiske betydning i de to typer af funktioner og fortolkningen i de to modelleringskontekster blev dette tydeligvis ikke realiseret for alle grupper eller alle elever. Tilsvarende læringsmæssige potentialer og udfordringer er dokumenteret i Michelsen (2002).

Generelt var grupperne fint i stand til at opstille funktionsudtryk for henholdsvis en lineær model for alkoholforbrænding og en eksponentiel model for nedbrydning af THC. Og de var også i stand til at bestemme og fortolke parameterværdierne i den lineære model som henholdsvis mængden af alkohol til et starttidspunkt og den (konstante) mængde af alkohol, der omsættes pr. time i leveren. I nogle grupper opstod der dog forvirring om hvorvidt det var mængden eller koncentrationen af alkohol (alkoholpromillen), som modellen beskrev eller skulle beskrive. Også denne observation kan føre til overvejelser om ændring af designet. Der var af lærerne bevidst foretaget et forsimplende valg ved at lade eleverne arbejde med mængder i stedet for koncentrationer, men det gør det så sværere for eleverne at bruge deres erfaringer og dagligdagsbegreber som fx alkoholpromille.

I forhold til den matematiske fortolkning af parametrenes betydning i de to modeller afdækkede projektet nogle læringsvanskeligheder, som det måske ellers er nemt at overse i arbejdet med standardopgaver. Som en af lærerne skrev:

> "Overraskende mange elever havde problemer med at af-matematisere [fortolke] parameteren *a's* betydning i henholdsvis: $y=a \cdot x+b$ og $y=b \cdot e^{ax}$ og med at forklare deres betydning for henholdsvis omsætningen af alkohol og THC. Hovedproblemet var [for disse elever] at forstå at a står for den [absolutte] mængde alkohol der omsættes pr. time i den lineære model, mens a i den eksponentielle model bestemmer det relative fald i mængden af THC pr. time til e^{a}. ... Næste gang vil jeg anvende forskellige symboler!"

Hvad angår den sidste gruppe (III) af læringsintentioner om at eleverne skulle udvikle deres kompetence til at anvende it-redskaber og til at kommunikere, virkede designet med at eleverne skulle skrive en artikel tilsyneladende hensigtsmæssigt. Artikelformen var samtidig effektiv til afdækning af elevernes vanskeligheder med at argumentere klart og gyldigt i en modelleringskontekst. Argumenter som nedenstående var således ikke ualmindelige i elevernes artikler.

> "I alle disse beregninger har vi set at hash er i kroppen i længere tid end alkohol, og derfor kan det skade ens evner til at lære, hvis man ryger hash regelmæssigt."

Elevernes modeller siger ingenting om læringsvanskeligheder som følge af hverken alkohol eller THC. Citatet er et typisk eksempel på elevernes overfortolkning af modelresultater. Sådanne eksempler og eksempler på gyldig argumentation fra elevernes artikler kan efterfølgende anvendes i undervisningen med henblik på at udvikle elevernes (selv)kritiske sans i forhold til argumenter baseret på matematiske modeller (og argumenter generelt).

Sammenfattende var det lærernes vurdering at deres intentioner for elevernes læring blev opfyldt i rimeligt omfang. Eleverne opstillede og brugte matematiske modeller til at beskrive fænomener som de har erfaringer med eller kender til fra deres ungdomsliv. Næsten alle elever var på udfordring i stand til at reflektere fornuftigt over og i en vis udstrækning også at kritisere deres egne modeller. Modelleringskonteksten skabte situationer, der gjorde lærerne opmærksom på at mange af eleverne havde større vanskeligheder end lærerne umiddelbart forventede med at forstå og fortolke parametrenes betydning i den lineære og den eksponentielle model. Det gælder selvom flere af de behandlede teorier netop forklarer, hvori sådanne læringsvanskeligheder kan bestå.

I det følgende afsnit ser vi i detalje på, hvordan en kombination af Sfard's model for dannelse af matematiske begreber og betydningen af samspillet mellem begrebers forskellige repræsentationsformer, som er behandlet af bl.a. (Vinner & Dreyfus (1989) og Steinbring (1987), kan forklare nogle af de læringsvanskeligheder som eleverne oplever og samtidig udspænde læringspotentialet i elevernes virksomhed i forhold til udvikling af deres begrebsforståelse.

Vi runder behandlingen af eksemplet af med (1) en diskussion om forholdet mellem projektets potentialer og det realiserede udbytte af projektet i forhold til intentionerne om at støtte elevernes begrebsforståelse og (2) en redegørelse for forbindelsen mellem de valgte teorier, skemaet over proces- og objektaspekter af repræsentationer af de matematiske begreber der arbejdes med (se figur 2 og 3 nedenfor), og de ved analysen synliggjorte vanskeligheder som eleverne har med at forstå og fortolke parametrenes betydning i de to typer af funktioner.

Brug af didaktisk teori i analyse af projektet – forbindelse til praksis

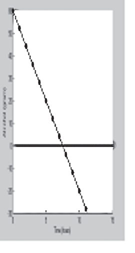
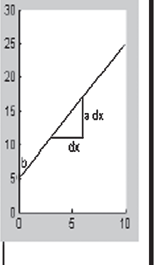
Vi fokuserer i denne analyse netop på kombinationen af de ovenfor nævnte teorier, fordi vi mener at de tilsammen udgør et kraftfuldt teoretisk grundlag for at identificere læringspotentialet i forhold til dannelsen af centrale begreber ved elevernes arbejde med matematisk modellering. Samtidig finder vi at kombinationen og rekontekstualiseringen af de udvalgte teorielementerne som vi har foretaget i forbindelse med analyse af projektforløbene i kurset, klart illustrerer hvilken type forskning og teoridannelse der er nødvendig for at skabe større samspil og sammenhæng mellem forskning og udvikling af undervisningspraksis. Vi opfatter i denne sammenhæng vores arbejde som et bidrag til udvikling af metodologi for hvordan man kan integrere teori og teoriudvikling i samarbejde med lærere i en efter- og videreuddannelseskontekst.

Til illustration af disse pointer fokuserer vi på hvordan modelleringskonteksten i dette eksempel kan udfordre elevernes forståelse af sammenhængen mellem de forskellige repræsentationsformer: naturligt sprog, numerisk beskrivelse, algebraisk beskrivelse, algoritmisk (it-baseret) beskrivelse og grafisk beskrivelse i forhold til begreberne lineær funktion og eksponentialfunktion. Hver af disse repræsentationer kan bringes i spil i forhold til både en proces- og en objektforståelse af de to funktioner. Vi har derfor udviklet et skema, hvor vi kombinerer de fire repræsentationsformer med adskillelsen af proces- og objektperspektiv på begrebet. Det giver et skema med otte celler for hvert af de to begreber lineær funktion og eksponentialfunktion. I hver celle anfører vi repræsentationer af både den konkrete model for henholdsvis alkoholforbrænding og nedbrydning af THC og de generelle modeller for henholdsvis lineær og eksponentiel udvikling – se figur 2 og 3.

De valgte matematikdidaktiske teorier beskæftiger sig med udvikling af begrebsforståelse ud fra et matematisk-kognitivt perspektiv. Sfards (1991) model for dannelse af matematiske begreber har tyngden på samspillet mellem forståelse af begrebernes proces- og objektperspektiv, mens Tall & Vinner (1981) og Vinner & Dreyfus (1989) har fokus på udvikling af elevers begrebsbilleder. Steinbring (1987) understreger i sit arbejde med den epistemologiske trekant betydningen af at adskille begrebet fra dets repræsentationer, og at de enkelte repræsentationer skal have mening for eleverne gennem deres konkrete anvendelser.

Disse tre teorielementer bliver kombineret i skemaerne i figur 2 og 3 i forhold til begreberne lineær funktion (figur 2) og eksponentialfunktion (figur 3). Ved hjælp af skemaerne re-kontekstualiseres teorierne fra generel matematikdidaktisk teori til praksis – til realiserede undervisningsforløb i matematisk modellering. Derudover konkretiseres teorierne i forhold til begreberne lineær funktion og eksponentialfunktion, hvis forskellige repræsentationer optræder i skemaet i forhold til proces- henholdsvis objektforståelse af begreberne i de to modeller. Resultatet af denne sammenkobling af de tre teorier, re-kontekstualiseringen og konkretiseringen i de to modeller er et skema der gør det muligt for lærerne eksplicit at adressere de vanskeligheder analysen af projektet viste eleverne har med at forstå og fortolke parametrenes betydning i de to funktionstyper. Betydningen af parametrene indgår eksplicit i såvel proces- som objektforståelsen af begreberne, den indgår i det naturlige sprog i forbindelse med modelleringssituationen som den mængde alkohol hhv. THC der forsvinder pr. tidsenhed. Dette knyttes i den numeriske repræsentation sammen med beregninger af successive værdier af x og y og tabellægning af funktionerne. Den symbolske repræsentation viser hvordan parametrene indgår i funktionsudtrykkene, og hvor de optræder i de grafiske afbildninger af funktionerne. Arbejder eleverne med modellerne i forhold til alle felterne i skemaerne, burde deres begrebsforståelse blive styrket ifølge teorierne. På denne måde får skemaerne en medierende funktion, der styrker relationen mellem teori og praksis.

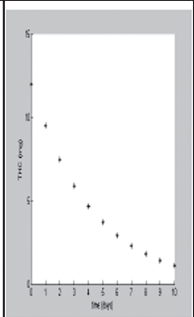
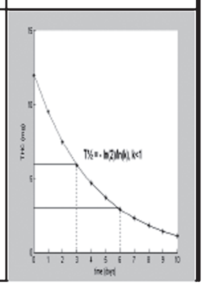
Skemaerne udspænder i hver af de to situationer potentialet for, hvordan eleverne i deres modelleringsarbejde kan blive udfordret i forhold til forbindelserne mellem de forskellige repræsentationer, i forhold til proces-/objekt-perspektivet og i forhold til sammenhængen mellem den konkrete model og den generelle model for henholdsvis

	Naturligt sprog	Numerisk	Symbolsk/ Algebraisk	Algoritmisk (Excel)	Grafisk
Proces	8 gram alkohol fjernes per time. 12 gram tilføres per genstand Ændring i x på en enhed betyder ændring i y på hældningstallet a. y ændres med hældningstallet a gange ændringen i x, som er Δx	x 0 1 2 y 60 52 44 -8 -8 x 0 1 2 y b a+b 2a+b +a +a x 0 Δx y b $a\Delta x$+b +$a\Delta x$	$f(x+1)=f(x)-8$ $f(0)=60$ $f(x+\Delta x)=$ $f(x) + a\Delta x;$ $f(0)= b$	B2=-8 A5=0 A6=A5+1…. B5=60 B6=B5+B$2 …. Generel ved parameterskift i begyndelses-tilstand og hældningstal, samt af tids-skridtet.	
Objekt	Efter 5 genstande og x timer: y =60 – 8x gram alkohol i kroppen En lineær kombination af to variable med konstant sum.	x 0 1 2 3 y 60 52 44 36 En tabel for (x,y) med $y = ax+b$	y = -8x +60 $f(x) = ax + b$ $Ax + By = C$	C2=-8; C3=60; A5=0 A6=A5+1…. C5=C$2*A5+C$3 C6=C$2*A6+C$3 ……. Generel ved skift i parametre	

Figur 2. *Skema over proces- og objektaspekter af repræsentationer af alkoholmodellen. Hver celle rummer en repræsentation af både den konkrete model for nedbrydning af alkohol og den generelle lineære funktion.*

lineær og eksponentiel udvikling. Vi ser det som en teoretisk pointe ved denne skematik, at udvikling af elevernes overgang fra en procesforståelse til en objektforståelse kan (og formentlig skal) støttes selvstændigt inden for hver repræsentationsform. Men dette er en tese, der må belyses nærmere forskningsmæssigt.

Vi mener og har allerede fra vores kursus nogle indikationer for, at skematikken repræsenterer en re-kontekstualisering og konkretisering af de anvendte teorier om matematiklæring der gør dem anvendelige for lærere som grundlag for udvikling af praksis, men også dette må undersøges nærmere gennem fortsat forsknings- og udviklingsarbejde. Skematikken kan være et redskab ved design af modelleringsforløb på den måde at det kan hjælpe med at fokusere forløbets bidrag til elevernes begrebsforståelse i forhold til udvalgte repræsentationsformer og deres samspil. Den kan også være et redskab for læreren til at udfordre elevernes forståelse undervejs i processen. Det kan understøttes gennem konstruktion af dialoger der udfordrer eleverne til at etablere forbindelser mellem de enkelte celler i en konkret modelleringskontekst. Endelig kan den være et redskab for læreren til at opsamle og formidle det potentielle læringsudbytte til eleverne efter et modelleringsforløb.

	Naturligt sprog	Numerisk	Algebraisk/ symbolsk	Algoritmisk (Excel)	Grafisk
Proces	THC mængden halveres på 3 dage. 0.79 af THC mængden er tilbage efter én dag. I et eksponentielt henfald er raten en konstant gange mængden. Hvis x forøges med 1 enhed bliver mængden ændret fra y til k y med (k<1).	x 0 1 2 y 12 9.5 7.5 ·0.79 ·0.79 x 0 1 2 y b kb k^2b $\cdot k$ $\cdot k$	$f(x+1) = 0.79 \cdot f(x)$; $f(0)=12$ mg $f(x+\Delta x) = k^{\Delta x} \cdot f(x)$ $f(0)=b$	B2=0.79 A5=0 A6=A5+1…. B5=12 B6=B5 · \$B\$2 …. Kan generaliseres ved ændring af parametrene og begyndelsesværdien	
Objekt	12 mg til start. Efter x dage er $y = 12 \cdot 0.79^x$ mg tilbage i kroppen. En eksponentielt aftagende funktion.	x 0 1 2 3 y 12 9.5 7.5 6 En tabel over (x,y) with $y = b \cdot k^x$	$y = 12 \cdot 0.79^x$ $f(x) = b \cdot k^x = b \cdot e^{\ln(k) \cdot x}$; $T_{½} = -\ln(2)/\ln(k)$, k<1	B2=0.79; B3=12; A5=0 A6=A5+1…. B5=\$B\$3 · \$B\$2^A5 B6=\$B\$3 · \$B\$2^A6……. Algoritmen er generel	

Figur 3. *Skema over proces- og objektaspekter af repræsentationer af modellen for THC. Hver celle rummer en repræsentation af både den konkrete model for nedbrydning af THC og den generelle eksponentielt aftagende funktion.*

Samlet vurdering af forløbet

Lærerne blev introduceret til de teoretisk belyste læringsvanskeligheder og potentialer, som skemaerne repræsenterer, ved det første seminar på kurset. Skematikken spillede imidlertid ikke en dominerede rolle i lærernes design af forløbet. Ved det afsluttende seminar reflekterede lærerne selv over de ikke fuldt realiserede læringspotentialer i projektforløbet i forhold til deres intentioner om at støtte elevernes forståelse af begreberne lineær funktion og eksponentialfunktion. Lærerne vurderede, at eleverne fokuserede for meget på de grafiske repræsentationer, som de frembragte ved hjælp af it-værktøjer, og at oplægget til elevernes arbejde ikke i tilstrækkelig grad udfordrede eleverne til at arbejde med de forskellige repræsentationsformer og deres indbyrdes sammenhænge. Samtidig fandt lærerne ikke at proces- og objekt perspektivet på de to funktioner blev klart for eleverne. Forslag til hvordan man kunne ændre oplægget og kravene til elevernes arbejde så forløbet næste gang kunne indfri nogle af disse potentialer blev diskuteret. En mulighed kunne være direkte at kræve at eleverne i deres artikler skulle anvende alle fem repræsentationsformer fra skemaerne. Det blev også diskuteret hvordan man kunne skabe en situation hvor eleverne på baggrund af deres erfaringer fra forløbet kunne være eller blive interesseret i at foretage en systematisk sammenligning mellem hvert par af de otte felter i de to skemaer.

Vi ser nogle spændende muligheder for at integrere sådanne intentioner om mere specifikt at støtte elevernes begrebsforståelse i modelleringskonteksten. Det kunne fx ske ved at udnytte idéerne i "model eliciting activities" som forklaret i Ärlebäck, Doerr & O'Neil (2013).

Endelig gav projektet også anledning til at diskutere et vigtigt aspekt af kritisk matematikundervisning, nemlig at sætte elever i stand til at reflektere over og kritisere matematikken i dens mange forskellige anvendelsesformer. I projektet kunne eleverne således forholde sig reflekterende og kritisk såvel til modellernes beskrivelse af virkeligheden som til deres egen praksis eller kulturen omkring indtagelse af alkohol ved ungdomsfester. Modelprojekter af den type der er beskrevet her, hvor projekterne giver elever anledning til at eleverne kan erfare at de via matematisk modellering kan opnå indsigt i situationer fra deres livsverden, bidrager til at udvikle elevers kritiske stillingtagen både i forhold til og ved hjælp af matematisk modellering.

Afsluttende om teori-praksis-relationen

Udvikling af elevernes forståelse af matematiske begreber og metoder er en væsentlig begrundelse for at matematisk modellering skal spille en rolle i gymnasial matematikundervisning. I modelleringssituationer er der mulighed for at udfordre elevernes begrebsforståelse ud over det, at kunne løse standardopgaver hørende til de enkelte begrebsområder. Det er vigtigt ikke alene for at eleverne skal kunne anvende begreberne i modelleringssammenhænge også uden for matematikundervisningen, men også for at skabe et solidt begrebsgrundlag for fortsat tilegnelse af matematik, hvilket er centralt i en studieforberedende undervisning. For at kunne efterleve disse læringsmål må undervisningspraksis i matematisk modellering udvikles under inddragelse af didaktiske teorier om matematiklæring. Det kan kun ske gennem inddragelse i uddannelsen af nye lærere (hvilket kun sker i yderst begrænset omfang), i efter- og videreuddannelse af lærere som i vores kursus, samt i udviklingsprojekter, hvor lærere og forskere samarbejder om udvikling af undervisningspraksis. For at kunne facilitere brugen af didaktisk teori i disse kontekster er der behov for udvikling af medierende teorier og idéer der kan skabe forbindelse mellem de generelle teorier og behovet for / ønsket om udvikling af en konkret undervisningspraksis. Skematikken, der forbinder og konkretiserer repræsentationsformer og proces/objekt perspektivet i forhold til de centrale begreber i et modelleringsforløb, ser vi som eksempel på en sådan medierende teori. I vores fortsatte forskning sigter vi mod at (videre-) udvikle en metodologi for samarbejde med lærere om netop at bruge og udvikle didaktisk teori i eksperimenterende undervisningsforløb, der sigter på at udvikle matematikundervisningens praksis.

Referencer

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes – om matematiklæring* (s. 80-109). København: Forlaget Malling Beck.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work – Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*, s. 163-177.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2010a). Mathematical Modelling as Goal in Mathematics Education – Developing of Modelling Competency through Project Work. I: B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Dahl & L. Haapasalo (red.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (s. 555-568). Montana: Information Age Publishing.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2010b). Learning Mathematics through Modelling: The Case of the Integral Concept. I: B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Dahl, & L. Haapasalo (red.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (s. 569-582). Montana: Information Age Publishing.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2013). The Use of Theory in Teachers' Modelling Projects – Experiences from an In-Service Course. Kommer i Ubuz, Mariotti et al. (eds.): Proceedings of CERME 8, Antalya 2013.

Boaler, J. (2008). Bridging the Gap between Research and Practice: International Examples of Success. I: M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi & F. Arzarello (red.), *The First Century of the*

International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education (s. 91-106). Rom: Istituto della Enciclopedia Italiana.

DiSessa, A.A. & Cobb, P. (2004): Ontological Innovation and the Role of Theory in Design Experiments. *The Journal of the Learning of Sciences*, *13(1)*, s. 77-103.

Doerr, H.M., Ärlebäck, J.B. & O'Neil, A.H. (2013). Teaching Practices and Modelling Changing Phenomena. Kommer i Ubuz, Mariotti et al. (eds.): Proceedings of CERME 8, Antalya 2013.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-β Press.

Kolmos, A. (2009). Problem-Based and Project-Based Learning. I: O. Skovsmose, P. Christensen & O.R. Christensen (red.), *University Science and Mathematics Education in Transition* (s. 261-282).Dordrecht: Springer.

Michelsen, C. (2002). *Begrebsdannelse ved domæneudvidelse: Elevers tilegnelse af funktionsbegrebet i et integreret undervisningsforløb mellem matematik og fysik*. Ph.d.-afhandling, SDU.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. I: W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn & M. Niss (red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (s. 3-32). New York: Springer-Verlag.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections of Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, s. 1-36.

Skovsmose, O. (2006). Kritisk matematikundervisning – for fremtiden. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes – om matematiklæring* (s. 273-297). København: Forlag Malling Beck.

Skovsmose, O. & Borba, M. (2004). Research Methodology and Critical Mathematics Education. I: P. Valero & R. Zevenbergen (red.), *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education: Issues of Power in Theory and Methodology* (s. 207-226). Dordrecht: Kluwer.

Steinbring, H. (1987). Routine and Meaning in the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics, 9*, s. 24-33.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(7)*, s. 151-169.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, s. 356-366.

Zbiek, R.M. & Conner, A. (2006). Beyond Motivation: Exploring Mathematical Modelling as a Context for Deepening Students' Understandings of Curricular Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 63*, s. 89-112.

Ärlebäck, J.B., Doerr, H.M. & O'Neil, A. (2013). Students' Emerging Models of Average Rates of Change in Context. *CERME 8, Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Kommer i Ubuz, Mariotti et al. (eds.): Proceedings of CERME 8, Antalya 2013.

Engelsk abstract

We present a schema for spanning the use of different representations of both process and object aspects of mathematical concepts in a modelling context. The schema is one of three methods that are the first results of our research on how to bridge educational research and development of teaching practice in mathematics. We illustrate the use of the schema in a modeling project on alcohol/THC that was developed and tested by high school teachers at an in-service course. We discuss how the schema function as a mediating link between theory and teaching practices, hereby supporting research-based development of practice.